

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων : Διπλά και Τριπλά Ολοκληρώματα

1 Να υπολογιστούν με δύο τρόπους τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy, \int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy.$$

2 Να υπολογιστούν με δύο τρόπους τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\pi \int_0^x \sin y dy dx, \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} y dy dx.$$

3 Να υπολογιστούν με δύο τρόπους τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx dy, \int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}} dy dx.$$

4 Να ολοκληρωθεί με δύο τρόπους η $f(x, y) = \frac{x}{y}$ στο χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $y = x, y = 2x, x = 1, x = 2$.

5 Να ολοκληρωθεί η συνάρτηση $f(x, y) = e^y \ln x$ στην περιοχή πρώτου τεταρτημορίου η οποία βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y = \ln x$ και για $x = 1, x = 2$.

6 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx, \int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y + 1) dy dx.$$

7 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} dx dy, \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x+2y)} dx dy.$$

8 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx, \int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx,$$

αφού τα μετασχηματίσετε σε πολικές συντεταγμένες.

9 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx,$$

αφού το μετασχηματίσετε σε πολικές συντεταγμένες.

10 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy,$$

αφού το μετασχηματίσετε σε πολικές συντεταγμένες.

11 Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \vartheta + z^2) r d\vartheta dz,$$

12 Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} r^3 dr dz d\vartheta.$$

13 Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta + 1) r d\vartheta dz dr.$$

14 Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$.

15 Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $x = -y^2$, $y = x + 2$.

16 Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $x = y^2 - 1$, $x = 2y^2 - 1$.

17 Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx,$$

χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

18 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

(Υποδ: Δείξτε ότι $\int_a^b e^{-xy} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$, σχηματίστε ένα διπλό ολοκλήρωμα και κάντε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης για να το υπολογίσετε).

19 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

αφού κάνετε αλλαγή συντεταγμένων σε πολικές.

20 Αντιστρέψτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy.$$

21 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy dx dy,$$

αφού κάνετε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

22 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 dy dx,$$

αφού κάνετε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

23 Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x = a$, $x = -a$, $y = a/2$.

24 Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $x = y - y^2$, $x + y = 0$.