Παραγωγικό Κεφάλαιο και Χρήμα

1 Ανταλλαγή Αγαθών-Χρήμα

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ανταλλαγή αγαθών και ως εκ τούτου με το **χρήμα** το οποίο είναι ένα ανταλλακτικό μέσο. Η μονάδα μετρήσεως του χρήματος θα ονομάζεται **νομισματική μονάδα**. Το χρήμα είναι στην πραγματικότητα ένα **εικονικό** αγαθό όπως και η χρήση πλαστικού χρήματος. Αυτό καθ' αυτό δεν έχει καμία χρησιμότητα αλλά ανταλλάσσεται με οποιοδήποτε άλλο αγαθό. Ας το εξηγήσουμε λιγάκι παρακάτω. Σε παλαιότερους χρόνους η ανταλλαγή αγαθών γίνονταν απλά ανταλλάσσοντας π.χ. σιτάρι με κρέας κ.τ.λ. Ένας γεωργός μπορεί να ανταλλάξει μέρος της σοδειάς του με λίγο κρέας από έναν κυνηγό ή έναν κτηνοτρόφο. Και στους δυο είναι χρήσιμη και αναγκαία αυτή η ανταλλαγή. Το πως θα πραγματοποιηθεί η ανταλλαγή αυτή, δηλαδή πόσο σιτάρι για ένα κιλό κρέας, αφορά τους δυο ενδιαφερόμενους και εξαρτάται από τις εναλλακτικές λύσεις που υπάρχουν. Αν δηλαδή στην περιοχή βρίσκονται πολλοί κτηνοτρόφοι τότε το κρέας θα έχει χαμηλή αξία σε σχέση με το σιτάρι. Όμως, υπάρχουν και άνθρωποι οι οποίοι δεν είναι κτηνοτρόφοι ούτε γεωργοί για να έχουν στην κατοχή τους κάποιο αγαθό για ανταλλαγή όπως ο δάσκαλος του χωριού. Σε αυτές τις περιπτώσεις ήταν συνηθισμένο να δίνουν γάλα, αυγά, κρέας, ψωμί και ότι άλλο είχαν οι κάτοικοι στην κατοχή τους.

Όμως, η ανταλλαγή δεν ήταν αρκετή σε πολλές περιπτώσεις. Έπρεπε να βρεθεί ένα «αγαθό» το οποίο να είναι αναγνωρίσιμο από όλους και ταυτόχρονα αναλλοίωτο στον χρόνο. Το κρέας, το γάλα κ.τ.λ. αν δεν καταναλωθεί σύντομα χάνει την αξία του. Από την άλλη μεριά όμως τα μέταλλα (π.χ. διάφορα μεταλλικά εργαλεία) δεν χάνουν την αξία τους και με κατάλληλη συντήρηση διατηρούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Με αυτό τον τρόπο μπορείς να «αποταμιεύσεις» τέτοια αγαθά για δύσκολες περιπτώσεις όπως η ξηρασία, οι αρρώστιες των ζώων κ.τ.λ. Με το καιρό αυτά έγιναν απλά μέταλλα ή ακόμη και χαρτί χωρίς να έχουν αυτά καθ΄ αυτά κάποια χρησιμότητα αλλά συμφωνούσαν όλοι ότι έχουν μια ανταλλακτική δύναμη και συνάμα «αποταμιευτικές» ικανότητες.

Περίπου έτσι διαμορφώθηκε η έννοια του χρήματος. Με το καιρό δημιουργήθηκαν πολύπλοκοι μηχανισμοί (καθώς και περίεργοι με την πρώτη ματιά) όπως αυτός της **ισοτιμίας** δυο νομισμάτων. Το νόμισμα του εκάστοτε κράτους αντικατοπτρίζει κατ΄ κάποιον τρόπο την οικονομική του ευμάρεια και κατ΄ επέκταση μπορεί να είναι πολυτιμότερο από αυτό ενός άλλου κράτους παρόλο που και τα δυο είναι στην πραγματικότητα ένα κομμάτι χαρτί! Προσπαθήστε να εξηγήσετε για ποιο λόγο το δολάριο δεν έχει την ίδια αγοραστική δύναμη με το Ευρώ. Θα διαπιστώσετε ότι δεν είναι καθόλου εύκολο να εξηγήσετε ένα τέτοιο φαινόμενο χωρίς να μελετήσετε (αρκετά) την κατασκευή και τις ιδιότητες της παγκόσμιας οικονομίας. Σε αυτό το βιβλίο δεν θα ασχοληθούμε με τέτοια θέματα αλλά το ενδιαφέρον μας είναι περισσότερο η μαθηματική επεξεργασία χρηματοοικονομικών φαινομένων.

2 Παραγωγικό Κεφάλαιο

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Παραγωγικό κεφάλαιο θα λέμε ένα αγαθό το οποίο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα ούτως ώστε να μας αποδώσει κέρδος και ταυτόχρονα εκφράζεται σε νομισματικές μονάδες.*

Ένας διαδεδομένος τρόπος να γίνει ένα κεφάλαιο παραγωγικό είναι ο δανεισμός.

Συνήθως δανείζουμε χρήματα διότι αυτά ανταλλάσσονται στην συνέχεια με οτιδήποτε μας ενδιαφέρει. Όμως ένας αγρότης μπορεί να δανειστεί κατάλληλο όχημα για τις αγροτικές εργασίες του και επομένως σε αυτή την περίπτωση το όχημα αποτελεί παραγωγικό αγαθό για τον κάτοχο του (τον δανειστή) μιας και θα του επιφέρει προσυμφωνημένο κέρδος.

3 Τόκος

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 *Θα ονομάζουμε* **τόκο** *ενός κεφαλαίου σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα την αύξηση του κεφαλαίου η οποία προέρχεται από την παραγωγική του ικανότητα. Δεχόμαστε ότι ο τόκος ενός κεφαλαίου είναι ανάλογος τόσο με το ύψος του κεφαλαίου όσο και με τον τον χρόνο δανεισμού.*

Υποθέστε ότι ο Α δανείζει 100 Ευρώ στον Β για ένα έτος. Η συμφωνία είναι ο Β μετά το τέλος του έτους να επιστρέψει στον Α το ποσό των 100 Ευρώ και επιπλέον 10 Ευρώ. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι ο τόκος που έχει καταβληθεί είναι το 10% του αρχικού ποσού ή αλλιώς $X \cdot \frac{10}{100}$.

Αν συμβολίσουμε με I (interest) τον τόκο που δίνει ένα κεφάλαιο μετά από t χρονικές μονάδες τότε το άθροισμα $K + I$ (όπου K είναι το κεφάλαιο) θα ονομάζεται η **τελική αξία** του κεφαλαίου και θα συμβολίζεται με K_t. Η ενσωμάτωση του τόκου στο αρχικό κεφάλαιο ονομάζεται **κεφαλαιοποίηση**.

4 Χρόνος

Όπως είδαμε ο χρόνος είναι ιδιαίτερα σημαντικός στους υπολογισμούς. Για ευκολία μπορούμε να θεωρούμε ότι το έτος έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας 30 ημέρες. Σε αυτή την περίπτωση το έτος καλείται **εμπορικό έτος**. Μερικές χώρες χρησιμοποιούν αυτό τον τρόπο μέτρησης. Ένας άλλος τρόπος μέτρησης είναι να υπολογίζουμε τις ημέρες του κάθε μήνα όπως πραγματικά είναι, δηλαδή 28 ή 29 για τον Φεβρουάριο και 30 ή 31 για τους άλλους μήνες. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **πολιτικό έτος** και ο χρόνος θα έχει είτε 365 είτε 366 ημέρες. Ένας τρίτος τρόπος είναι εφαρμόζοντας το λεγόμενο **μικτό έτος** στο οποίο υπολογίζουμε τις ημέρες του μήνα όπως πραγματικά είναι (όπως στο πολιτικό έτος) αλλά υποθέτουμε για ευκολία ότι ο χρόνος έχει 360 ημέρες. Σε αυτό το βιβλίο θα εργαζόμαστε για ευκολία εφαρμόζοντας το εμπορικό έτος όπου υποθέτουμε ότι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και ο χρόνος 360 ημέρες.

5 Επιτόκιο

Για τον υπολογισμό του τόκου ενός κεφαλαίου χρήσιμη είναι η έννοια του επιτοκίου.

Σχήμα 1

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 *Ορίζουμε ως* **επιτόκιο** *τον τόκο μιας νομισματικής μονάδας (π.χ. ένα Ευρώ) για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (π.χ ένα έτος) και το συμβολίζουμε με i.*

Έστω ότι ο Α δανείζει 100 Ευρώ στον Β για ένα έτος με επιτόκιο $i = 10\%$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε Ευρώ αποδίδει τόκο 10 λεπτά του Ευρώ σε ένα χρόνο και επομένως τα 100 Ευρώ αποδίδουν 10 Ευρώ σε ένα χρόνο. Έτσι σε ένα χρόνο ο Β θα επιστρέψει $100 \cdot (1 + i)$ Ευρώ στον Α. Αν ο Α δανείσει το ποσό αυτό για δυο χρόνια τότε ο Β μπορεί να δώσει τον τόκο που αντιστοιχεί στον πρώτο χρόνο στον Α ή μπορεί και όχι. Στην τελευταία αυτή περίπτωση ο τόκος του πρώτου έτους θα αποδώσει και αυτός με τη σειρά του επιπλέον χρήματα στο δεύτερο έτος. Επομένως υπάρχει μεγάλη διαφορά στο αν αποδίδονται στον δανειστή οι τόκοι στο τέλος της κάθε περιόδου ή όχι.

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν οι δυο επόμενοι ορισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 *Θα λέμε ότι έχουμε* **απλή κεφαλαιοποίηση** *όταν η ενσωμάτωση του τόκου στο δανεισμένο κεφάλαιο γίνεται μόνο μια φορά στο τέλος της χρονικής περιόδου του δανεισμού.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 *Το σύστημα κεφαλαιοποίησης του τόκου όπου αυτός συμπεριλαμβάνεται στο κεφάλαιο σε τακτά χρονικά υποδιαστήματα του συνολικού χρόνου δανεισμού ονομάζεται* **σύνθετη κεφαλαιοποίηση** *ή* **ανατοκισμός**.

Απλή Κεφαλαιοποίηση

Αν ο Α δανείσει στον Β ένα ποσό Χ με ετήσιο επιτόκιο i για ένα χρόνο τότε ο Β θα επιστρέψει $X \cdot (1+i)$ στον Α στο τέλος του χρόνου. Έτσι σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $I = X \cdot i$ δηλαδή ο τόκος του ποσού X σε έναν χρόνο είναι το γινόμενο του ποσού αυτού επί το επιτόκιο. Αν ο Α δανείσει στον Β το ποσό X για n χρόνια με απλή κεφαλαιοποίηση τότε ο τόκος σε κάθε χρόνο θα είναι όπως είπαμε $I = X \cdot i$ άρα ο τόκος μετά από την πάροδο n ετών θα είναι $X \cdot i \cdot n$ και επομένως το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$X_n = X + X \cdot i \cdot n = X \cdot (1 + n \cdot i)$$

Σημειώστε ότι στο τέλος του κάθε έτους υποθέτουμε ότι ο B προσδίδει τον τόκο στον A και δεν τον κρατά για αυτό τον λόγο το ονομάζουμε **απλό τόκο**. Στην περίπτωση που ο τόκος του κάθε έτους δεν αποδίδεται στον Α τότε το ποσό αυτό θεωρείται ως ποσό που δανείσθηκε στον Β και επομένως θα πρέπει να τοκισθεί και αυτό με την σειρά του. Την περίπτωση αυτή θα την εξετάσουμε αργότερα.

Σχήμα 2: Το τελικό κεφάλαιο είναι ανάλογο του χρόνου τοκισμού

ΑΣΚΗΣΗ 6 *Να υπολογισθεί ο τόκος του κεφαλαίου 5.000 Ευρώ το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 6% για πέντε έτη.*

ΛΥΣΗ. Σύμφωνα με την εξίσωση απλού τόκου θα έχουμε

$$I = 5.000 \cdot 5 \cdot 0.06 = 1.500$$

Σημειώστε ότι στον τύπο αντικαθιστούμε όπου το i όχι 6% αλλά $\frac{6}{100} = 0.06$. $\square$

6 Ονομαστικά Επιτόκια και η Εξίσωση Απλού Τόκου

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 *Έστω i το επιτόκιο το οποίο αναφέρεται σε μια χρονική μονάδα t και ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα επιτόκια i_1, i_2 που αναφέρονται σε άλλες χρονικές μονάδες, $t_1 = \frac{t}{n}, t_2 = mt$, $n, m \in \mathbb{N}$. Τα επιτόκια αυτά θα ονομάζονται* **ονομαστικά** *επιτόκια του i για τις αντίστοιχες χρονικές μονάδες t_1, t_2 όταν $\frac{i}{i_1} = \frac{t}{t_1}, \frac{i}{i_2} = \frac{t}{t_2}$.*

Υποθέτοντας ότι έχουμε ετήσιο επιτόκιο $i = 10\%$ τότε το ονομαστικό επιτόκιο εξαμήνου θα είναι $i_1 = \frac{i}{2}$ ενώ αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι $i = 3\%$ τότε το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο θα είναι $i_1 = i \cdot 4$ (καθότι το έτος αποτελείται από 4 τρίμηνα).

Η εξίσωση απλού τόκου είναι

$$X_t = X \cdot (1 + i^{'})$$

όπου $i^{'}$ είναι το ονομαστικό επιτόκιο της περιόδου τοκισμού δεδομένου ότι έχουμε δεχθεί ότι ο τόκος είναι ανάλογος του χρόνου δανεισμού.

Αν το επιτόκιο αναφέρεται σε k χρονικές μονάδες (π.χ. ημέρες, μήνες κ.τ.λ.) και η περίοδος τοκισμού είναι m φορές (όχι κατ΄ ανάγκη ακέραιο πολλαπλάσιο, δηλαδή μπορεί $m \in \mathbb{R}_+$) την χρονική μονάδα k τότε χρησιμοποιώντας την έννοια του ονομαστικού επιτοκίου φτάνουμε στην γενικότερη δυνατή εξίσωση απλού τόκου η οποία είναι

$$\boxed{X_{\text{τελικό}} = X \cdot (1 + m \cdot i), \quad (\texttt{εξίσωση απλού τόκου}), m \in} \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

όπου i είναι το επιτόκιο για την χρονική μονάδα k και m είναι η χρονική περίοδος τοκισμού υπολογισμένη σε πολλαπλάσια (όχι ακέραια κατ΄ ανάγκη) της χρονικής μονάδας k.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 *Έστω ότι ο A δάνεισε το ποσό X στον B με ετήσιο (απλό) επιτόκιο i και ο B επέστρεψε το δάνειο σε 4 μήνες. Ποιος είναι ο τόκος που οφείλει ο B στον A;*

Αν το ποσό το επέστρεφε στο τέλος του έτους τότε ο τόκος θα αφορούσε όλο το έτος και επομένως θα ήταν $I = X \cdot i$. Στην περίπτωση μας όμως τα δανεικά επεστράφησαν νωρίτερα, όταν πέρασαν 4 μήνες. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο 4μήνου το οποίο είναι $i_1 = \frac{i}{3}$. Επομένως ο τόκος θα είναι $I_1 = X \cdot i_1 = X \cdot \frac{i}{3}$.

Παρόμοια, αν το δανεισμένο κεφάλαιο επιστραφεί σε m μέρες τότε υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο της μιας ημέρας το οποίο είναι $i_2 = \frac{i}{360}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον τόκο για τις m ημέρες χρησιμοποιώντας την εξίσωση απλού τόκου, δηλαδή

$$I_2 = X \cdot (1 + m \cdot i_2) - X$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση απλού τόκου όπως περιγράψαμε νωρίτερα. Εφόσον το επιτόκιο είναι ετήσιο τότε ο χρόνος τοκισμού είναι $m = \frac{4}{12}$. Σύμφωνα με την εξίσωση απλού τόκου θα έχουμε ότι το τελικό κεφάλαιο είναι $X_t = X \cdot (1 + m \cdot i) = X \cdot \left(1 + \frac{4}{12} \cdot i\right)$. Στην συνέχεια, για να υπολογίσουμε τον τόκο αφαιρούμε το αρχικό κεφάλαιο από το τελικό, άρα $I = X \cdot \left(1 + \frac{4}{12} \cdot i\right) - X = X \cdot \frac{i}{3}$ το οποίο βεβαίως συμπίπτει με το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε με την χρήση των ονομαστικών επιτοκίων.

ΑΣΚΗΣΗ 9 *Να υπολογισθεί ο τόκος του κεφαλαίου 3.000 Ευρώ το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 4% για 7 μήνες.*

ΛΥΣΗ. Εδώ μας δίνεται ετήσιο επιτόκιο αλλά το κεφάλαιο τοκίζεται για λιγότερο από έτος, συγκεκριμένα για 7 μήνες. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ονομαστικού επιτοκίου θα υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο του μήνα και στην συνέχεια θα βρούμε τον τόκο που αντιστοιχεί στους 7 μήνες.

Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι

$$i_1 = \frac{i}{12} = \frac{\frac{4}{100}}{12} = \frac{4}{1200}$$

Συνεπώς ο ζητούμενος τόκος είναι

$$I = 3.000 \cdot 7 \cdot \frac{4}{1200} = 70$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε εφαρμόζοντας την εξίσωση απλού τόκου και αντικαθιστώντας το $m = \frac{7}{12}$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο i τοκίστηκε κεφάλαιο 3.000 Ευρώ για πέντε έτη και έδωσε τόκο 100 Ευρώ;*

ΛΥΣΗ. Σε αυτή την άσκηση μας δίνονται ο τόκος, το κεφάλαιο και ο χρόνος και μας ζητείται το επιτόκιο. Δηλαδή πάλι θα εφαρμόσουμε την ισότητα

$$I = X \cdot n \cdot i$$

αντικαθιστώντας τα γνωστά, δηλαδή $I = 100$, $X = 3.000$ και $n = 5$. Λύνουμε ως προς i και έχουμε

$$i = \frac{I}{X \cdot n} = \frac{100}{3.000 \cdot 5} \backsimeq 0.0067$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 11 *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο 3.000 Ευρώ για 5 χρόνια και το τελικό ποσό ήταν 3.500 Ευρώ;*

ΛΥΣΗ. Θα εργαστούμε όπως προηγούμενα. Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τον τόκο ο οποίος είναι η διαφορά του τελικού κεφαλαίου από το αρχικό. Δηλαδή έχουμε ότι $I = 500$ Ευρώ. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το επιτόκιο αντικαθιστώντας στον τύπο

$$i = \frac{I}{X \cdot n} = \frac{500}{3.000 \cdot 5} \simeq 0.03$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 12 *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε τα χρήματά μας έτσι ώστε να διπλασιαστούν μετά από 10 χρόνια;*

ΛΥΣΗ. Αν το κεφάλαιο μας είναι ίσο με X τότε το τελικό κεφάλαιο μετά από 10 χρόνια θα είναι $X_{10} = 2X$ άρα χρησιμοποιώντας την εξίσωση απλού τόκου έχουμε ότι

$$X_{10} = X \cdot (1 + i \cdot 10)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$2 \cdot X = X \cdot (1 + i \cdot 10)$$

Λύνοντας ως προς i προκύπτει ότι $i = 0.1$ ή αλλιώς το επιτόκιο πρέπει να είναι 10%. Σημειώστε ότι αυτό ισχύει για οποιοδήποτε ποσό X. □

ΑΣΚΗΣΗ 13 *Πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε ένα κεφάλαιο 3.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 6% για να έχει τελική αξία 3.500 Ευρώ;*

ΛΥΣΗ. Εφαρμόζουμε την εξίσωση απλού τόκου 1 και έχουμε

$$3.500 = 3.000 \cdot (1 + m \cdot 0.06)$$

Λύνοντας ως προς το m βρίσκουμε ότι $m \simeq 2.77$ έτη. □

Άσκηση 14 *Πόσα χρόνια πρέπει να τοκισθεί κεφάλαιο με ετήσιο επιτόκιο 3% έτσι ώστε να διπλασιαστεί;*

Λύση. Αν το αρχικό ποσό είναι το X τότε το τελικό θέλουμε να είναι το $2 \cdot X$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση απλού τόκου και έχουμε

$$2 \cdot X = X \cdot (1 + m \cdot 0.03)$$

Λύνοντας ως προς το m βρίσκουμε ότι $m \simeq 33.3$ χρόνια. $\square$

Άσκηση 15 *Έστω ότι κεφάλαιο 3.000 Ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 3% για 3 χρόνια, 5 μήνες και 20 ημέρες. Ποιο θα είναι το τελικό κεφάλαιο;*

Λύση. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση απλού τόκου. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το m. Εδώ η χρονική μονάδα είναι το έτος ενώ η περίοδος τοκισμού είναι τα 3 χρόνια, 5 μήνες και 20 ημέρες. Επομένως πρέπει να μετατρέψουμε την περίοδο αυτή σε πολλαπλάσιο του έτους το οποίο εδώ δεν θα είναι ακέραιο. Οι 5 μήνες είναι το κλάσμα $\frac{5}{12}$ ενώ οι 20 ημέρες είναι το κλάσμα $\frac{20}{360}$. Επομένως η περίοδος τοκισμού είναι $m = 3 + \frac{5}{12} + \frac{20}{360} = \frac{125}{36}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση απλού τόκου έχουμε

$$X_t = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{125}{36} \cdot 0.03\right) \simeq 3312.5$$

$\square$

7 Μέσο Επιτόκιο και Μέσος Χρόνος Τοκισμού

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε το εξής πρόβλημα. Έστω ότι έχω δυο κεφάλαια τα οποία τα τοκίζω με ετήσια επιτόκια i_1, i_2. Το πρώτο κεφάλαιο το τοκίζω για 2 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο i_1 ενώ το δεύτερο για 3 χρόνια και 5 μήνες με ετήσιο επιτόκιο i_2. Στο τέλος των 3 χρόνων και 5 μηνών θα έχω δυο ποσά που θα προέρχονται από τόκους, τα I_1 και I_2. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα: Ποιο είναι το επιτόκιο εκείνο με το οποίο θα μπορούσα να τοκίσω τα ίδια ποσά για τα ίδια χρονικά διαστήματα με πριν και να μου αποδώσουν τον ίδιο συνολικά τόκο στο τέλος; Αυτό το επιτόκιο θα το ονομάζουμε **μέσο επιτόκιο**. Έτσι, αν τοκίζουμε τα χρήματα μας σε πολλές διαφορετικές τράπεζες οι οποίες εφαρμόζουν διαφορετικά επιτόκια, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ποιο είναι το μέσο επιτόκιο. Με αυτό τον τρόπο έχουμε μια καλύτερη εικόνα για τα κεφάλαια μας όταν έχουμε το μέσο επιτόκιο ως δείκτη αναφοράς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 16 (Μέσο Επιτόκιο) *Έστω τα κεφάλαια* $K_1, K_2, \cdots, K_n$ *τα οποία τοκίζονται με επιτόκια* $i_1, \cdots, i_n$ *τα οποία αναφέρονται στην ίδια χρονική περίοδο τοκισμού (π.χ. είναι όλα ετήσια). Αν τα κεφάλαια τοκίζονται για τους χρόνους* $t_1, \cdots, t_n$ *τότε συμβολίζουμε με* $K_1^{t_1,i_1}, \cdots, K_n^{t_n,i_n}$ *τις τελικές αξίες των κεφαλαίων. Θα ονομάζουμε* **μέσο επιτόκιο** *το επιτόκιο* i *που είναι τέτοιο ώστε όταν τοκιστούν με αυτό τα κεφάλαια* $K_1, K_2, \cdots, K_n$ *για* $t_1, \cdots, t_n$ *χρονικές μονάδες τότε το άθροισμα των τελικών αξιών, δηλαδή* $K_1^{t_1,i} + \cdots + K_n^{t_n,i}$, *να είναι ίσο με* $K_1^{t_1,i_1} + \cdots + K_n^{t_n,i_n}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 *Ας θεωρήσουμε ότι τα κεφάλαια* $K_1, \cdots, K_n$ *τοκίζονται για τον ίδιο χρόνο* t *με επιτόκια* $i_1, \cdots, i_n$ *αντίστοιχα. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

Οι τελικές αξίες θα είναι $K_1^{t,i_1}, \cdots, K_n^{t,i_n}$ οι οποίες ικανοποιούν $K_j^{t,i_j} = K_j \cdot (1 + ti_j)$ για $j = 1, \cdots, n$. 'ρα το τελικό ποσό θα είναι το άθροισμά τους, δηλαδή

$$K^t = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti_j)$$

Πώς θα υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο; Σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι το επιτόκιο i τέτοιο ώστε αν τοκιστούν τα ποσά $K_1, \cdots, K_n$ για χρόνο t τότε το άθροισμα των τελικών ποσών να παραμένει το ίδιο. Όταν τοκίσουμε το ποσό K_j με επιτόκιο i (το μέσο επιτόκιο) για χρονικό διάστημα t θα έχει τελική αξία $K_j^t = K_j(1 + ti)$ συνεπώς το άθροισμα των τελικών αξιών θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^t = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti)$$

Αυτό το ποσό θα πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των τελικών ποσών όταν τοκιστούν με διαφορετικό επιτόκιο, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti_j)$$

Για να υπολογίσουμε το i γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j + i \cdot \sum_{j=1}^{n} K_j t$$

'ρα

$$i = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j(1+ti_j) - \sum_{j=1}^{n} K_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t i_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t} = \frac{K_1 i_1 + \cdots + K_n i_n}{K_1 + \cdots + K_n}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18 *Θεωρούμε ότι τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ τοκίζονται με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ και για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

Τα τελικά κεφάλαια θα είναι της μορφής $K_j(1 + t_j i_j)$ και επομένως το άθροισμα των τελικών κεφαλαίων θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1 + t_j i_j)$$

Για να βρούμε το μέσο επιτόκιο i θα τοκίσουμε τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$ με κοινό επιτόκιο το μέσο επιτόκιο i (το οποίο ψάχνουμε). Σε αυτήν την περίπτωση τα τελικά κεφάλαια θα είναι

$$K_j(1 + t_j i)$$

και επομένως το άθροισμά τους θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1 + t_j i)$$

Για να υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο i θα απαιτήσουμε $\sum_{j=1}^{n} K_j(1+ t_j i_j) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + t_j i)$ και επομένως

$$K_1(1 + t_1 i_1) + \cdots + K_n(1 + t_n i_n) = K_1(1 + t_1 i) + \cdots + K_n(1 + t_n i)$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$i = \frac{K_1 t_1 i_1 + \cdots + K_n t_n i_n}{K_1 t_1 + \cdots + K_n t_n} \qquad (\text{τύπος μέσου επιτοκίου})\ (2)$$

Επομένως ο τύπος 2 μας δίνει την μορφή του μέσου επιτοκίου για n το πλήθος ποσά τα οποία τοκίζονται για n διαφορετικές περιόδους και για n διαφορετικά επιτόκια. □

ΑΣΚΗΣΗ 19 *Έστω δυο κεφάλαια $K_1 = 1.000$ Ευρώ και $K_2 = 1.500$ Ευρώ. Το πρώτο κεφάλαιο τοκίζεται για 2 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο $i_1 = 0.06$ και το δεύτερο κεφάλαιο τοκίζεται για 3 χρόνια με επιτόκιο $i_2 = 0.05$. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

ΛΥΣΗ. Όταν τα κεφάλαια τοκιστούν με διαφορετικά επιτόκια θα έχουν τελικές αξίες

$$\begin{aligned} K_1^t &= 1.000 \cdot (1 + 2 \cdot 0.06) = 1.120 \\ K_2^t &= 1.500 \cdot (1 + 3 \cdot 0.05) = 1.725 \end{aligned}$$

Όταν τοκιστούν με το ίδιο (μέσο επιτόκιο) θα έχουν τελικές αξίες

$$\begin{aligned} &1.000 \cdot (1 + 2 \cdot i) \\ &1.500 \cdot (1 + 3 \cdot i) \end{aligned}$$

Επομένως, απαιτούμε τα αθροίσματα των τελικών αξιών να είναι ίσα, δηλαδή

$$1.000 \cdot (1 + 2 \cdot i) + 1.500 \cdot (1 + 3 \cdot i) = 1.120 + 1.725$$

Λύνοντας ως προς i έχουμε ότι $i \backsimeq 0.053$. $\square$

Στην συνέχεια θα δώσουμε έναν ορισμό για τον μέσο χρόνο τοκισμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20 (Μέσος Χρόνος Τοκισμού) *Έστω τα κεφάλαια $K_1, K_2, \cdots, K_n$ τα οποία τοκίζονται με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ και για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$. Θα ονομάζουμε* ***μέσο χρόνο τοκισμού*** *τον χρόνο t ο οποίος δίνεται ως εξής*

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j} \quad \text{(μέσος χρόνος τοκισμού)} \tag{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21 *Έστω τα κεφάλαια* $K_1 = 1.000$ *Ευρώ,* $K_2 = 1.500$ *Ευρώ και* $K_3 = 2.000$ *Ευρώ. Τα ποσά αυτά τοκίζονται για 2, 3 και 5 χρόνια αντίστοιχα με επιτόκια 3%, 4% και 5% αντίστοιχα. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο τοκισμού. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι*

$$t = \frac{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5}{1.000 + 1.500 + 2.000} \backsimeq 3.66$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 22 *Παρατηρούμε ότι αν τοκίσουμε το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίο για κάποιο χρονικό διάστημα* t_i *τότε ο μέσος χρόνος τοκισμού τείνει να εξισωθεί με τον χρόνο* t_i.

7.1 Σχέση μέσου επιτοκίου και μέσου χρόνου τοκισμού

Αν υπάρχει μια τράπεζα η οποία χρησιμοποιεί το μέσο επιτόκιο i τότε για πόσο χρόνο t πρέπει να τοποθετήσω το σύνολο των κεφαλαίων μου σε αυτή την τράπεζα ούτως ώστε να έχω το ίδιο τελικό όφελος με το αν τόκιζα τα επιμέρους ποσά σε διαφορετικό χρόνο και με διαφορετικά επιτόκια;

Το αρχικό κεφάλαιο είναι το $K = \sum_{j=1}^{n} K_j$ και επομένως αν το τοκίσω σε μια τράπεζα με επιτόκιο i και για χρόνο t θα έχω τελική αξία $K(1+ti)$. Εξισώνοντας τις τελικές αξίες προκύπτει η εξίσωση

$$K(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i)$$

Λύνοντας ως προς t έχουμε

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j}$$

ο οποίος είναι ο μέσος χρόνος τοκισμού.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τον μέσο χρόνο τοκισμού t τότε το i που ικανοποιεί την σχέση

$$K(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j) \text{ είναι το } i = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j i_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}$$

δηλαδή πρόκειται για το μέσο επιτόκιο.

(**Σημασια του Μεσου Επιτοκιου και του Μεσου Χρονου Τοκισμου**) Η σημασία του μέσου επιτοκίου και του μέσου χρόνου τοκισμού είναι η εξής: Αν τοκίσω τα ποσά $K_1, \cdots, K_n$ για χρονικά διαστήματα $t_1, \cdots, t_n$ και για επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ αντίστοιχα τότε το συνολικό όφελος θα είναι το ίδιο με το να τοκίσω το συνολικό ποσό $\sum_{j=1}^{n} K_j$ με το μέσο επιτόκιο i στον μέσο χρόνο τοκισμού t.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23 *Έστω τα κεφάλαια* $K_1 = 1.000$ *Ευρώ,* $K_2 = 1.500$ *Ευρώ και* $K_3 = 2.000$ *Ευρώ. Τα ποσά αυτά τοκίζονται για 2, 3 και 5 χρόνια αντίστοιχα με επιτόκια 3%, 4% και 5% αντίστοιχα. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο και έπειτα τον μέσο χρόνο τοκισμού. Το μέσο επιτόκιο δίνεται ως εξής*

$$i = \frac{1.000 \cdot 2 \cdot 0.03 + 1.500 \cdot 3 \cdot 0.04 + 2.000 \cdot 5 \cdot 0.05}{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5} \simeq 0.04$$

Επομένως, αν βρω μια τράπεζα η οποία να χρησιμοποιεί επιτόκιο 4% τότε μπορώ να τοποθετήσω τα χρήματα εκεί και να τα τοκίσω για 2,3 και 5 χρόνια αντίστοιχα.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε, με βάση το μέσο επιτόκιο, τον μέσο χρόνο τοκισμού ως προς το μέσο επιτόκιο όλου του κεφαλαίου στην τελευταία αυτή τράπεζα. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε

$$t = \frac{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5}{4.500} \simeq 3.66$$

Δηλαδή, αν τοκίσω για 3.66 χρόνια όλο το ποσό στην ίδια τράπεζα με επιτόκιο 4% θα έχω το ίδιο αποτέλεσμα με το αν τόκιζα επιμέρους ποσά σε διαφορετικές τράπεζες και για διαφορετικούς χρόνους. Σημειώστε ότι λόγω της αποκοπής δεκαδικών ψηφίων μια επαλήθευση δεν θα δώσει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **24** *Έστω ότι έχουμε στην διάθεση μας το ποσό των 3.000 Ευρώ το οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε σε τράπεζα. Παίρνουμε προσφορά από δυο τράπεζες και έχουμε τα εξής: Η τράπεζα T_1 μας δίνει ετήσιο επιτόκιο 4% αλλά τα χρήματα πρέπει να παραμείνουν εκεί για τουλάχιστον δυο έτη. Η τράπεζα T_2 μας δίνει επιτόκιο 2% αλλά δεν έχουμε χρονικό περιορισμό στο πότε μπορούμε να εκταμιεύσουμε τα χρήματά μας. Επειδή θα χρειαστούμε τα 1.000 Ευρώ σε ακριβώς ένα έτος δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε όλα τα χρήματα στην ίδια τράπεζα η οποία προφανώς θα ήταν η τράπεζα T_1.*

Σε αυτή την περίπτωση θα τοποθετήσουμε τα 1.000 Ευρώ στην τράπεζα T_2 και τα 2.000 Ευρώ στην τράπεζα T_1. Θα υπολογίσουμε τις τελικές αξίες των κεφαλαίων.

Το κεφάλαιο $K_1 = 2.000$ θα έχει τελική αξία μετά από δυο χρόνια ίση με

$$2.000 \cdot (1 + 2 \cdot 0.04) = 2.160$$

Από την άλλη μεριά το κεφάλαιο $K_2 = 1.000$ θα έχει τελική αξία μετά από έναν χρόνο ίση με

$$1.000 \cdot (1 + 1 \cdot 0.02) = 1020$$

Το συνολικό κεφάλαιο μετά από 2 χρόνια θα είναι 3.180 Ευρώ. Αν τα τοποθετούσαμε στην τράπεζα T_2 πόσα χρόνια θα έπρεπε να τα αφήσουμε για να έχουν την ίδια απόδοση; Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του απλού τόκου και θα έχουμε

$$3.180 = 3.000 \cdot (1 + n \cdot 0.02)$$

Λύνοντας ως προς n προκύπτει ότι θα έπρεπε να αφήσουμε στην τράπεζα T_2 όλο το κεφάλαιο για 3 χρόνια.

Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο στην περίπτωση που τοποθετήσαμε το αρχικό κεφάλαιο σε δυο τράπεζες; Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

$$i = \frac{1.000 \cdot 1 \cdot 0.02 + 2.000 \cdot 2 \cdot 0.04}{1.000 \cdot 1 + 2.000 \cdot 2} = 0.036$$

Το μέσο επιτόκιο λοιπόν είναι 3.6% Παρατηρούμε ότι είναι αρκετά κοντά στο 4% (που είναι το επιτόκιο της τράπεζας T_1) διότι εκεί έχουμε τοποθετήσει μεγαλύτερο μέρος του αρχικού ποσού.

Τέλος, ο μέσος χρόνος τοκισμού είναι

$$t = \frac{1.000 \cdot 1 + 2.000 \cdot 2}{3.000} = \frac{5}{3}$$

Ο μέσος χρόνος τοκισμού $t = \frac{5}{3}$ *και το μέσο επιτόκιο* $i = 0.036$ *έχουν την εξής σημασία εδώ. Αν τοποθετούσα όλο το ποσό σε μια τράπεζα με επιτόκιο* $i = 0.036$ *και για χρόνο* $t = \frac{5}{3}$ *θα είχα στο τέλος του χρόνου αυτού την ίδια απόδοση που είχα και με την αρχική μορφή της επένδυσης. Πράγματι,*

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \cdot 0.036\right) = 3.180$$

□

7.2 Τοκάριθμος και Σταθερός Διαιρέτης

ΟΡΙΣΜΟΣ 25 *Τοκάριθμος θα ονομάζεται το γινόμενο Kt όπου K είναι το κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i και t είναι ο χρόνος τοκισμού και θα συμβολίζεται με N. Το πηλίκο $\frac{360}{i}$ καλείται* ***σταθερός διαιρέτης*** *και συμβολίζεται με Δ.*

'ρα, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι i και τοκίζουμε το ποσό K για t ημέρες τότε ο τόκος I θα είναι

$$I = K\frac{t}{360}i = \frac{N}{\Delta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26 *Έστω ότι τοκίζουμε για 30 ημέρες το ποσό των 125 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 3.5%. Να βρεθούν τα μεγέθη I, N, Δ και η τελική αξία του κεφαλαίου.*

Απάντηση. Εδώ $K = 125, i = 0.035, t = 30$. Επομένως, $N = Kt = 125 * 30 = 3.750$ και $\Delta = \frac{360}{0.035} = 10285.714$. 'ρα ο τόκος I θα είναι $I = \frac{N}{\Delta} = 0.364$ και επομένως το τελικό ποσό θα είναι $K + I = 125 + 0.364 = 125.364$. □

Προεξόφληση Τίτλων

Υποθέτουμε ότι ο Α δανείζει στον Β ένα χρηματικό ποσό. Προκειμένου να εξασφαλιστεί ο Α ότι θα εισπράξει το ποσό αυτό (με κάποιο τόκο ίσως) υποχρεώνει τον Β να υπογράψει μια δήλωση της οφειλής του. Μια τέτοια δήλωση ονομάζεται γενικά **τίτλος** και συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται οι όροι **γραμμάτια** ή **συναλλαγματικές**.

Θα λέμε **ονομαστική αξία** το ποσό που αναγράφεται στον τίτλο και το οποίο ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στο δανειστή ενώ **λήξη** ονομάζουμε την ημέρα εξόφλησης του τίτλου.

Ο δανειστής λαμβάνει στα χέρια του τον τίτλο ονομαστικής αξίας K τον οποίο μπορεί να δώσει πριν τη λήξη του σε μια τράπεζα και να λάβει ένα ποσό $K^{'}$ το οποίο εν γένει είναι μικρότερο του K. Η τράπεζα βέβαια στη συνέχεια, μπορεί να κάνει το ίδιο ή να περιμένει μέχρι τη λήξη του τίτλου για να λάβει το ποσό που αναγράφεται στον τίτλο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **προεξόφληση του τίτλου**. Είναι προφανές ότι η τράπεζα στην ουσία δανείζει τα χρήματα αυτά στον (αρχικό) δανειστή και επομένως το ποσό που θα του καταβληθεί θα είναι μικρότερο της ονομαστικής αξίας του τίτλου διότι θα έχει παρακρατηθεί και ο αντίστοιχος τόκος από την τράπεζα.

Θα ονομάζουμε **χρόνο προεξόφλησης** του τίτλου το χρονικό διάστημα από την ημέρα προεξόφλησης του τίτλου μέχρι την ημέρα της λήξης του. **Επιτόκιο προεξόφλησης** του τίτλου θα λέμε το επιτόκιο με το οποίο η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο για τα χρήματα που δίνει για τον τίτλο και το ποσό που παρακρατεί ονομάζεται προεξόφλημα. Πραγματική ή παρούσα αξία του τίτλου ονομάζεται το ποσό που δίνει η τράπεζα στον κάτοχο του τίτλου.

Το προεξόφλημα είναι ο τόκος που υπολογίζεται σε κάποιο κεφάλαιο. Αν το κεφάλαιο αυτό (από όπου προκύπτει το προεξόφλημα) είναι η ονομαστική αξία του τίτλου τότε μιλάμε για **εξωτερική προεξόφληση** ενώ αν ο τόκος αναφέρεται στην πραγματική (παρούσα) αξία του τίτλου θα μιλάμε για **εσωτερική προεξόφληση**. Συνήθως, όταν λέμε προεξόφλημα εννοούμε εξωτερικό προεξόφλημα.

Ένας σημαντικός λόγος για τον οποίο ο κάτοχος ενός τίτλου αποφασίζει να προεξοφλήσει τον τίτλο αυτό σε μια τράπεζα είναι για να εισπράξει με σιγουριά ένα ποσό. Κατά το χρόνο λήξης του τίτλου υπάρχει η πιθανότητα αδυναμίας του οφειλέτη να πληρώσει το αντίστοιχο ποσό πράγμα το οποίο θα οδηγήσει σε δικαστική διαμάχη μεταξύ των δυο μερών. Αντίθετα, αν ο τίτλος προεξοφληθεί στην τράπεζα ο κάτοχος του τίτλου θα εισπράξει ένα ποσό και επιπλέον η όποια δικαστική διαμάχη θα μεταφερθεί μεταξύ τραπέζης και οφειλέτη. Ο κάτοχος ενός τίτλου, για τον παραπάνω λόγο, συνήθως αποφασίζει να προεξοφλήσει τον τίτλο σε μια τράπεζα πολύ κοντά στον χρόνο λήξης του τίτλου. Με αυτό τον τρόπο το ποσό που θα εισπράξει θα είναι πολύ κοντά στην ονομαστική αξία του τίτλου.

Ένας άλλος επίσης σημαντικός λόγος προεξόφλησης είναι ότι ο κάτοχος του τίτλου μπορεί να χρειάζεται επειγόντως ένα ποσό χρημάτων σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

8 Εσωτερική και Εξωτερική Προεξόφληση

Θέλουμε να υπολογίσουμε το προεξόφλημα και την πραγματική αξία ενός τίτλου όταν γνωρίζουμε την ονομαστική αξία K, το χρόνο προεξόφλησης t και το επιτόκιο προεξόφλησης πάνω στο χρόνο t υποθέτοντας απλό τοκισμό.

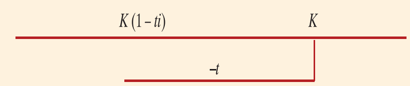
Γενικά, υπάρχουν δυο διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού του προεξοφλήματος. Είναι η εσωτερική προεξόφληση και η εξωτερική.

• Εξωτερική Προεξόφληση.

Σε αυτή την περίπτωση το προεξόφλημα είναι ο τόκος που αναφέρεται στην ονομαστική αξία του τίτλου και επομένως έχουμε

$$E = Kti \quad (\text{προεξόφλημα εξωτερικής προεξόφλησης})$$

όπου E είναι το προεξόφλημα, i το επιτόκιο προεξόφλησης και t ο χρόνος προεξόφλησης.



Σχήμα 3: Εξωτερική Προεξόφληση

Ας εξηγήσουμε πως προέκυψε αυτή η ισότητα που μας δίνει το εξωτερικό προεξόφλημα. Αν μια τράπεζα μας δανείσει το ποσό K για χρόνο t με επιτόκιο i τότε ο τόκος θα είναι Kti. Όταν η τράπεζα προεξοφλεί εξωτερικά έναν τίτλο στην ουσία δανείζει αυτά τα χρήματα στον κάτοχο του τίτλου αλλά για αρνητικό χρόνο, δηλαδή $-t$. Έτσι η τελική αξία (δηλαδή η πραγματική αξία στην προκειμένη περίπτωση) είναι η $K_{-t} = K(1 - ti)$ και είναι μικρότερη της αρχικής λόγω του αρνητικού χρόνου. Το προεξόφλημα είναι ο τόκος για το δανεισμό αυτό και είναι η διαφορά της αρχικής αξίας μείον την τελική αξία (πραγματική αξία εδώ), δηλαδή

$$E = K - K_{-t} = Kti$$

• Εσωτερική Προεξόφληση.

Για την περίπτωση της εσωτερικής προεξόφλησης σκεφτόμαστε ως εξής. Η τράπεζα προεξοφλώντας εσωτερικά έναν τίτλο δίνει το ποσό Π το οποίο αν τοκιστεί με επιτόκιο i και για χρόνο t να δίνει ως τελικό ποσό την ονομαστική αξία του τίτλου. Δηλαδή

$$\Pi(1+ti) = K$$

από το οποίο προκύπτει ότι η πραγματική αξία του τίτλου (με εσωτερική προεξόφληση) θα είναι

$$\Pi = \frac{K}{1+ti}$$

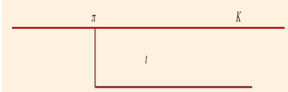
Επιπλέον, το προεξόφλημα θα είναι η διαφορά της πραγματικής αξίας από την ονομαστική, δηλαδή

$$E = K - \Pi$$

οπότε

$$\boxed{E = \frac{Kti}{1+ti} \qquad \text{(προεξόφλημα εσωτερικής προεξόφλησης)}}$$

Παρατηρούμε ότι το προεξόφλημα στην περίπτωση της εσωτερικής προεξόφλησης είναι μικρότερο από ότι στην εξωτερική προεξόφληση.



Σχήμα 4: Εσωτερική Προεξόφληση

Άσκηση 27 *Ένα γραμμάτιο με ονομαστική αξία 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά 4 μήνες πριν από τη λήξη του. Πόσο είναι το προεξόφλημα και ποια η πραγματική αξία του γραμματίου όταν η προεξόφληση υπολογίζεται με ετήσιο επιτόκιο* 12%;

Απάντηση. Εδώ μας δίνεται η ονομαστική αξία $K = 10.000$, το επιτόκιο $i = 0.12$ και ο χρόνος προεξόφλησης που είναι $t = 4/12$. Επομένως, $E = Kti = 10.000 \cdot 4/12 \cdot 0.12 = 400$ Ευρώ. □

Άσκηση 28 *Ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά 120 ημέρες πριν από τη λήξη του και δίνει πραγματική αξία 9.500 Ευρώ. Να βρεθεί το προεξόφλημα καθώς και το επιτόκιο προεξόφλησης.*

Απάντηση. Εδώ μας δίνονται τα $K = 10.000$, $K' = 9.500$ και ο χρόνος προεξόφλησης $t = \frac{120}{360}$. Το προεξόφλημα (σύμφωνα με τον ορισμό) είναι $E = K - K' = 500$. Για να υπολογίσουμε το επιτόκιο προεξόφλησης θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$E = Kti = 10.000 \cdot \frac{120}{360} \cdot i$$

Λύνοντας ως προς i και αντικαθιστώντας το E βρίσκουμε ότι $i = 0.15$. □

ΑΣΚΗΣΗ 29 *Ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά και δίνει πραγματική αξία 9.800 Ευρώ. Αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10% πόσο χρόνο πριν την λήξη του γραμματίου προεξοφλήθηκε;*

ΛΥΣΗ. Μας δίνονται τα $K^{'} = 9.800$, $K = 10.000$ και $i = 0.1$ και μας ζητείται το t. Εφαρμόζοντας τον τύπο $E = Kti$ όπου $E = K - K^{'} = 200$ και λύνοντας ως προς t προκύπτει ότι $t = 0.2$ χρόνια. □

ΑΣΚΗΣΗ 30 *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εσωτερικά 100 ημέρες πριν τη λήξη του. Το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%. Ποιο είναι το προεξόφλημα;*

ΛΥΣΗ. Επειδή η προεξόφληση είναι εσωτερική θα εφαρμόσουμε τον τύπο εσωτερικής προεξόφλησης. 'ρα

$$E = \frac{Kti}{1+ti} = \frac{10.000 \cdot \frac{100}{360} \cdot 0.1}{1 + \frac{100}{360} \cdot 0.1} \backsimeq 270.27$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 31 *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εσωτερικά πριν την λήξη του. Αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 15% και το προεξόφλημα είναι 250 Ευρώ πόσες μέρες πριν την λήξη του γραμματίου προεξοφλήθηκε;*

ΛΥΣΗ. Λόγω της εσωτερικής προεξόφλησης θα εφαρμόσουμε τον τύπο

$$E = \frac{Kti}{1+ti}$$

Λύνοντας ως προς το t προκύπτει ότι

$$t = \frac{E}{(K-E)i}$$

'ρα

$$t = \frac{250}{9.750 \cdot 0.15} \backsimeq 0.17 \text{ χρόνια}$$

□

9 Ισοδυναμία Τίτλων

Συχνά, μια σειρά τίτλων (π.χ. γραμμάτια) $g_1, \cdots, g_n$ χρειάζεται να αντικατασταθούν από νέους τίτλους $g_1^*, \cdots, g_m^*$ οικονομικά ισοδύναμους με τους παλαιούς την ημέρα της αντικατάστασης. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν ο οφειλέτης θέλει να αντικαταστήσει δυο τίτλους με έναν με διαφορετική ημερομηνία λήξης η οποία τον βολεύει καλύτερα για την εξόφλησή του.

Για να υπάρχει οικονομική ισοδυναμία θα πρέπει το άθροισμα των πραγματικών αξιών (δηλαδή των αξιών κατά την ημέρα της αντικατάστασης) των παλαιών τίτλων να είναι ίσο με το άθροισμα των πραγματικών αξιών των νέων τίτλων, δηλαδή

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = K_1^* + K_2^* + \cdots + K_m^*$$

όπου K_i είναι η πραγματική αξία του παλαιού τίτλου ενώ K_i^* η πραγματική αξία του νέου τίτλου και οι δυο υπολογισμένες την ημέρα της αντικατάστασης.

Θα υποθέσουμε ότι οι παλαιοί τίτλοι $g_1, \cdots, g_n$ έχουν ονομαστικές αξίες $K_1^0, \cdots, K_n^0$ και λήγουν σε $t_1, \cdots, t_n$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης (ή αλλιώς **εποχή ισοδυναμίας**) ενώ οι νέοι τίτλοι έχουν ονομαστικές αξίες $K_1^{*0}, \cdots, K_m^{*0}$ και λήγουν σε $t_1^*, \cdots, t_m^*$ χρονικές μονάδες από την εποχή ισοδυναμίας. Δηλαδή, όσα χρήματα θα έπαιρνε ο Α (που έχει δανείσει στον Β) αν προεξοφλούσε τα γραμμάτια (σε μια τράπεζα με επιτόκιο προεξόφλησης i) την ημέρα της αντικατάστασης θα πρέπει να πάρει αν προεξοφλήσει τα νέα γραμμάτια την ίδια ημέρα (ημέρα αντικατάστασης).

Όταν όλοι οι τίτλοι λήγουν μετά την εποχή ισοδυναμίας οι πραγματικές αξίες με εξωτερική προεξόφληση είναι ως εξής

$$\begin{aligned} K_j &= K_j^0(1 - t_j i), \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ K_j^* &= K_j^{*0}(1 - t_j^* i), \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

Ενώ με εσωτερική προεξόφληση θα ισχύει

$$\begin{aligned} K_j &= \frac{K_j}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ K_j^* &= \frac{K_j^{*0}}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

9.1 Αντικατάσταση Τίτλων με Εξωτερική Προεξόφληση

Την ημέρα της αντικατάστασης των τίτλων θα πρέπει όπως ήδη είπαμε να ισχύει η σχέση

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^0(1 - t_j i) = \sum_{j=1}^{m} K_j^{*0}(1 - t_j^* i) \tag{4}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 32 *Έστω ότι έχουμε τρία γραμμάτια*

g_1 : *Ονομαστική αξία* 4.000
ημερομηνία λήξης 28/05

g_2 : *Ονομαστική αξία* 5.000
ημερομηνία λήξης 7/06

g_3 : *Ονομαστική αξία* 6.000
ημερομηνία λήξης 14/07

και έστω ότι ο οφειλέτης θέλει να τα αντικαταστήσει στις 24/5 *με δυο άλλα γραμμάτια έτσι ώστε να είναι*

g_1^* : *Ονομαστική αξία* 8.000
ημερομηνία λήξης 16/06

g_2^* : *Ονομαστική αξία* X;
ημερομηνία λήξης 25/08

Το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης είναι $i = 18\%$. Πρέπει να υπολογίσουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ισοδυναμίας (δες 4) που πρέπει να ικανοποιείται την ημέρα της αντικατάστασης, οπότε

$$\begin{aligned} & 4.000 \cdot \left(1 - \frac{4}{360} \cdot 0.18\right) + 5.000 \cdot \left(1 - \frac{13}{360} \cdot 0.18\right) \\ & +6.000 \cdot \left(1 - \frac{50}{360} \cdot 0.18\right) \\ = \; & 8.000 \cdot \left(1 - \frac{22}{360} \cdot 0.18\right) + X \cdot \left(1 - \frac{91}{360} \cdot 0.18\right) \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς X και παίρνουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου η οποία είναι $X \simeq 7.232,423$. □

9.1.1 Αντικατάσταση τίτλων με έναν

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε τους τίτλους $g_1, \cdots, g_n$ με έναν τίτλο g^* τότε η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^0(1 - t_j i) = K^{*0}(1 - t^* i)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση ο τίτλος g^* ονομάζεται **ενιαίος τίτλος** των $g_1, \cdots, g_n$ ενώ η ονομαστική αξία K^{*0} ονομάζεται **ενιαίο κεφάλαιο** και η ημέρα λήξης του τίτλου g^* ονομάζεται **κοινή λήξη**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33 *Έστω ότι έχουμε τα τρία γραμμάτια όπως πριν*

g_1 : *Ονομαστική αξία* 4.000
ημερομηνία λήξης 28/05

g_2 : *Ονομαστική αξία* 5.000
ημερομηνία λήξης 7/06

g_3 : *Ονομαστική αξία* 6.000
ημερομηνία λήξης 14/07

και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 24/5 *με ένα το οποίο να λήγει στις* 25/08. *Το επιτόκιο προεξόφλησης θεωρούμε ότι* *είναι $i = 18\%$. Ποιο το ενιαίο κεφάλαιο; Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε*

$$
\begin{aligned}
& 4.000 \cdot \left(1 - \frac{5}{360} \cdot 0.18\right) + 5.000 \cdot \left(1 - \frac{15}{360} \cdot 0.18\right) \\
& +6.000 \cdot \left(1 - \frac{52}{360} \cdot 0.18\right) \\
= \;& X \cdot \left(1 - \frac{94}{360} \cdot 0.18\right)
\end{aligned}
$$

Λύνοντας ως προς X παίρνουμε το αποτέλεσμα το οποίο είναι $X \backsimeq 15.526, 232.$ □

9.2 Αντικατάσταση Τίτλων με Εσωτερική Προεξόφληση

Όπως έχουμε αναφέρει οι πραγματικές αξίες με εσωτερική προεξόφληση είναι

$$
\begin{aligned}
K_j &= \frac{K_j}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\
K_j^* &= \frac{K_j^{*0}}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{1 + t_j i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{K_j^{*0}}{1 + t_j i} \tag{5}
$$

προκειμένου να έχουμε οικονομική ισοδυναμία.

Στην συνέχεια θα δούμε το ίδιο παράδειγμα με την περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης με την διαφορά ότι οι υπολογισμοί τώρα θα γίνουν υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34 *Έστω ότι έχουμε τρία γραμμάτια*

g_1 : *Ονομαστική αξία* 4.000
ημερομηνία λήξης 28/05

g_2 : *Ονομαστική αξία* 5.000
ημερομηνία λήξης 7/06

g_3 : *Ονομαστική αξία* 6.000
ημερομηνία λήξης 14/07

και έστω ότι ο οφειλέτης θέλει να τα αντικαταστήσει στις 24/5 *με δυο άλλα γραμμάτια έτσι ώστε να είναι*

g_1^* : *Ονομαστική αξία* 8.000
ημερομηνία λήξης 16/06

g_2^* : *Ονομαστική αξία* X;
ημερομηνία λήξης 25/08

Το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης είναι $i = 18\%$. *Πρέπει να υπολογίσουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου.*

Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ισοδυναμίας (δες 5) που πρέπει να ικανοποιείται την ημέρα της αντικατάστασης, οπότε

$$\begin{aligned} & \frac{4.000}{1+\frac{5}{360}\cdot 0.18}+\frac{5.000}{1+\frac{15}{360}\cdot 0.18} \\ & +\frac{6.000}{1+\frac{52}{360}\cdot 0.18} \\ = \;& \frac{8.000}{1+\frac{24}{360}\cdot 0.18}+\frac{X}{1+\frac{94}{360}\cdot 0.18} \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς X και παίρνουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου η οποία είναι $X \simeq 7.219,713$. □

Συγκρίνοντας τα παραδείγματα 32 και 34 διαπιστώνουμε ότι η αξία του δεύτερου γραμματίου είναι μικρότερη όταν υποθέσουμε εσωτερική προεξόφληση σε σύγκριση με την εξωτερική. Λόγω του ότι τα επιτόκια είναι ίσα αυτό το συμπέρασμα είναι λογικό όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο όπου εξετάζουμε παρόμοια ερωτήματα.

Εντελώς παρόμοια με την εξωτερική προεξόφληση έχουμε την επόμενη παράγραφο.

9.2.1 Αντικατάσταση τίτλων με έναν

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε τους τίτλους $g_1, \cdots, g_n$ με έναν τίτλο g^* τότε η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται, υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{K_j^0}{1+t_j i} = \frac{K^{*0}}{1+t^* i}$$

Θα μελετήσουμε στην συνέχεια το ίδιο παράδειγμα με την εξωτερική προεξόφληση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 35 *Έστω ότι έχουμε τα τρία γραμμάτια όπως πριν*

g_1 : *Ονομαστική αξία* 4.000
ημερομηνία λήξης 28/05

g_2 : *Ονομαστική αξία* 5.000
ημερομηνία λήξης 7/06

g_3 : *Ονομαστική αξία* 6.000
ημερομηνία λήξης 14/07

και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις $24/5$ *με ένα το οποίο να λήγει στις* $25/08$. *Το επιτόκιο προεξόφλησης θεωρούμε ότι είναι* $i = 18\%$. *Ποιο το ενιαίο κεφάλαιο; Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε*

$$\begin{aligned} & \frac{4.000}{1+\frac{5}{360}\cdot 0.18}+\frac{5.000}{1+\frac{15}{360}\cdot 0.18}+\frac{6.000}{1+\frac{52}{360}\cdot 0.18} \\ = \ & \frac{X}{1+\frac{94}{360}\cdot 0.18} \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς X *παίρνουμε το αποτέλεσμα το οποίο είναι* $X \backsimeq 15.496, 392$. *Διαπιστώνουμε πάλι ότι η αξία του γραμματίου είναι μικρότερη υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση.* $\square$

9.3 Ισοδυναμία Εσωτερικής - Εξωτερικής Προεξόφλησης

Όπως παρατηρήσαμε το προεξόφλημα είναι μεγαλύτερο στην εξωτερική προεξόφληση. Συνεπώς προκύπτει το ερώτημα: Αν η τράπεζα T_1 προεξοφλεί εξωτερικά με επιτόκιο i_1 και η τράπεζα T_2 προεξοφλεί εσωτερικά με επιτόκιο i_2 τότε ποια είναι η καλύτερη επιλογή τράπεζας για εξόφληση τίτλων; Προφανώς θα εξετάσουμε τα προεξοφλήματα των δυο τραπεζών και θα διαλέξουμε εκείνη με το μικρότερο προεξόφλημα. Για να έχει νόημα μια τέτοια μελέτη θα υποθέσουμε ότι το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης είναι μεγαλύτερο από εκείνο της εξωτερικής (δες ανισότητα 7 παρακάτω) αλλιώς είναι πάντοτε προτιμότερη η τράπεζα που προεξοφλεί εσωτερικά.

Τα προεξοφλήματα θα είναι ως εξής

$$\begin{aligned} E^1_{\text{εξωτ.}} &= Kti_1 \quad (\text{εξωτερικό προεξόφλημα}) \\ E^2_{\text{εσωτ.}} &= \frac{Kti_2}{1+ti_2} \quad (\text{εσωτερικό προεξόφλημα}) \end{aligned} \tag{6}$$

'ρα προκύπτει μια σχέση μεταξύ των επιτοκίων όταν απαιτήσουμε τα προεξοφλήματα να είναι ίσα. Συνεπώς προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 36 *Θα λέμε ότι το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης i_1 είναι ισοδύναμο με το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης i_2 για τον χρόνο t όταν*

$$i_1 = \frac{i_2}{1 + t i_2}$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε εύκολα ότι όταν έχουμε εξωτερική προεξόφληση με επιτόκιο $i_1^{\text{εξωτ.}}$ και εσωτερική προεξόφληση με επιτόκιο $i_2^{\text{εσωτ.}}$ τέτοια ώστε

$$i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}} \tag{7}$$

υπάρχει συγκεκριμένος χρόνος t^* κατά τον οποίο τα προεξοφλήματα ταυτίζονται. Πράγματι, εξισώνοντας τα προεξοφλήματα (δες 6) προκύπτει ότι ο χρόνος αυτός είναι ο

$$t^* = \frac{i_2^{\text{εσωτ.}} - i_1^{\text{εξωτ.}}}{i_2^{\text{εσωτ.}} \cdot i_1^{\text{εξωτ.}}} \quad (\text{ισοδύναμος χρόνος προεξόφλησης})$$

Παρατηρούμε ότι τα προεξοφλήματα συμπίπτουν κατά τον ισοδύναμο χρόνο προεξόφλησης. Κάτω από την υπόθεση 7 προκύπτει ότι για χρόνο $t < t^*$ το εσωτερικό προεξόφλημα υπερτερεί του εξωτερικού προεξοφλήματος επομένως για $t < t^*$ συμφέρει να προεξοφλήσουμε εξωτερικά. Για $t > t^*$, αντίστοιχα, διαπιστώνουμε ότι μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε εσωτερικά.

’ρα, αν έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ δυο τραπεζών (με διαφορετικό τρόπο προεξόφλησης) για να προεξοφλήσουμε ένα τίτλο θα σκεφτούμε ως εξής:

Επιλογή Τρόπου Προεξόφλησης

(i) Ελέγχουμε αν ισχύει $i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}}$.

(ii) Αν ισχύει η παραπάνω σχέση τότε μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_1^{\text{εξωτ.}}$ κατά τον χρόνο $t < t^*$ ενώ μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_2^{\text{εσωτ.}}$ για χρόνο $t > t^*$.

(iii) Στην περίπτωση που δεν ισχύει η παραπάνω ανισότητα τότε μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_2^{\text{εσωτ.}}$, αυτή δηλαδή που εφαρμόζει εσωτερική προεξόφληση, ανεξαρτήτως του χρόνου προεξοφλήσεως.

Σε αυτό το σημείο δείτε και τα παραδείγματα στις παραγράφους αντικατάστασης τίτλων. Βλέπουμε ότι κάθε φορά είναι προτιμότερο να γίνει υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση και αυτό διότι τα επιτόκια είναι τα ίδια, δηλαδή δεν ισχύει η ανισότητα $i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 37 *Έστω ότι θέλουμε να προεξοφλήσουμε νωρίτερα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας K Ευρώ και να λάβουμε το ποσό qK, με $q \in (0,1)$, δηλαδή κλάσμα της ονομαστικής αξίας. Πόσο χρόνο πριν την λήξη του γραμματίου πρέπει να το* *προεξοφλήσουμε όταν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%;*

Θα μελετήσουμε το ερώτημα αυτό υποθέτοντας και εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση.

· ***Εξωτερική Προεξόφληση.***

Το προεξόφλημα θα είναι $E = K - K_{παρούσα} = K - qK = K(1-q)$ *και επίσης θα ισχύει ότι*

$$E = Kti$$

’ρα, πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$K(1-q) = Kti$$

Λύνοντας ως προς t *προκύπτει ότι*

$$t = \frac{1-q}{i} = \frac{1-q}{0.1} = 10 - 10 \cdot q$$

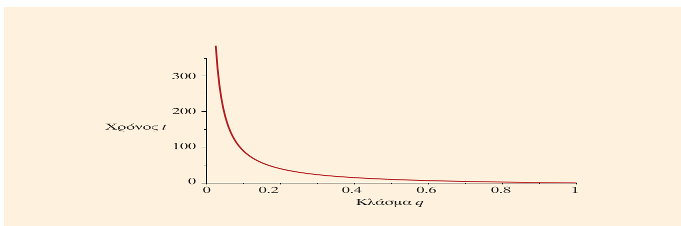
Σχήμα 5: Χρόνος πριν τη λήξη του γραμματίου ως προς $q \in (0,1)$ με εξωτερική προεξόφληση

· *Εσωτερική Προεξόφληση.*

Το προεξόφλημα θα είναι πάλι $E = K(1-q)$ *και θα πρέπει τώρα να ισχύει ότι*

$$K(1-q) = \frac{Kti}{1+ti}$$

Λύνοντας ως προς t *προκύπτει ότι* $t = \frac{1-q}{0.1 \cdot q}$.



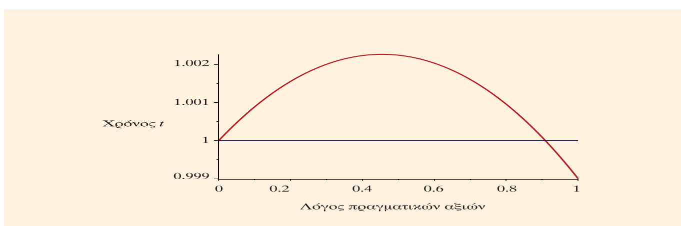
Σχήμα 6: Χρόνος πριν τη λήξη του γραμματίου ως προς $q \in (0,1)$ με εσωτερική προεξόφληση

Αν θέλουμε συγκεκριμένα να λάβουμε το 98% της ονομαστικής αξίας του γραμματίου θα πρέπει να το προεξοφλήσουμε $t = 0.2$ *χρόνια ή αλλιώς 72 ημέρες πριν την λήξη του με εξωτερική προεξόφληση ενώ με εσωτερική θα είναι* $t = 0.204$ *χρόνια ή αλλιώς περίπου 73 ημέρες πριν. Διαπιστώνουμε ότι για να πάρουμε το ίδιο ποσό μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε εσωτερικά μιας και θα το έχουμε στα χέρια μας νωρίτερα. Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο της ονομαστικής αξίας.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 38 *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την επιλογή να προεξοφλήσουμε γραμμάτιο ονομαστικής αξίας K Ευρώ σε δυο τράπεζες. Η τράπεζα T_1 εφαρμόζει επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης $i_1 = 10\%$ και η τράπεζα T_2 επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης $i_2 = 11\%$. Σε ποια τράπεζα συμφέρει να προεξοφλήσουμε το γραμμάτιο;*

Τα χρήματα που θα λάβουμε θα είναι $K - E$ όπου E είναι το προεξόφλημα. Το προεξόφλημα στην περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης είναι $E = Kti_1$ ενώ στην εσωτερική προεξόφληση είναι $E = \frac{Kti_2}{1+ti_2}$. ’ρα το ποσό που θα λάβουμε στην εξωτερική προεξόφληση θα είναι $K(1 - ti_1)$ ενώ στην εξωτερική θα είναι $\frac{K}{1+ti_2}$.

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τον λόγο $\frac{K(1-ti_1)}{\frac{K}{1+ti_2}} = (1 - ti_1)(1 + ti_2)$ ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 7: Λόγος πραγματικών αξιών (εξωτερικής δια εσωτερικής προεξόφλησης) ως προς τον χρόνο t

Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα T_1 όταν αποφασίσουμε να το κάνουμε σε *λιγότερες από 327 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου (σημειώστε ότι ο ισοδύναμος χρόνος προεξόφλησης είναι περίπου 327 ημέρες) αλλιώς συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα* T_2 *όταν αποφασίσουμε να το κάνουμε σε περισσότερες από 327 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου.*

10 Τύπος Ανατοκισμού

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω το λεγόμενο ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$ που συμβολίζεται με $[x]$. Το ακέραιο μέρος ενός αριθμού είναι ο αμέσως προηγούμενος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος του x και επομένως ισχύει η ανισότητα

$$[x] \leq x \leq [x] + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή το ακέραιο μέρος του 4.6 είναι το 4 ενώ το ακέραιο μέρος του -5.7 είναι το -6.

Έστω κεφάλαιο K τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i. Αν ο τόκος κεφαλαιοποιείται ανά τρεις μήνες τότε μετά την πάροδο των τριών μηνών η αξία του κεφαλαίου θα είναι

$$K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)$$

Εδώ είναι χρήσιμη η έννοια του ονομαστικού επιτοκίου τριμήνου, δηλαδή $i^{'} = \frac{i}{4}$.

Στη συνέχεια το ποσό K_1 είναι το κεφάλαιο το οποίο τοκίζεται με ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου πάλι $i^{'}$ και ούτω κάθε εξής. Δηλαδή, $K_1 = K \cdot (1 + i^{'})$ ενώ στο δεύτερο τρίμηνο το αρχικό κεφάλαιο θα έχει γίνει $K_2 = K_1 \cdot (1 + i^{'}) = K \cdot (1 + i^{'})^2$ και γενικότερα έπειτα από n τρίμηνα το κεφάλαιο θα έχει γίνει

$$K_n = K(1 + i^{'})^n \quad \text{(τύπος ανατοκισμού)} \tag{8}$$

όπου $i^{'}$ είναι το ονομαστικό επιτόκιο της υπο-περιόδου κατά την οποία κεφαλαιοποιούνται οι τόκοι.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $(1 + i)^n > 1 + n \cdot i$ με $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli (δες πρόταση ;; για την απόδειξη). Συνεπώς όπως και διαισθητικά περιμέναμε η σύνθετη κεφαλαιοποίηση αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος από την απλή κεφαλαιοποίηση.

Γενικότερα, αν τοκίσουμε 1 Ευρώ για N ημέρες με επιτόκιο i_1 που αναφέρεται σε χρονική περίοδο t_1 ημερών (π.χ. 2% κάθε 30 ημέρες) τότε το ποσό μετά τις N ημέρες θα είναι

$$(1+i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right) \tag{9}$$

(γενικευμένος τύπος ανατοκισμού)

Δηλαδή ανάμεσα στα πολλαπλάσια της χρονικής περιόδου t_1 υποθέτουμε ότι έχουμε απλή κεφαλαιοποίηση (μικτός τόκος), για αυτό το λόγο προκύπτει ο όρος $\left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$.

Άσκηση 39 *Έστω $x \in [0,1]$ και $a \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι*

$$(1 + x \cdot a) \geq (1+a)^x$$

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + xa - (1+a)^x$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι ίση με $f^{'}(x) = a - (1 + a)^x \ln(1+a)$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο

$$x^* = \frac{\ln a - \ln\ln(1+a)}{\ln(1+a)}$$

το οποίο είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και μάλιστα ισχύει $x^* \in [0,1]$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί θεωρώντας τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x - \ln\ln(1+x) \\ h(x) &= (1+x)\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

και αποδεικνύοντας ότι $g(x), h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f^{''}(x) = -(1+a)^x \ln^2(1+a)$ η οποία είναι πάντοτε αρνητική επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x^*. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ τότε αναγκαστικά $f(x^*) \geq f(0) = 0$ και αφού δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,1)$ προκύπτει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ **40** *Ο όρος*

$$\frac{N}{t_1} - \left[\frac{N}{t_1}\right]$$

βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $[0, 1]$ *και εφόσον το επιτόκιο* $i_1 \in [0, 1]$ *τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση ισχύει ότι*

$$\left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - \left[\frac{N}{t_1}\right]\right) \cdot i_1\right) \geq (1 + i_1)^{\left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right)}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$(1 + i_1)^{\frac{N}{t_1}} \leq (1 + i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$$

Σε παλαιότερες εποχές όπου δεν υπήρχαν υπολογιστές, αντί του γενικευμένου τύπου του ανατοκισμού εφάρμοζαν το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας ως μια προσέγγιση της πραγματικής τιμής ταυτόχρονα με την χρήση πινάκων (τιμές του λογαρίθμου κ.τ.λ.) Σε μικρά ποσά η διαφορά είναι μικρή αλλά σε μεγάλα ποσά η διαφορά μεγαλώνει. Επίσης έχει επίπτωση σε όλους τους υπολογισμούς παρακάτω (ράντες κ.τ.λ.) στους οποίους εμφανίζεται η χρήση του γενικευμένου τύπου ανατοκισμού. Σε αυτό το βιβλίο δεν θα κάνουμε τέτοιου είδους προσεγγίσεις και απλουστεύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **41** *Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 4 έτη με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο θα είναι το τελικό κεφάλαιο μετά το τέταρτο έτος;*

Απάντηση. Εδώ έχουμε $K = 1.500$, $n = 4$, $i = 0.03$ και οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται στο τέλος κάθε έτους. Επομένως το τελικό κεφάλαιο θα είναι $K_4 = K \cdot (1+i)^4 = 1.500 \cdot (1+0.03)^4$.
□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **42** *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και πέντε μήνες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

Απάντηση. Εδώ έχουμε ότι το κεφάλαιο τοκίζεται αρχικά για τρία ολόκληρα χρόνια και οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται στο τέλος του κάθε έτους. Στο τέλος του τρίτου έτους θα έχει γίνει

$$K_3 = K \cdot (1+i)^3 = 100 \cdot (1+0.03)^3$$

Στη συνέχεια το ποσό K_3 τοκίζεται για 5 μήνες με ονομαστικό επιτόκιο $i' = \frac{5i}{12}$ επομένως το τελικό ποσό στο τέλος της περιόδου θα είναι

$$\begin{aligned} K_{3+\frac{5}{12}} &= K_3 \cdot (1+i') \\ &= K_3 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 0.03}{12}\right) \\ &= 100 \cdot (1+0.03)^3 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 0.03}{12}\right) \\ &\backsimeq 110.63 \end{aligned}$$

Αν το ίδιο ποσό τοκιζόταν με το ίδιο επιτόκιο αλλά με απλή κεφαλαιοποίηση τότε το τελικό ποσό θα ήταν μικρότερο. Για να το υπολογίσουμε μετατρέπουμε την χρονική περίοδο τοκισμού σε μήνες και έχουμε ότι θα τοκισθεί συνολικά για 41 μήνες. Στην συνέχεια βρίσκουμε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο το οποίο είναι $\frac{0.03}{12}$. 'ρα το τελικό ποσό θα ήταν

$$100 \cdot \left(1 + 41 \cdot \frac{0.03}{12}\right) \backsimeq 110.25$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 43 *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και 35 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

Απάντηση. Δουλεύοντας παρόμοια έχουμε ότι το τελικό ποσό θα είναι

$$K_{3+\frac{35}{360}} = 100 \cdot (1+0.03)^3 \cdot \left(1 + \frac{35 \cdot 0.03}{360}\right)$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 44 *Έστω ότι κεφάλαιο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3% και έχει τελική αξία 300 Ευρώ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;*

Απάντηση. Θα ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} K_5 &= K \cdot (1+0.03)^5 \Rightarrow \\ K &= \frac{K_5}{(1+0.03)^5} = \frac{300}{(1+0.03)^5} \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 45 *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και 2 μήνες με ετήσιο επιτόκιο τριμηνιαίου ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

ΛΥΣΗ. Εφόσον οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται κάθε τρίμηνο μπορούμε να μετατρέψουμε το χρονικό διάστημα σε τρίμηνα. Έτσι έχουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι 12 τρίμηνα και 2/3 του τριμήνου. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι το $i' = \frac{0.03}{4}$. ’ρα το τελικό ποσό θα είναι

$$\underbrace{100 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{12}}_{\text{τύπος ανατοκισμού}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.03}{4}\right) \backsimeq 109.9275932$$

Όπως βλέπουμε χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του ανατοκισμού για να υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο μετά από 12 τρίμηνα. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο το οποίο είναι $\frac{0.03}{12}$ και μετά εφαρμόζουμε στο κεφάλαιο που προκύπτει έπειτα από 12 τρίμηνα το τύπο απλού τόκου.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού 9. Για να γίνει αυτό μετατρέπουμε την χρονική διάρκεια σε ημέρες, δηλαδή $N = 3 \cdot 360 + 2 \cdot 30 = 1.140$ ημέρες. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι το $\frac{0.03}{4} = 0.0075$. Έπειτα αντικαθιστούμε στον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού (ο οποίος αναφέρεται σε αρχικό κεφάλαιο 1 Ευρώ) και έχουμε

$$100 \cdot (1+0.0075)^{[\frac{1140}{90}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{1140}{90} - [\frac{1140}{90}]\right) \cdot 0.0075\right)$$

Όμως $\frac{1140}{90} \simeq 12.66666667$ επομένως $[\frac{1140}{90}] = 12$ ενώ $\frac{1140}{90} - [\frac{1140}{90}] \simeq 0.66666667$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$100 \cdot (1+0.0075)^{12} \cdot (1 + 0.66666667 \cdot 0.0075) \simeq 109,9275932$$

□

11 Ισοδύναμα Επιτόκια

Ας υποθέσουμε ότι μια τράπεζα χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο i_1 τριμηνιαίου ανατοκισμού ενώ μια άλλη τράπεζα χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο i_2 εξαμηνιαίου ανατοκισμού. Αν τα επιτόκια είναι ίσα τότε είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι η πρώτη τράπεζα είναι αποδοτικότερη διότι κεφαλαιοποιεί τους τόκους συχνότερα. Αν όμως τα επιτόκια δεν είναι ίσα τότε δεν είναι εύκολο να βγάλουμε συμπέρασμα για το ποια τράπεζα είναι συμφέρουσα έναντι της άλλης. Μάλιστα, εξαρτάται και από το χρονικό διάστημα στο οποίο σκοπεύουμε να τοκίσουμε τα χρήματά μας.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι η τράπεζα T_1 έχει ετήσιο επιτόκιο τριμηνιαίου ανατοκισμού 2% ενώ η τράπεζα T_2 έχει ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού 2.01% Έχουμε στην διάθεση μας το ποσό των 3.000 Ευρώ το οποίο σκοπεύουμε να τοποθετήσουμε σε μια από τις δυο τράπεζες για 8 μήνες.

Προκειμένου να αποφασίσουμε ποια τράπεζα θα αποδώσει περισσότερα αρκεί να υπολογίσουμε το τελικό ποσό που θα έχουμε και στις δυο τράπεζες.

Αν τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα T_1 μετά από έξι μήνες θα έχουν γίνει

$$3.000 \cdot \left(1 + i^{'}\right)^2 = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^2 = 3.030,075$$

Εδώ υπολογίσαμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι $i^{'} = \frac{0.02}{4}$. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο μετά την πάροδο των δυο μηνών και θα έχουμε

$$3.030 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot i^{'}\right) = 3.030 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.02}{4}\right) \backsimeq 3.040,175$$

Από την άλλη μεριά, αν τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα T_2 στο τέλος του εξαμήνου θα έχω τελικό κεφάλαιο

$$3.000 \cdot (1 + i^{'}) = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.0201}{2}\right) = 3.031,15$$

Στο τέλος του οκταμήνου θα έχω

$$3.031,15 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0.021}{2}\right) \backsimeq 3.041,3$$

'ρα συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα T_2.

Με ποιο επιτόκιο θα έπρεπε να τοκίζει η τράπεζα T_2 για να έχουμε το ίδιο όφελος στο τέλος του εξαμήνου; Έστω ότι αυτό είναι το i_3 επομένως το ονομαστικό επιτόκιο θα είναι $i_3^{'} = \frac{i_3}{2}$. 'ρα το τελικό ποσό στην τράπεζα T_2 θα είναι

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{i_3}{2}\right)$$

Για να έχω την ίδια απόδοση και στις δυο τράπεζες θα πρέπει να εξισώσω το ποσό αυτό με το ποσό που αποδίδει η τράπεζα T_1 στο εξάμηνο, δηλαδή πρέπει να ισχύει $3.000 \cdot (1 + \frac{i_3}{2}) = 3.030,75$. Λύνοντας ως προς το i_3 έχουμε ότι $i_3 = 0.02005$.

Στο τέλος του οκταμήνου τι απόδοση θα έχουν;

Στην τράπεζα T_2 με ετήσιο επιτόκιο 0.02005 εξαμηνιαίου ανατοκισμού στο τέλος του οκταμήνου το ποσό θα είναι

$$3.030,075 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0.02005}{2}\right) \backsimeq 3.040,2$$

Παρατηρούμε ότι στο τέλος του πρώτου εξαμήνου η τράπεζα T_2 έχει την ίδια απόδοση με την T_1 όταν χρησιμοποιεί το επιτόκιο i_3 αλλά παρόλα αυτά στο τέλος του οκταμήνου έχει μεγαλύτερη απόδοση.

Ας υπολογίσουμε τώρα την απόδοση που έχουν οι δυο τράπεζες μετά από n εξάμηνα όταν χρησιμοποιούν 0.02 και 0.02005 ως επιτόκια αντίστοιχα.

Η τράπεζα T_1 θα έχει τελικό ποσό μετά από n εξάμηνα

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{2n}$$

ενώ η τράπεζα T_2 θα έχει τελικό ποσό μετά από n εξάμηνα

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02005}{2}\right)^{n}$$

Όμως $3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^2 = 3.030,075 = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02005}{2}\right)$ άρα τα ποσά ταυτίζονται μετά από την πάροδο n εξαμήνων.

Με τους παραπάνω υπολογισμούς μπορούμε να πούμε ότι τα ετήσια επιτόκια $i_1 = 0.02$ τριμηνιαίου ανατοκισμού και $i_3 =$

0.02005 εξαμηνιαίου ανατοκισμού είναι ισοδύναμα αφού αποδίδουν τα ίδια χρήματα σε n εξάμηνα. Παρόλα αυτά σε μια (ενδιάμεση) περίοδο 8 μηνών το δεύτερο είναι αποδοτικότερο. Αν σκοπεύουμε να τοποθετήσουμε τα χρήματά μας για μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς να έχουμε προγραμματίσει συγκεκριμένο χρονικό διάστημα εκταμίευσης τότε μπορούμε να επιλέξουμε όποια από τις δυο τράπεζες θέλουμε χρησιμοποιώντας άλλα κριτήρια. Ένα τέτοιο κριτήριο είναι η αξιοπιστία της κάθε τράπεζας.

Σημειώστε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε ποσό που πρόκειται να τοκισθεί.

Για τους παραπάνω λόγους δίνουμε τον επόμενο ορισμό των ισοδύναμων επιτοκίων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 46 *Θεωρούμε τα επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ σε χρονικές περιόδους $t_1, t_2, \cdots, t_n$ εκφρασμένα σε ημέρες. Έστω $k = ΕΚΠ(t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Τότε τα επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ θα λέγονται ισοδύναμα όταν ίσα ποσά που τοκίζονται στις περιόδους $t_1, t_2, \cdots, t_n$ με επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ έχουν ίσες τελικές αξίες σε πολλαπλάσια της περιόδου k.*

Συνήθως τα επιτόκια στα οποία θα εφαρμόζουμε τον παραπάνω ορισμό είναι τα ονομαστικά επιτόκια και οι χρονικές μονάδες $t_1, \cdots, t_n$ θα είναι αυτές που αφορούν τα ονομαστικά επιτόκια.

ΑΣΚΗΣΗ 47 *Έστω ότι η τράπεζα T_1 χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 3% τριμηνιαίου ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο της τράπεζας T_2 μηνιαίου ανατοκισμού;*

ΛΥΣΗ. Τα ποσά που τοκίζονται στην τράπεζα T_1 ανατοκίζονται κάθε τρίμηνο με ετήσιο επιτόκιο 3%. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να τοκίζονται κάθε τρεις μήνες με επιτόκιο $\frac{3}{4}$% το οποίο είναι στην ουσία το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου του αρχικού επιτοκίου.

Ας συμβολίσουμε με i_2 το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού της τράπεζας T_2. Τότε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{i_2}{12}$.

Σε αυτό το πρόβλημα η χρονική μονάδα t_1 που αναφέρεται στο πρώτο επιτόκιο είναι το τρίμηνο ή 90 ημέρες. Ενώ η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο δεύτερο επιτόκιο είναι οι 30 ημέρες. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ΕΚΠ(30,90) είναι οι 90 ημέρες (τρεις μήνες). Για να υπολογίσω λοιπόν το ισοδύναμο επιτόκιο της δεύτερης τράπεζας θα πρέπει να τοκίσω 1 Ευρώ για τρεις μήνες με το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας T_1 και 1 Ευρώ για τρεις μήνες με το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας T_2. Στην συνέχεια θα εξισώσω τα ποσά και θα βρω το i_2.

Για την τράπεζα T_1 θα έχω ότι το 1 Ευρώ μετά από τρεις μήνες θα είναι

$$1 + \frac{0.03}{4} = 1.0075$$

Από την άλλη μεριά αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα T_2 για τρεις μήνες θα έχω

$$\left(1+\frac{i_2}{12}\right)^3$$

Εξισώνουμε τα δυο παραπάνω ποσά για να πάρουμε την επόμενη ισότητα

$$\left(1+\frac{i_2}{12}\right)^3 = 1.0075$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι $i_2 \backsimeq 0.0299$, μικρότερο δηλαδή από 0.03 όπως αναμενόταν αφού η τράπεζα T_2 ενσωματώνει τους τόκους συχνότερα. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *Έστω ότι η τράπεζα T_1 χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 4μηνιαίου ανατοκισμού το 3% και έστω ότι η τράπεζα T_2 χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο ημερήσιου ανατοκισμού το 2.8%. Σε ποια τράπεζα συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου;*

ΛΥΣΗ. Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο της τράπεζας T_1 είναι το $\frac{0.03}{3}$ ενώ το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας T_2 είναι το $\frac{0.028}{360}$.

Η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας T_1 είναι οι 30 ημέρες ενώ η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας T_2 είναι η μια ημέρα. Προφανώς το ΕΚΠ(1,30) είναι οι 30 ημέρες.

Αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα T_1 για 30 ημέρες το τελικό ποσό θα είναι

$$1 + \frac{0.03}{3} = 1.01$$

Αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα T_2 για 30 ημέρες το τελικό ποσό θα είναι

$$\left(1 + \frac{0.028}{360}\right)^{30} = 1.002$$

Αυτό σημαίνει ότι συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα T_1. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 49 *Έστω ότι η τράπεζα T_1 χρησιμοποιεί εξαμηνιαίο επιτόκιο 1% μηνιαίου ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού;*

ΛΥΣΗ. Η τράπεζα T_1 χρησιμοποιεί εξαμηνιαίο επιτόκιο 1% μηνιαίου ανατοκισμού. Το ονομαστικό επιτόκιο εβδομάδας θα είναι $\frac{0.01}{6}$. Η χρονική περίοδος που αναφέρεται στο ονομαστικό αυτό επιτόκιο είναι οι 30 ημέρες.

Αν το ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού είναι το i_2 τότε το ονομαστικό επιτόκιο εξαμήνου θα είναι το $\frac{i_2}{2}$ και η χρονική μονάδα θα είναι οι 180 ημέρες.

Το ΕΚΠ(30,180) είναι το 180.

Αν τοκίσω ένα Ευρώ με το εξαμηνιαίο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού για 180 ημέρες τότε θα έχω ως τελικό ποσό

$$\left(1+\frac{0.01}{6}\right)^6 \backsimeq 1.01$$

Αν τοκίσω ένα Ευρώ με το ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού τότε μετά από 180 ημέρες θα έχω τελικό ποσό

$$1+\frac{i_2}{2}$$

Εξισώνοντας τα δυο αυτά ποσά και λύνοντας ως προς το i_2 προκύπτει ότι $i_2 \backsimeq 0.02$ ή αλλιώς $i_2 \backsimeq 2\%$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 50 *Έστω κεφάλαιο K τοκίζεται για 3 χρόνια και 5 μήνες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού;*

Απάντηση. Εδώ μας ζητείται να υπολογίσουμε το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού (δηλαδή $t_2 = 30$ ημέρες) όταν γνωρίζουμε το επιτόκιο ετησίου ανατοκισμού (δηλαδή $t_1 = 360$ ημέρες). Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο εδώ είναι οι 360 ημέρες. Επομένως, η ισοδυναμία θα ισχύει για πολλαπλάσια του ενός έτους.

Θα υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο K τοκίζεται για 1 χρόνο με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_1 = K \cdot (1+0.03)$$

Για να βρω το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού θα υποθέσω ότι το κεφάλαιο τοκίζεται για 1 χρόνο με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού $i^{'}$. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_1^{'} = K \cdot (1 + i^{'})^{12}$$

Απαιτώντας τα τελικά ποσά να είναι ίδια λαμβάνω μια εξίσωση με άγνωστο το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού $i^{'}$. Αυτό θα παραμένει ισοδύναμο για κεφάλαια τοκιζόμενα σε χρονικές διάρκειες πολλαπλάσια του ενός χρόνου. Επομένως, έπειτα από τρία χρόνια τα αντίστοιχα κεφάλαια θα είναι ίσα, δηλαδή

$$K \cdot (1 + i)^3 = K \cdot (1 + i^{'})^{36}$$

Όμως δεν είναι σωστό να συσχετίσω τα επιτόκια για το χρονικό διάστημα 3 χρόνων και πέντε μηνών. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 51 *Έχουμε δει πως όταν δυο επιτόκια είναι ισοδύναμα τότε τα τοκιζόμενα ποσά έχουν ίδιες αξίες κατά τις χρονικές περιόδους που είναι πολλαπλάσια του ΕΚΠ(t_1, t_2). Εδώ t_1, t_2 είναι οι χρονικές μονάδες των δυο επιτοκίων αντίστοιχα. Μεταξύ των χρονικών αυτών μονάδων τι ακριβώς συμβαίνει;*

Αν τοκίσουμε ένα Ευρώ με επιτόκιο i_1 που αντιστοιχεί σε χρονική μονάδα t_1 (σε ημέρες) τότε μετά από N ημέρες θα έχει γίνει

$$(1 + i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$$

όπου $[x]$ *είναι το ακέραιο μέρος του* x. *Παρόμοια, για το επιτόκιο* i_2 *σε χρονική μονάδα* t_2.

Μας ενδιαφέρει η διαφορά τους καθώς το N *αυξάνεται μεταξύ* 0 *και μιας χρονικής περιόδου* T, *π.χ. 2 χρόνια. Ας το δούμε στα δεδομένα του παραδείγματος 49. Εκεί έχουμε εξαμηνιαίο επιτόκιο* $i_1 = 0.01$ *μηνιαίου ανατοκισμού και το ισοδύναμό του είναι το ετήσιο επιτόκιο* $i_2 \backsimeq 0.02$ *εξαμηνιαίου ανατοκισμού.*

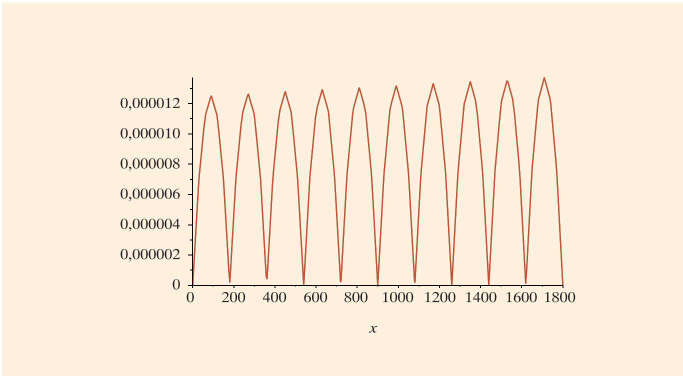
Αν ένα Ευρώ τοκισθεί για N *ημέρες με τον πρώτο τρόπο θα δώσει τελικό ποσό*

$$\left(1+\frac{0.01}{6}\right)^{[\frac{N}{30}]}\cdot\left(1+\left(\frac{N}{30}-[\frac{N}{30}]\right)\cdot\frac{0.01}{6}\right)$$

Αντίστοιχα αν ένα Ευρώ τοκισθεί για N *ημέρες με τον δεύτερο τρόπο θα δώσει τελικό ποσό*

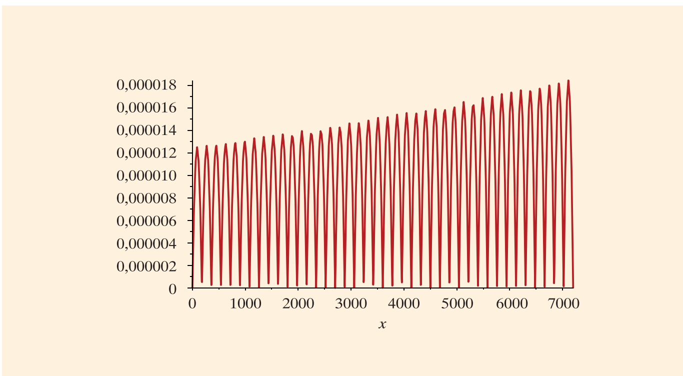
$$\left(1+\frac{0.02}{2}\right)^{[\frac{N}{180}]}\cdot\left(1+\left(\frac{N}{1800}-[\frac{N}{180}]\right)\cdot\frac{0.02}{2}\right)$$

Αφαιρώντας το πρώτο ποσό από το δεύτερο προκύπτει ότι μεταξύ των πολλαπλασίων των 180 ημερών υπερτερεί ο δεύτερος τρόπος τοκισμού. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 8.



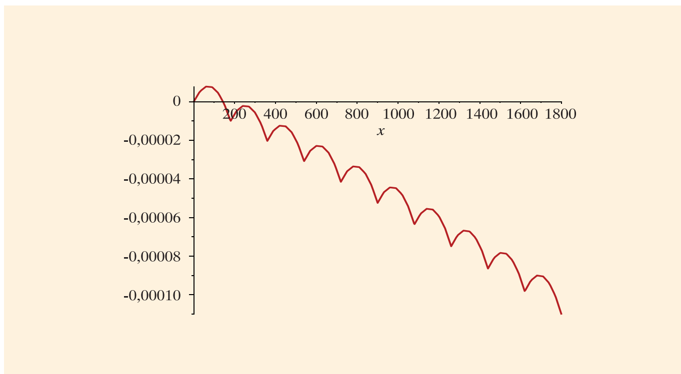
Σχήμα 8: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες

Μπορούμε επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε ενδιάμεσο χρονικό διάστημα η μέγιστη τιμή της διαφοράς αυξάνεται. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 9.



Σχήμα 9: Η μέγιστη τιμή της διαφοράς αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου

Αν τώρα τοκίσουμε ένα Ευρώ με τον πρώτο τρόπο αλλά με ελάχιστα παραπάνω επιτόκιο, δηλαδή π.χ. $i_1 = 0.01001$ *τότε γνωρίζουμε ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ο πρώτος τρόπος υπερτερεί. Μπορούμε να δούμε στο σχήμα 10 πως ακριβώς συμβαίνει αυτό.*



Σχήμα 10: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες αλλά με επιτόκιο 0.01001 στον πρώτο τρόπο

Βλέπουμε ότι για τις πρώτες ημέρες πάλι υπερτερεί ο δεύτερος τρόπος τοκισμού. Παρόλα αυτά τελικά υπερτερεί ο πρώτος τρόπος αφού τώρα τοκίζουμε με λίγο παραπάνω επιτόκιο από το ισοδύναμο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 52 *Από τα προηγούμενα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αν το* i_1 *αναφέρεται σε* t_1 *χρονικές μονάδες τότε για τις χρονικές μονάδες* $t_2 \neq t_1$ *δεν υπάρχει επιτόκιο* i_2 *τέτοιο ώστε ένα ποσό* *που τοκίζεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να έχει την ίδια απόδοση για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή. Μπορεί να βρει κανείς επιτόκιο i_2 κατά το οποίο ένα ποσό να έχει την ίδια απόδοση σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή ή μπορεί να υπολογίσει το ισοδύναμο επιτόκιο (δες ορισμό 46) κατά το οποίο το τοκιζόμενο ποσό θα έχει την ίδια απόδοση σε όλες τις μελλοντικές χρονικές στιγμές που είναι όμως πολλαπλάσιες του ΕΚΠ(t_1, t_2). Αν διαταράξουμε λίγο το ισοδύναμο επιτόκιο i_2 τότε οι αποδόσεις θα αλλάξουν ακόμη και κατά τις χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσια του ΕΚΠ(t_1, t_2) και μάλιστα θα είναι σταθερά υπέρ του ενός ή του άλλου επιτοκίου. Δηλαδή το κοντινότερο που μπορούμε να πετύχουμε σε «ισότητα» τοκιζόμενων ποσών σε μελλοντικούς χρόνους επιτυγχάνεται με το ισοδύναμο επιτόκιο όπως ορίσθηκε στον ορισμό 46. Παρακάτω θα ορίσουμε το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού κάτω από το οποίο είναι εφικτός ο ορισμός ισοδύναμων επιτοκίων με την ισχυρή έννοια, δηλαδή ίσα ποσά θα δίνουν ίσες τελικές αξίες σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους.*

Εύρεση του χρόνου τοκισμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 53 *Έστω ότι κεφάλαιο 500 Ευρώ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού* 3% *και τελική αξία 550 Ευρώ. Πόσο χρόνο ανατοκίστηκε;*

Απάντηση. Υποθέτουμε ότι έχει τοκισθεί για n χρόνια και $m < 360$ ημέρες. Επιλέγουμε αυτή τη μορφή διάρκειας διότι η περίοδος ανατοκισμού είναι ετήσια. Αν ήταν τριμηνιαία, μηνιαία κ.τ.λ. θα υποθέταμε ότι έχει τοκισθεί για n τρίμηνα ή μήνες και m ημέρες. Επομένως, το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K\,(1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{360} \cdot i\right)$$

Εδώ γνωρίζουμε τα $K_t = 550$, $K = 500$, $i = 0.03$ και ψάχνουμε τα n, m. Ας υπολογίσουμε πρώτα τα χρόνια που έχει τοκισθεί. Αν το κεφάλαιο K τοκισθεί για n χρόνια (και όχι για n χρόνια **και** m ημέρες) θα έχει τελική αξία μικρότερη του K_t, δηλαδή

$$K_t^n = K(1+i)^n \leq K_t$$

Αν τοκισθεί για $n+1$ χρόνια τότε η τελική αξία θα είναι μεγαλύτερη του K_t, δηλαδή

$$K_t \leq K_t^{n+1} = K(1+i)^{n+1}$$

Ισχύει λοιπόν η ανισότητα

$$K(1+i)^n \leq K_t \leq K(1+i)^{n+1}$$

Εφαρμόζουμε το λογάριθμο κατά μέλη (και αφού είναι αύξουσα συνάρτηση) έχουμε

$$\begin{aligned} n\ln(1+i) &\leq \ln\frac{K_t}{K} \leq (n+1)\ln(1+i) \Rightarrow \\ n &\leq \frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)} \leq n+1 \end{aligned}$$

Επειδή γνωρίζουμε την ποσότητα $\frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)}$ την υπολογίζουμε και βλέπουμε μεταξύ ποιων ακέραιων βρίσκεται. Οπότε

$$n = \left[\frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)}\right]$$

Ξαναγυρνάμε στη σχέση

$$K_t = K(1+i)^n\left(1+\frac{m}{360}\cdot i\right)$$

και υπολογίζουμε και το m αφού τώρα όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά. □

Παραδειγμα 54 *Έστω κεφάλαιο* 500 *τοκίζεται με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού* 1% *και η τελική αξία του είναι 580. Για πόσο διάστημα τοκίστηκε;*

Απάντηση. Εδώ το επιτόκιο ανατοκισμού είναι μηνιαίο επομένως θα υποθέσουμε ότι τοκίστηκε για n μήνες και m ημέρες. Το τελικό κεφάλαιο θα ικανοποιεί

$$K_t = K\cdot(1+i)^n\cdot\left(1+\frac{m}{30}\cdot i\right)$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με το προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε πρώτα τους μήνες n και έπειτα τις ημέρες m. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55 *Έστω κεφάλαιο* 500 *Ευρώ τοκίζεται με τριμηνιαίο επιτόκιο* 2% *και η τελική αξία του είναι 560. Για πόσο διάστημα τοκίστηκε;*

Απάντηση. Θα υποθέσουμε ότι τοκίστηκε για n τρίμηνα και m μήνες. Για να γίνει αυτό πρέπει να μετατρέψουμε τους m μήνες σε τρίμηνα. Επομένως το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{3} \cdot i\right)$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι έχει τοκισθεί για n τρίμηνα και m ημέρες. Για να γίνει αυτό θα μετατρέψουμε τις m ημέρες σε τρίμηνα. Τότε το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{90} \cdot i\right)$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 56 *Έστω ότι 500 Ευρώ τοκίστηκαν για ένα χρονικό διάστημα με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2% μηνιαίου ανατοκισμού και το τελικό ποσό είναι 550 Ευρώ. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα που τοκίστηκε το αρχικό ποσό;*

ΛΥΣΗ. Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{0.002}{6}$. Το χρονικό διάστημα που ψάχνουμε το χωρίζουμε σε n μήνες και m ημέρες.

Η εξίσωση λοιπόν είναι η εξής

$$550 = 500 \cdot \left(1 + \frac{0.002}{6}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{30} \cdot \frac{0.002}{6}\right)$$

Λύνουμε την εξίσωση κατά τα γνωστά υπολογίζοντας πρώτα το n και έπειτα το m. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **57** *Έστω κεφάλαιο* 500 *Ευρώ τοκίζεται για 3 χρόνια 2 μήνες και 20 ημέρες με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού i και το τελικό ποσό είναι 550. Να βρεθεί το επιτόκιο.*

Απάντηση. Αφού το επιτόκιο ανατοκισμού είναι μηνιαίο τότε θα πρέπει να μετατρέψουμε τη διάρκεια σε μήνες και ημέρες. Προκύπτει λοιπόν ότι έχει τοκισθεί για 38 μήνες και 20 ημέρες. Το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^{38} \cdot \left(1 + \frac{20}{30} \cdot i\right)$$

Αν τοκίσουμε το ίδιο ποσό για χρονική περίοδο 38 μηνών θα έχει τελικό κεφάλαιο

$$K_{38} = 500 \cdot (1+i)^{38} < 550$$

Παρομοίως, αν τοκιστεί για χρονική περίοδο 39 μηνών θα έχει τελικό κεφάλαιο

$$K_{39} = 500 \cdot (1+i)^{39} > 550$$

Λύνοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.002446839 < i < 0.002511311$$

Επειδή ο χρόνος τοκισμού είναι πιο κοντά στους 39 μήνες, για την ακρίβεια είναι 38 μήνες και 2/3 του μήνα, μπορούμε να θεωρήσουμε ως μια προσέγγιση του επιτοκίου τον αριθμό

$$\frac{2}{3} \cdot 0.002446839 + \frac{1}{3} \cdot 0.002511311 = 0.002468329667$$

Κάνοντας την επαλήθευση, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & 500 \cdot (1 + 0.002468329667)^{38} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0.002468329667\right) \\ = \; & 550.0082448 \end{aligned}$$

Δηλαδή η εκτίμησή μας είναι αρκετά καλή. □

Μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα το επιτόκιο χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Νεύτωνα.

11.1 Μέθοδος του Νεύτωνα για εύρεση ρίζας συνάρτησης

Θα περιγράψουμε την μέθοδο του Νεύτωνα (δες θεώρημα ;;) η οποία χρησιμοποιείται για την εύρεση της ρίζας μιας συνάρτησης. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός είναι συνεχής. Δημιουργούμε την ακολουθία αριθμών

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{(μέθοδος του Νεύτωνα)}$$

θέτοντας x_0 μια αρχική τιμή κοντά στην ρίζα της συνάρτησης. Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία αριθμών x_n τείνει στην ρίζα της συνάρτησης f.

Ασκηση 58 *Έστω ότι το ποσό των 500 Ευρώ τοκίζεται για 5 μήνες και 20 ημέρες και δίνει τελικό ποσό 510 Ευρώ. Ποιο είναι το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού;*

Λυση. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι το i τότε το μηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο είναι το $\frac{i}{12}$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$510 = 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{i}{12}\right)$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα για να προσεγγίσουμε το επιτόκιο αλλά χρειαζόμαστε μια αρχική τιμή. Αν τοκίσουμε το ποσό για 5 μήνες ή για έξι μήνες τότε

$$500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 < 510 < 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^6$$

Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.03968379 < i < 0.04762055$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ως αρχική τιμή τον αριθμό

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \cdot 0.03968379 + \frac{1}{3} \cdot 0.04762055 \\ = \; & 0.04232937667 \end{aligned}$$

Πρώτα από όλα θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση f για την οποία θα υπολογίσουμε την ρίζα της. Από την ισότητα

$$510 = 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{i}{12}\right)$$

έχουμε ότι αν $f(x) = 500 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{12}\right) - 510$ τότε η ρίζα της f θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο. Θέτουμε $x_0 = 0.04232937667$ και υπολογίζουμε το x_1 το οποίο είναι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.04200547168$$

Στην συνέχεια δημιουργούμε το x_2 ως εξής

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.04200545085$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε μια επαλήθευση δεχόμενοι ως επιτόκιο την τελευταία τιμή x_2 διότι διαπιστώνουμε ότι ο x_2 όρος δεν διαφέρει πολύ από τον x_1. Αντικαθιστώντας όπου i το x_2 στην αρχική εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} & 500 \cdot \left(1 + \frac{0.04200545085}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.04200545085}{12}\right) \\ = \ & 509.9999989 \end{aligned}$$

'ρα το $i \backsimeq 04200545085$. Σε περίπτωση που δεν είμαστε ικανοποιημένοι με την ακρίβεια αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε και άλλους όρους της ακολουθίας της μεθόδου του Νεύτωνα ως ότου φτάσουμε στην επιθυμητή ακρίβεια. $\square$

Όπως έχουμε δει, χρησιμοποιώντας τον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού, η σχέση μεταξύ τελικού ποσού και αρχικού θα έχει την μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot (1+q\cdot i)$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $q \in [0,1]$. Έτσι, για να βρούμε το επιτόκιο θέτουμε την συνάρτηση

$$f(x) = K \cdot (1+x)^n \cdot (1+q\cdot x) - K_t$$

Η παράγωγος έχει την μορφή

$$f^{'}(x) = K \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \cdot (1+q\cdot x) + K \cdot q \cdot (1+x)^n$$

οπότε ο λόγος

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{K \cdot (1+x)^n \cdot (1+q\cdot x) - K_t}{K \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \cdot (1+q\cdot x) + K \cdot q \cdot (1+x)^n} \\ &= \frac{(1+x)(1+q\cdot x) - \frac{K_t}{K(1+x)^{n-1}}}{1+2qx+q}\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει οι υπολογισμοί απλοποιούνται αρκετά. Όσον αφορά την αρχική τιμή αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε όποια θέλουμε. Επιλέγοντας

$x_0 = 0.01$ θα οδηγηθούμε σίγουρα μετά από κάποια βήματα της μεθόδου του Νεύτωνα σε μια καλή προσέγγιση του επιτοκίου. Το πλήθος των βημάτων όμως μπορεί να είναι μεγάλο και για το λόγο αυτό είναι καλό να έχουμε μια καλή αρχική τιμή με το τρόπο που την υπολογίσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι θα προκύψει μια ανισότητα της μορφής

$$a < i < b$$

Μια καλή προσέγγιση είναι ο αριθμός $qa + (1 - q)b$.

ΑΣΚΗΣΗ 59 *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 8 μήνες και 25 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο i τριμηνιαίου ανατοκισμού και δίνει τελικό ποσό 1.600 Ευρώ. Ποιο είναι το επιτόκιο;*

ΛΥΣΗ. Το χρονικό διάστημα τοκισμού είναι 8 μήνες και 25 ημέρες. Αυτό πρέπει να μετατραπεί σε τρίμηνα οπότε έχουμε ότι είναι ίσο με 2 τρίμηνα, 2 μήνες και 25 ημέρες. Η χρονική περίοδος 2 μήνες και 25 ημέρες πρέπει να μετατραπούν σε κλάσμα του τριμήνου. Για τον λόγο αυτό μετατρέπουμε τους 2 μήνες και 25 ημέρες σε ημέρες και έχουμε ότι είναι 85 ημέρες. 'ρα το ζητούμενο κλάσμα είναι το $\frac{85}{90}$. Το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου θα είναι $\frac{i}{4}$. Επομένως η εξίσωση αρχικού και τελικού ποσού είναι

$$1.600 = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{i}{4}\right)$$

Θέτουμε την συνάρτηση

$$f(x) = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}\right) - 1.600$$

και υπολογίζουμε την παράγωγό της η οποία είναι

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 1.500 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}\right) \\ &\quad +1.500 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^2 \cdot \frac{85}{4 \cdot 90} \end{aligned}$$

Επομένως το κλάσμα $\frac{f(x)}{f^{'}(x)}$ γίνεται

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(1 + \frac{x}{4}) \cdot (1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}) - \frac{1.600}{1.500 \cdot (1 + \frac{x}{4})}}{2 \cdot (1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}) + (1 + \frac{x}{4}) \cdot \frac{85}{4 \cdot 90}}$$

Στην συνέχεια θέτουμε $x_0 = 0.01$ και υπολογίζουμε τον πρώτο όρο της ακολουθίας μέσω της μεθόδου του Νεύτωνα. Οπότε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.03638485457$$

Έπειτα υπολογίζουμε το x_2 ως εξής

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.05380330293$$

Επειδή οι δυο τελευταίοι όροι διαφέρουν αρκετά θα συνεχίσουμε τους υπολογισμούς ως ότου ο τελευταίος δεν διαφέρει πολύ από τον προτελευταίο. Έτσι έχουμε μετά από αρκετές επαναλήψεις ότι το επιτόκιο είναι περίπου ίσο με $i = 0.08862551297$.

Όπως σε προηγούμενη άσκηση μπορούμε να δώσουμε μια αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$1.500 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^2 < 1.600 < 1.500 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^3$$

Λύνοντας τις παραπάνω δυο ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.086983640 < i < 0.131182236$$

Όπως πριν, μπορούμε να διαλέξουμε ως αρχική τιμή τον αριθμό

$$\begin{aligned} & \frac{85}{90} \cdot 0.086983640 + \frac{5}{90} \cdot 0.131182236 \\ = \;& 0.08943911756 \end{aligned}$$

Με αρχική τιμή τον αριθμό αυτό η μέθοδος του Νεύτωνα θα δώσει ως πρώτη προσέγγιση τον

$$x_1 = 0.08862567193$$

και ως δεύτερη προσέγγιση τον αριθμό

$$x_2 = 0.08862551144$$

Με δυο επαναλήψεις είμαστε ήδη πολύ κοντά στο ζητούμενο επιτόκιο. Εκ των υστέρων βλέπουμε ότι πράγματι είναι μια εξαιρετική αρχική τιμή για την μέθοδο του Νεύτωνα. □

12 Συνεχής Ανατοκισμός

Είχαμε δει σε προηγούμενη παράγραφο το πρόβλημα εύρεσης του επιτοκίου όταν όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά. Γενικά, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο ακριβώς παρά μόνο να το προσεγγίσουμε. Αν το επιτόκιο αναφέρεται σε ημέρες τότε ο γενικευμένος τύπος ανατοκισμού είναι της μορφής

$$K_t = K \cdot (1+i)^N$$

όπου N είναι το πλήθος των ημερών. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο ακριβώς όταν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι γνωστά. Για αυτό το λόγο αλλά και για άλλους είναι χρήσιμη η έννοια του συνεχή ανατοκισμού, δηλαδή κεφαλαιοποιώ τον τόκο κάθε στιγμή. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε πως αυτό είναι εφικτό από μαθηματικής άποψης.

Υποθέτουμε ότι ένα κεφάλαιο K ανατοκίζεται κάθε περίοδο t_1 (π.χ. ένα έτος) με επιτόκιο i. Χωρίζουμε την κάθε χρονική περίοδο t_1 σε n ίσες υποπεριόδους t_n και άρα $t_n = \frac{t_1}{n}$. Αν ο τόκος κεφαλαιοποιείται σε κάθε υποπερίοδο τότε το τελικό κεφάλαιο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα είναι

$$K_t^n = K \cdot \left(1+\frac{i}{n}\right)^{[\frac{nt}{t_1}]} \cdot \left(1+\left(\frac{nt}{t_1}-[\frac{nt}{t_1}]\right)\cdot\frac{i}{n}\right)$$

ή αλλιώς

$$K_t^n = K \cdot \left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}(\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}])} \cdot \left(1+\left(\frac{nt}{t_1}-[\frac{nt}{t_1}]\right)\cdot\frac{i}{n}\right)$$

Σημειώστε ότι $[x] \leq x \leq [x]+1$ άρα $[\frac{nt}{t_1}] \leq \frac{nt}{t_1} \leq [\frac{nt}{t_1}]+1$ και επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n} \leq \frac{t}{t_1} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n} = \frac{t}{t_1}$$

Θέτουμε $b_n = \left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}(\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}])}$ και $c_n = \ln b_n = (\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}]) \ln\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}}$.

Υποθέτοντας ότι $n \to \infty$, δηλαδή ο ανατοκισμός είναι συνεχής, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} c_n = i \cdot \dfrac{t}{t_1} \ln e$. 'ρα, το τελικό ποσό θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} K_t^n = K_t = K \cdot e^{i\cdot\frac{t}{t_1}}$$

Έτσι, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι i αλλά οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή τότε ένα Ευρώ σήμερα τοκιζόμενο για ένα χρόνο θα γίνει e^i Ευρώ. Το ποσό αυτό είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την οποιαδήποτε άλλη συχνότητα κεφαλαιοποίησης και αυτό φαίνεται εύκολα από το γεγονός ότι η ακολουθία $(1+\frac{i}{n})^n$ είναι αύξουσα. Ανακεφαλαιώνοντας, αν i είναι το επιτόκιο που αναφέρεται σε t_1 χρονικές μονάδες τότε

$K_t = Ke^{i\frac{t}{t_1}}$ (τύπος συνεχούς ανατοκισμού) όπου t είναι η χρονική περίοδος τοκισμού σε πολλαπλάσια (όχι κατά ανάγκη ακέραια) του t_1.

Από την σχέση αυτή, διαιρώντας με το K και έπειτα λογαριθμίζοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$i = \frac{t_1}{t} \ln \frac{K_t}{K}$$

Άσκηση 60 *Έστω κεφάλαιο 500 Ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού για 3 χρόνια, 2 μήνες και 14 ημέρες. Ποιο είναι το τελικό κεφάλαιο;*

Λύση. Το επιτόκιο είναι $i = 0.03$ οπότε μας μένει να μετατρέψουμε τη χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια. Έτσι έχουμε

$$t = 3 + \frac{2}{12} + \frac{14}{360} \simeq 3.205$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο συνεχούς ανατοκισμού και έχουμε ότι το τελικό ποσό είναι ίσο με

$$K_t = 500 \cdot e^{0.03 \cdot 3.205} \simeq 550.462$$

□

Άσκηση 61 *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 4 χρόνια, 3 μήνες και 18 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού. Ποια είναι η διαφορά με το αν τοκιζόταν για ίδιο χρονικό διάστημα με το ίδιο επιτόκιο αλλά τριμηνιαίου ανατοκισμού;*

ΛΥΣΗ. Η χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια είναι

$$t = 4 + \frac{3}{12} + \frac{18}{360} = 4.3$$

Στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού το τελικό κεφάλαιο είναι ίσο με

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.03 \cdot 4.3} \simeq 1.706,53$$

Στην περίπτωση τριμηνιαίου ανατοκισμού το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{17} \cdot \left(1 + \frac{18}{90} \cdot \frac{0.03}{4}\right) \simeq 1.705,72$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 62 *Έστω ότι το ποσό των 2.500 Ευρώ τοκίζεται με τριμηνιαίο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού για 2 χρόνια, 4 μήνες και 24 ημέρες. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

ΛΥΣΗ. Εδώ το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο άρα ο χρόνος τοκισμού θα πρέπει να μετατραπεί σε τρίμηνα (και όχι χρόνια). Έτσι έχουμε

$$t = \frac{2 \cdot 360}{90} + \frac{4 \cdot 30}{90} + \frac{24}{90} = 9.6$$

'ρα το τελικό ποσό θα είναι

$$K_t = 2.500 \cdot e^{0.02 \cdot 9.6} \simeq 3.029,17$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 63 *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται με 4μηνιαίο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού και δίνει τελικό κεφάλαιο 1.800 Ευρώ. Πόσο χρόνο τοκίστηκε;*

ΛΥΣΗ. Ισχύει η σχέση

$$1.800 = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Λύνοντας ως προς t προκύπτει ότι

$$t = \frac{1}{i} \ln \frac{1.800}{1.500} \backsimeq 9.11$$

Η απάντηση είναι ότι το ποσό τοκίστηκε για 9.11 τετράμηνα. □

ΑΣΚΗΣΗ 64 *Έστω ότι 500 Ευρώ τοκίζονται με ημερήσιο επιτόκιο $i = 0.001$ συνεχούς ανατοκισμού και έχει τελικό κεφάλαιο 510 Ευρώ. Πόσο χρόνο ανατοκίστηκε; Η απάντηση να δοθεί σε χρόνια.*

ΛΥΣΗ. Από την σχέση

$$510 = 500 \cdot e^{0.001 \cdot t}$$

προκύπτει ότι

$$t = \frac{1}{0.001} \ln \frac{510}{500} \backsimeq 19.8$$

Επειδή το επιτόκιο είναι ημερήσιο, το αποτέλεσμα που πήραμε αναφέρεται σε ημέρες. Για να δώσουμε την απάντηση σε χρόνια αρκεί να διαιρέσουμε με 360 οπότε το χρονικό διάστημα τοκισμού είναι $\frac{19.8}{360} \backsimeq 0.05$ χρόνια. □

12.1 Ισοδυναμία Επιτοκίων

Έστω ότι η τράπεζα T_1 χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού και έστω η τράπεζα T_2 εξαμηνιαίο επιτόκιο 1.1% συνεχούς ανατοκισμού. Ποια είναι η διαφορά όταν τοκίσουμε το ποσό των 1.500 Ευρώ για χρονικό διάστημα 2 χρόνων, 3 μηνών και 20 ημερών;

Όταν τοκίσουμε τα χρήματά μας στην τράπεζα T_1 τότε το τελικό ποσό θα είναι

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Πρέπει να μετατρέψουμε την χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια. Έχουμε ότι

$$t \backsimeq 2.3$$

Αντικαθιστώντας το t προκύπτει το τελικό ποσό το οποίο θα είναι $K_t \backsimeq 1.570,6$.

Από την άλλη μεριά, τοκίζοντας το ίδιο ποσό στην τράπεζα T_2 θα έχουμε ως τελικό ποσό

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot e^{0.011 \cdot 4.6} \backsimeq 1.577,8$$

Στην περίπτωση αυτή μετατρέψαμε τη χρονική διάρκεια σε εξάμηνα.

Ποιο έπρεπε να είναι το επιτόκιο στην τράπεζα T_2 για να έχουμε το ίδιο τελικό ποσό; Για να έχουμε το ίδιο τελικό ποσό πρέπει να ισχύει

$$1.500 \cdot e^{0.02 \cdot 2.3} = 1.500 \cdot e^{i \cdot 4.6}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα θα πρέπει να είναι ίσοι οι εκθέτες το οποίο σημαίνει ότι $i = 0.01$. Διαπιστώνουμε ότι η τράπεζα T_2 πρέπει να έχει το μισό επιτόκιο από την τράπεζα T_1. Σημειώστε ότι το επιτόκιο της τράπεζας T_1 αναφέρεται σε έτος ενώ της T_2 σε εξάμηνο, δηλαδή στο μισό χρόνο. Αυτό δεν είναι τυχαίο, δηλαδή αν η τράπεζα T_1 έχει επιτόκιο i_1 σε χρονικές μονάδες t_1 συνεχούς ανατοκισμού και η τράπεζα T_2 σε χρονικές μονάδες t_2 τότε πρέπει να χρησιμοποιεί επιτόκιο $i_2 = i_1 \cdot \frac{t_2}{t_1}$. Αν τοκίσουμε 1 Ευρώ με επιτόκιο i_1 συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε t_1 χρονικές μονάδες θα έχουμε μετά από χρονικό διάστημα t το εξής τελικό ποσό

$$K_t = e^{i_1 \cdot \frac{t}{t_1}}$$

Έτσι, αν 1 Ευρώ τοκιστεί για το ίδιο χρονικό διάστημα t αλλά με επιτόκιο i_2 που αναφέρεται σε t_2 χρονικές μονάδες τότε για να έχουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο θα πρέπει να ισχύει

$$e^{i_1 \cdot \frac{t}{t_1}} = e^{i_2 \frac{t}{t_2}}$$

από το οποίο έχουμε ως αποτέλεσμα ότι $\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Προφανώς όλοι οι αριθμοί t, t_1, t_2 θα πρέπει να είναι γραμμένοι στις ίδιες χρονικές μονάδες (π.χ. χρόνια).

Έτσι προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 65 (Ισοδύναμα Επιτόκια Συνεχούς Ανατοκισμού) *Έστω επιτόκιο i_1 συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε t_1 χρονικές μονάδες και i_2 επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε t_2 χρονικές μονάδες. Τότε τα επιτόκια θα λέγονται ισοδύναμα όταν*

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 66 *Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα t (σε χρόνια) με ετήσιο επιτόκιο $i_1 = 0.02$ συνεχούς ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο τριμηνιαίο επιτόκιο i_2 συνεχούς ανατοκισμού;*

ΛΥΣΗ. Αν τοκίσουμε το ποσό αυτό με το πρώτο επιτόκιο θα έχουμε τελική αξία

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Αν το τοκίσουμε με το δεύτερο επιτόκιο θα έχει τελική αξία

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot e^{i_2 \cdot t \cdot 4}$$

Εδώ μετατρέψαμε τα t χρόνια σε τρίμηνα. Για να βρούμε το i_2 εξισώνουμε τα τελικά ποσά και έχουμε

$$1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t} = 1.500 \cdot e^{i_2 \cdot t \cdot 4}$$

Αυτό σημαίνει ότι $i_2 = \frac{0.02}{4}$. Σημειώστε ότι για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα τοκισμού t τα τελικά ποσά θα είναι ίδια αν το $i_2 = \frac{0.02}{4}$. $\square$

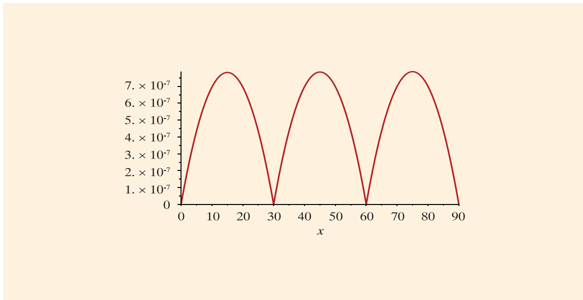
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 67 *Παρατηρούμε ότι όταν τα i_1 και i_2 είναι ισοδύναμα επιτόκια συνεχούς ανατοκισμού τότε αν ένα οποιοδήποτε ποσό τοκιστεί με τον ένα ή τον άλλο τρόπο για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα t θα έχει την ίδια τελική αξία. Αυτό δεν ισχύει για τα ισοδύναμα επιτόκια που δεν είναι συνεχούς ανατοκισμού. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ακόμη ένα πλεονέκτημα του συνεχούς ανατοκισμού.*

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το ερώτημα της ισοδυναμίας επιτοκίου συνεχούς χρόνου με επιτόκιο περιοδικής κεφαλαιοποίησης τόκων.

Αν ένα ποσό K τοκισθεί με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού θα δώσει τελική αξία μετά από χρόνο t ίση με $K \cdot e^{0.03 \cdot t}$. Αν το ίδιο ποσό K τοκισθεί με ετήσιο επιτόκιο i μηνιαίου ανατοκισμού τότε μετά από N μήνες θα έχει τελική αξία ίση με $K \cdot (1 + \frac{i}{12})^N$. Ποιο πρέπει να είναι το επιτόκιο i έτσι ώστε οι τελικές αξίες να συμπίπτουν στο τέλος του κάθε μήνα;

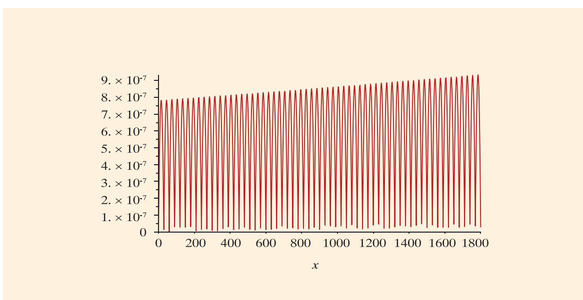
Για να υπολογίσουμε το επιτόκιο i εξισώνουμε τα ποσά $K \cdot e^{0.03 \cdot \frac{1}{12}}$ και $K \cdot (1 + \frac{i}{12})$. Προκύπτει λοιπόν ότι $i = 12 \cdot (e^{0.03 \cdot \frac{1}{12}} - 1) \simeq 0.030037536$. Υπό την έννοια αυτή τα επιτόκια είναι ισοδύναμα διότι ίσα ποσά που τοκίζονται για πολλαπλάσια του μήνα δίνουν ίσες τελικές αξίες.

Στο σχήμα 11 βλέπουμε την διαφορά που έχουν τα τελικά ποσά όταν τοκιστεί ένα Ευρώ με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Η διαφορά είναι υπέρ του επιτοκίου με μηνιαίο ανατοκισμό.



Σχήμα 11: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 90 ημέρες

Στο σχήμα 12 παρατηρούμε ότι το μέγιστο της διαφοράς των τοκισμένων ποσών αυξάνεται.



Σχήμα 12: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες

Στο σχήμα 13 βλέπουμε την διαφορά των τοκισμένων ποσών για 90 ημέρες όταν όμως το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι λίγο παραπάνω από το ισοδύναμο, δηλαδή $i = 0.03001$. Διαπιστώνουμε ότι τις πρώτες ημέρες πάλι υπερτερεί το επιτόκιο περιοδικού ανατοκισμού αλλά τελικά υπερτερεί αυτό του συνεχούς ανατοκισμού.

Σχήμα 13: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 90 ημέρες όταν το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $i = 0.03001$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 68 *Έστω κεφάλαιο τοκίζεται με επιτόκιο ετήσιου ανατοκισμού i. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού;*

Απάντηση. Έστω ένα Ευρώ τοκίζεται για ένα χρόνο με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού i. Τότε το τελικό ποσό θα είναι $1 + i$. Αν τοκισθεί για έναν χρόνο με ετήσιο επιτόκιο $i^{'}$ και συνεχή ανατοκισμό τότε το τελικό ποσό θα είναι $e^{i^{'}}$ και αφού τα επιτόκια είναι ισοδύναμα τότε θα πρέπει και οι τελικές αξίες των κεφαλαίων να είναι ίσες. Επομένως, τα επιτόκια θα ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$1 + i = e^{i'} \Rightarrow i' = \ln(1 + i)$$

Συνεπώς ίδια κεφάλαια θα έχουν ίσες τελικές αξίες σε πολλαπλάσια του έτους. $\square$

12.2 Συνεχής Ανατοκισμός και Μέσο Επιτόκιο

Θα εξετάσουμε τώρα την έννοια του μέσου επιτοκίου όταν τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ τοκίζονται με επιτόκια περιοδικού ή συνεχούς ανατοκισμού. Υποθέτουμε ότι το κεφάλαιο K_j τοκίζεται για χρονικό διάστημα t_j με επιτόκιο i_j που αναφέρεται σε k_j χρονικές μονάδες. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι της μορφής

$$K_j^t = K_j \cdot (1 + i_j)^{[\frac{t_j}{k_j}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{t_j}{k_j} - [\frac{t_j}{k_j}]\right) i_j\right)$$

ενώ αν είναι συνεχής ανατοκισμός το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_j^t = K_j \cdot e^{i_j \cdot \frac{t_j}{k_j}}$$

Ας θυμηθούμε την έννοια του μέσου χρόνου τοκισμού (δες ορισμό 20). Ισχύει ότι

$$t = \frac{\sum_{j=1}^n K_j t_j}{\sum_{j=1}^n K_j} \quad \text{(μέσος χρόνος τοκισμού)}$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το επιτόκιο i συνεχούς ανατοκισμού τέτοιο ώστε αν τοκίσουμε με αυτό το συνολικό κεφάλαιο $K = \sum_{j=1}^{n} K_j$ για το μέσο χρόνο τοκισμού t να έχει τελική αξία ίση με $\sum_{j=1}^{n} K_j^t$. Εξισώνοντας προκύπτει ότι

$$K \cdot e^{it} = \sum_{j=1}^{n} K_j^t$$

'ρα

$$\boxed{i = \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j^t}{K} \qquad \text{(μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού)}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 69 *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα 3 χρόνων, 5 μηνών και 6 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 3% εξαμηνιαίου ανατοκισμού. Επιπλέον, το ποσό των 2.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα 4 χρόνων, 3 μηνών και 23 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 4% συνεχούς ανατοκισμού. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού;*

ΛΥΣΗ. Η τελική αξία των 1.500 Ευρώ θα είναι

$$K_1^t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{156}{180}\frac{0.03}{2}\right) \approx 1.661, 48$$

Από την άλλη μεριά η τελική αξία του ποσού των 2.500 Ευρώ θα είναι

$$K_2^t = 2.500 \cdot e^{0.04 \cdot 4.31} \backsimeq 2.970, 38$$

Δηλαδή το άθροισμα είναι περίπου 4.631,86 Ευρώ.

Ο μέσος χρόνος τοκισμού t είναι

$$t = \frac{1.500 \cdot 3.34 + 2.500 \cdot 4.31}{1.500 + 2.500} \backsimeq 3.97$$

'ρα το μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι ίσο με

$$i = \frac{1}{3.97} \ln \frac{4.631,86}{4.000} \backsimeq 0.036$$

Δηλαδή, αν τοκίσω το ποσό των 4.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.036$ συνεχούς ανατοκισμού για χρονικό διάστημα $t = 3.97$ χρόνια θα έχω την ίδια τελική αξία. $\square$

13 Προεξόφληση Τίτλων στον Ανατοκισμό

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετήσαμε το πρόβλημα της προεξόφλησης τίτλων υποθέτοντας απλή κεφαλαιοποίηση. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα υποθέτοντας σύνθετη κεφαλαιοποίηση και θα παρουσιάσουμε την «φυσική» γενίκευση της προεξόφλησης στην περίπτωση αυτή.

Προφανώς, η προεξόφληση σε σύνθετη κεφαλαιοποίηση χωρίζεται επίσης σε εξωτερική και εσωτερική.

13.1 Εξωτερική Προεξόφληση

Έστω ότι i το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης το οποίο αναφέρεται σε t χρονικές μονάδες και το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες. Το ονομαστικό επιτόκιο θα είναι $i' = \frac{\hat{t}}{t}$.

Για να υπολογίσουμε το εξωτερικό προεξόφλημα ενός τίτλου με ονομαστική αξία K όταν προεξοφληθεί t χρόνο πριν την λήξη του θα σκεφτούμε ως εξής (δες περίπτωση απλού τόκου). Αν τοκίσουμε το ποσό K για χρόνο $-t$ με επιτόκιο i' το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες τότε το τελικό ποσό (ή αλλιώς η πραγματική αξία του τίτλου) θα είναι

$$K_{-t} = K \cdot (1+i')^{-[\frac{t}{\hat{t}}]} \cdot \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{t}} - [\tfrac{t}{\hat{t}}]\right) \cdot i'\right)$$

(πραγματική αξία εξωτερικής προεξόφλησης)

Το εξωτερικό προεξόφλημα ενός τίτλου με ονομαστική αξία K θα είναι

$$E = K - K_{-t}$$

Σημειώστε ότι το εξωτερικό προεξόφλημα στην συνθέτη κεφαλαιοποίηση τείνει στο μηδέν καθώς το t τείνει στο άπειρο σε αντίθεση με το εξωτερικό προεξόφλημα στον απλό τόκο.

Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού η πραγματική αξία του τίτλου θα είναι στην εξωτερική προεξόφληση

$K_{-t} = K \cdot e^{-ti}$ (πραγματική αξία συνεχούς ανατοκισμού)

όπου το i είναι το επιτόκιο προεξόφλησης που αναφέρεται σε $\hat{t}$ περιόδους και ο χρόνος t θα είναι γραμμένος σε πολλαπλάσια του $\hat{t}$ (όχι κατά ανάγκη ακέραια).

13.2 Εσωτερική Προεξόφληση

Για να υπολογίσουμε την πραγματική αξία ενός τίτλου με εσωτερική προεξόφληση θα σκεφτούμε ως εξής. Η πραγματική αξία Π του τίτλου t χρόνο πριν την λήξη του θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αν τοκιστεί με επιτόκιο $i^{'}$ το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες να δίνει τελικό κεφάλαιο ίσο με την ονομαστική αξία του τίτλου. Δηλαδή

$$\Pi \cdot (1+i^{'})^{[\frac{t}{\hat{t}}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{t}{\hat{t}} - [\frac{t}{\hat{t}}]\right) \cdot i^{'}\right) = K$$

Συνεπώς η πραγματική αξία του τίτλου με εσωτερική προεξόφληση θα είναι

$$\Pi = \frac{K \cdot (1+i^{'})^{-[\frac{t}{\hat{t}}]}}{\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i^{'}\right)}$$

(πραγματική αξία εσωτερικής προεξόφλησης) 'ρα το προεξόφλημα στην εσωτερική προεξόφληση θα είναι

$$E = K - \Pi$$

Παρόμοια με την εξωτερική προεξόφληση, όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής τότε η πραγματική αξία στην εσωτερική προεξόφληση συμπίπτει με αυτή της εξωτερικής και άρα

$$K_{-t} = K \cdot e^{-ti}$$

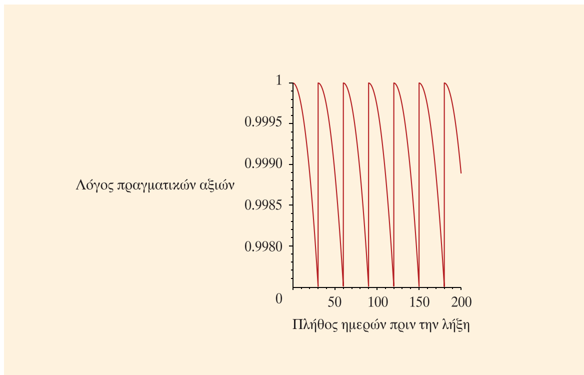
(πραγματική ή παρούσα αξία συνεχούς ανατοκισμού)

Υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό τα πράγματα είναι απλούστερα, η εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση συμπίπτουν αλλά και οι διάφοροι υπολογισμοί είναι ευκολότεροι (π.χ. εύρεση του χρόνου προεξόφλησης, εύρεση του επιτοκίου).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 70 *Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι το εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα στην σύνθετη (περιοδική και όχι συνεχή) κεφαλαιοποίηση δεν έχουν μεγάλη διαφορά. Στην πραγματικότητα, όπως φαίνεται άλλωστε και από τους παραπάνω τύπους, συμπίπτουν σε ακέραια πολλαπλάσια του χρόνου ανατοκισμού. Η διαφορά είναι μονάχα στο χρόνο μεταξύ δυο κεφαλαιοποιήσεων του τόκου. Για να το δούμε αυτό ας σχηματίσουμε τον λόγο της πραγματικής (εξωτερικού προεξοφλήματος) αξίας δια την πραγματική (εσωτερικού προεξοφλήματος) ο οποίος είναι*

$$\left(1-\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)$$

Στο σχήμα 14 βλέπουμε τον λόγο των πραγματικών αξιών όταν $i = 0.05$ *μηνιαίου ανατοκισμού. Φαίνεται ότι η πραγματική αξία είναι λίγο μεγαλύτερη στην εσωτερική προεξόφληση.* □



Σχήμα 14: Λόγος πραγματικής (εξωτερικής) αξίας δια πραγματικής (εσωτερικής) αξίας. Εδώ $i = 0.05$ μηνιαίου ανατοκισμού.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε μέσω παραδειγμάτων μονάχα την εσωτερική προεξόφληση μιας και η εξωτερική είναι παρόμοια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 71 (ΕΥΡΕΣΗ ΧΡΟΝΟΥ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ) *Έστω ότι η ονομαστική αξία ενός γραμματίου είναι 10.000 Ευρώ με χρόνο λήξης 2 χρόνια από σήμερα. Υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση με ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης και ανατοκισμού* $i = 0.1$ *θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή που πρέπει να προεξοφληθεί για να λάβουμε το ποσό των 9.500 Ευρώ.*

Όπως έχουμε πει η πραγματική ή παρούσα αξία ενός τίτλου στην εσωτερική προεξόφληση δίνεται από τον τύπο

$$\Pi = \frac{K\cdot(1+i^{'})^{-[\frac{t}{\hat{t}}]}}{\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)}$$

Σημειώστε ότι ο αριθμός $[\frac{t}{\hat{t}}]$ *είναι ακέραιος αριθμός ενώ ο* $\left(\frac{t}{\hat{t}} - [\frac{t}{\hat{t}}]\right)$ *βρίσκεται μεταξύ του μηδέν και της μονάδος. Επομένως μπορούμε να γράψουμε*

$$\Pi = \frac{K\cdot(1+i^{'})^{-n}}{\left(1+q\cdot i'\right)}$$

με $n \in \mathbb{N}$ *και* $q \in (0,1)$ *τα οποία είναι άγνωστα ενώ γνωστά είναι τα* $\Pi = 9.500$, $K = 10.000$ *και* $i = 0.1$.

Όπως σε προηγούμενα προβλήματα θα υπολογίσουμε πρώτα το n *(τα χρόνια δηλαδή). Για να το κάνουμε αυτό παρατηρούμε ότι*

$$10.000\cdot(1+0.1)^{-(n+1)} \leq 9.500 \leq 10.000\cdot(1+0.1)^{-n}$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

$$n \leq \frac{\ln 10.000 - \ln 9.500}{\ln(1+0.1)} \leq n+1$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$n = \left[\frac{\ln 10.000 - \ln 9.500}{\ln(1+0.1)}\right] = [0.53] = 0$$

Δηλαδή πρέπει να προεξοφλήσουμε το γραμμάτιο σε λιγότερο από χρόνο. Μας μένει να υπολογίσουμε το q. Αντικαθιστώντας το n έχουμε ότι

$$9.500 = \frac{10.000}{1 + q \cdot 0.1}$$

Λύνοντας ως προς το q έχουμε

$$q = \frac{50}{95}$$

ή αλλιώς περίπου 189 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου. □

Ασκηση 72 (Ευρεση Παρουσης Αξιας) *Έστω γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ πρέπει να προεξοφληθεί 100 ημέρες νωρίτερα από την λήξη του. Υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση και ετήσιο επιτόκιο $i = 0.1$ τριμηνιαίου ανατοκισμού υπολογίστε την αξία κατά την ημέρα της προεξόφλησης.*

Λυση. Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο θα είναι $i^{'} = \frac{0.1}{4}$. Η πραγματική αξία του γραμματίου 100 ημέρες πριν την λήξη θα είναι, σημειώνοντας ότι οι 100 ημέρες είναι $n = 1$ τρίμηνα και $q = \frac{10}{90}$ του τριμήνου,

$$\Pi = \frac{10.000 \cdot (1 + i^{'})^{-1}}{1 + \frac{10}{90} \cdot i'} = \frac{10.000 \cdot (1 + \frac{0.1}{4})^{-1}}{1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{0.1}{4}} \simeq 9.729,07$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 73 (ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ) *Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού εσωτερικής προεξόφλησης αν είναι γνωστό ότι το προεξόφλημα είναι 100 Ευρώ όταν προεξοφληθεί γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ 150 ημέρες πριν την λήξη του.*

ΛΥΣΗ. Εφόσον το προεξόφλημα είναι 100 Ευρώ προκύπτει ότι η πραγματική αξία του γραμματίου είναι $\Pi = 9.500$ Ευρώ. Οι 100 ημέρες είναι $n = 3$ μήνες και $q = 1/3$ του μήνα. Αν το γραμμάτιο είχε προεξοφληθεί τρεις μήνες πριν την λήξη του θα είχε πραγματική αξία μεγαλύτερη των 9.500 Ευρώ ενώ αν είχε προεξοφληθεί 4 μήνες πριν την λήξη του θα είχε μικρότερη. Από αυτά δημιουργούμε τις εξής ανισότητες

$$\Pi_{4 \text{ μήνες}} \leq 9.500 \leq \Pi_{3 \text{ μήνες}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\frac{10.000}{(1+i)^4} \leq 9.500 \leq \frac{10.000}{(1+i)^3}$$

Δηλαδή

$$0.012905895 \leq i \leq 0.017244768$$

Όπως σε προηγούμενη παράγραφο, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα για την καλύτερη προσέγγιση του επιτοκίου. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να σχηματίσουμε μια συνάρτηση f η ρίζα της οποίας θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο.

Εφόσον

$$9.500 = \frac{10.000 \cdot (1+i)^{-3}}{1 + \frac{1}{3} \cdot i}$$

τότε θέτοντας

$$f(x) = \frac{10.000}{(1+x)^3(1+\frac{1}{3}x)} - 9.500$$

διαπιστώνουμε ότι η ρίζα της f θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο. Η μέθοδος του Νεύτωνα χρειάζεται και αρχική τιμή. Ο αριθμός $x_0 = \frac{1}{3} \cdot 0.012905895 + \frac{2}{3} \cdot 0.017244768 = 0.01579847700$ είναι μια καλή αρχική τιμή. Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου του Νεύτωνα μας δίνει $x_1 = 0.01549878363$ ενώ η δεύτερη μας δίνει $x_2 = 0.01549897200$. Διαπιστώνουμε ότι είναι πολύ κοντά η δεύτερη με την πρώτη επομένως μπορούμε να σταματήσουμε τις επαναλήψεις εδώ. Δεχόμαστε ως επιτόκιο (μηνιαίο) τον αριθμό 0.01549897200 συνεπώς το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού είναι $0.01549897200 \cdot 12 = 0.1859876640$ δηλαδή κάτι παραπάνω από 18%. □

ΑΣΚΗΣΗ 74 *Έστω γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού 10% και δίνει προεξόφλημα 100 Ευρώ. Να βρεθεί ο χρόνος προεξόφλησης σε ημέρες.*

ΛΥΣΗ. Η πραγματική αξία του γραμματίου υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό στην προεξόφληση είναι

$$K_{-t} = 10.000 \cdot e^{-t \cdot 0.1}$$

Το προεξόφλημα είναι $E = 10.000 - K_{-t} = 100$ άρα η πραγματική αξία είναι 9.900 Ευρώ. Λύνοντας ως προς t προκύπτει ότι

$$t = 10 \cdot \ln \frac{100}{99} \backsimeq 36 \text{ (ημέρες πριν την λήξη)}$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 75 *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται 100 ημέρες νωρίτερα δίνοντας 9.600 Ευρώ πραγματική αξία. Να βρεθεί το επιτόκιο προεξόφλησης συνεχούς ανατοκισμού.*

ΛΥΣΗ. Η σχέση πραγματικής και ονομαστικής αξίας του γραμματίου σε συνεχή ανατοκισμό είναι

$$9.600 = 10.000 \cdot e^{-\frac{100}{360} \cdot i}$$

Λύνοντας ως προς i προκύπτει ότι

$$i = 3.6 \cdot \ln \left(\frac{100}{96} \right) \backsimeq 0.14$$

Δηλαδή το επιτόκιο είναι περίπου 14%. $\square$

Άσκηση 76 *Έμπορος αγόρασε προϊόντα από τον προμηθευτή του αλλά πλήρωσε με γραμμάτιο αξίας 10.000 Ευρώ. Ο προμηθευτής δεν χρειάζεται τα χρήματα νωρίτερα (πριν την λήξη του γραμματίου) αλλά έχει αμφιβολίες ως προς την φερεγγυότητα του οφειλέτη. Για τον λόγο αυτό αποφασίζει να προεξοφλήσει το γραμμάτιο νωρίτερα σε μια τράπεζα και ταυτόχρονα να καταθέσει το ποσό αυτό σε μια άλλη ενδεχομένως τράπεζα μέχρι την ημερομηνία λήξης του γραμματίου. Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο προεξόφλησης είναι $i_1 = 0.1$ μηνιαίου ανατοκισμού ενώ το επιτόκιο κατάθεσης είναι επίσης μηνιαίο και ίσο με $i_2 = 0.05$ συνεχούς ανατοκισμού. Πόσες ημέρες πριν συμφέρει να προεξοφλήσει το γραμμάτιο;*

Λύση. Η πραγματική αξία του γραμματίου N ημέρες πριν την λήξη του είναι

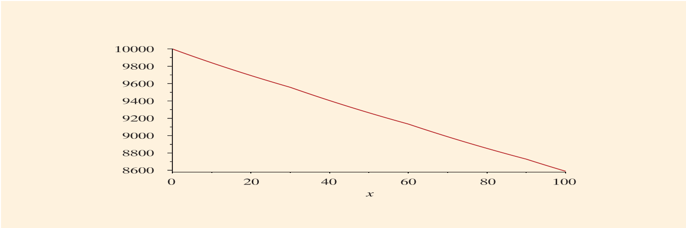
$$\Pi = \frac{10.000 \cdot (1+i_1)^{-[\frac{N}{30}]}}{1 + \left(\frac{N}{30} - [\frac{N}{30}]\right) \cdot i_1}$$

Αν τοκίσει το ποσό αυτό για N ημέρες με επιτόκιο i_2 τότε στο τέλος θα έχει το ποσό

$$\Pi \cdot e^{\frac{N}{30} \cdot i_2}$$

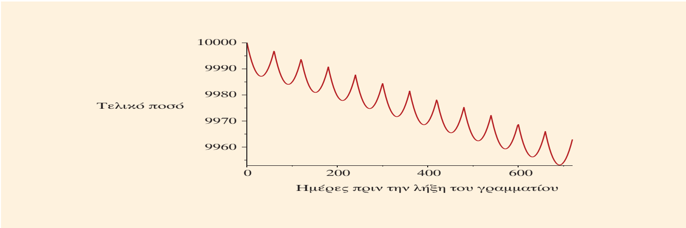
Στο σχήμα 15 φαίνεται καθαρά ότι τον συμφέρει να προεξοφλήσει τον τίτλο την προηγούμενη μέρα πριν την λήξη του γραμματίου. Το ποσό που θα πάρει θα είναι περίπου 9.983,4

Ευρώ. Με αυτό τον τρόπο μεταθέτει τον κίνδυνο στην τράπεζα χάνοντας μόνο ένα μικρό ποσό.



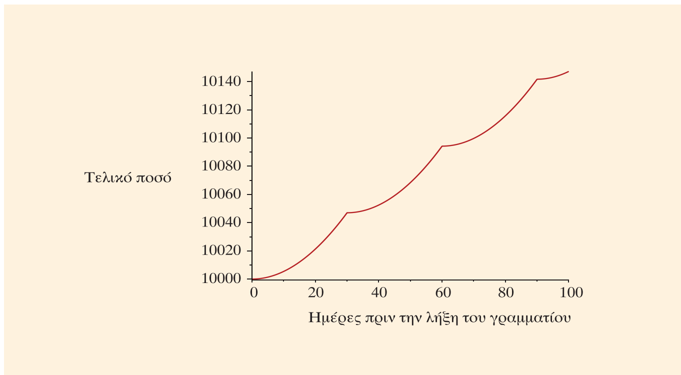
Σχήμα 15: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα. Εδώ $i_1 = 0.1$ και $i_2 = 0.05$.

Στο σχήμα 16 δείτε το γράφημα του τελικού ποσού όταν το επιτόκιο κατάθεσης είναι $i_2 = 0.095$.



Σχήμα 16: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα. Εδώ $i_1 = 0.1$ και $i_2 = 0.095$.

Παρατηρήστε ότι υποθέσαμε ότι το επιτόκιο κατάθεσης είναι μικρότερο από αυτό της προεξόφλησης. Αν τυχόν ήταν τα ίδια τότε ο προμηθευτής θα έπρεπε να προεξοφλήσει τον τίτλο το συντομότερο δυνατό, δείτε το σχήμα 17, διότι το τελικό ποσό θα ξεπεράσει την ονομαστική αξία του γραμματίου.



Σχήμα 17: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα όταν τα επιτόκια προεξόφλησης και κατάθεσης είναι ίσα.

Το φαινόμενο κατά το οποίο μπορούμε να κερδίσουμε χρήματα χωρίς ρίσκο και χωρίς αρχικό κεφάλαιο (γνωστό ως **ευκαιρία σίγουρου κέρδους χωρίς ρίσκο**) δεν μπορεί να υπάρξει στην αγορά για μεγάλο χρονικό διάστημα. Πράγματι, υποθέστε ότι η τράπεζα T_1 εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης i_1 και η τράπεζα T_2 εφαρμόζει επιτόκιο κατάθεσης $i_2 \geq i_1$. Η τράπεζα T_2 ενδιαφέρεται να προσελκύσει πολλές καταθέσεις (για να τις επενδύσει κατάλληλα) για αυτό και έχει ανεβάσει το επιτόκιο κατάθεσης. Όταν αυτή η διαφορά γίνει αντιληπτή στην αγορά τότε πολλοί θα κινηθούν καταλλήλως για να έχουν σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο.

Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Υπογράφει ο Α γραμμάτια στον Β ο οποίος τα προεξοφλεί άμεσα στην τράπεζα T_1 και έπειτα τα καταθέτει στην τράπεζα T_2. Όπως εξηγήσαμε, στο τέλος υπάρχει ένα κέρδος το οποίο το μοιράζουν μεταξύ τους. Αυτό μπορούν να συνεχίσουν να το κάνουν για πάντα, όσο διαρκεί αυτή η ευκαιρία. Η τράπεζα T_2 διαπιστώνει ότι προσελκύει πολλές καταθέσεις (χωρίς ενδεχομένως να γνωρίζει τον λόγο) και για αυτό μειώνει το επιτόκιο κατάθεσης για να αυξήσει τα κέρδη της. Από την άλλη μεριά η τράπεζα T_1 διαπιστώνει ότι προεξοφλεί όλο και περισσότερες επιταγές οπότε αυξάνει το επιτόκιο προεξόφλησης για να ενισχύσει τα κέρδη της. Με αυτό τον τρόπο σύντομα τα επιτόκια θα διαμορφωθούν κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπάρχει τέτοιου είδους ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Η έννοια του σίγουρου κέρδους χωρίς ρίσκο είναι γνωστή και ως `Arbitrage` και συναντάται στον πραγματικό κόσμο. Όμως όπως εξηγήσαμε παραπάνω η αγορά διαμορφώνεται κατάλληλα έτσι ώστε σύντομα αυτή η ευκαιρία να εξαφανιστεί. Θα αναφερθούμε ξανά σε αυτή την έννοια σε επόμενο κεφάλαιο. □

13.3 Αντικατάσταση Τίτλων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της αντικατάστασης τίτλων υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση με ανατοκισμό (περιοδικό ή συνεχή).

Έστω $g_1, \cdots, g_n$ τίτλοι με ονομαστικές αξίες $K_1, \cdots, K_n$

οι οποίοι λήγουν $t_1, \cdots, t_n$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης. Οι τίτλοι αυτοί αντικαθίστανται από τους $\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_m$ οι οποίοι έχουν ονομαστικές αξίες $\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_m$ και λήγουν σε $\hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_m$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης. Στην γενικότερη περίπτωση θεωρούμε διαφορετικά επιτόκια για κάθε τίτλο, δηλαδή $i_1, \cdots, i_n$ και $\hat{i}_1, \cdots, \hat{i}_m$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο ανατοκισμός διαφέρει από τίτλο σε τίτλο, μπορεί να είναι περιοδικός ή συνεχής.

Την ημέρα της αντικατάστασης θα πρέπει τα αθροίσματα των πραγματικών αξιών των παλαιών τίτλων και των νέων να είναι ίσα. Για τον λόγο αυτό η ημέρα της αντικατάστασης ονομάζεται και εποχή ισοδυναμίας.

Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$K_1^{-t_1} + K_2^{-t_2} + \cdots + K_n^{-t_n} = \hat{K}_1^{-\hat{t}_1} + \cdots + \hat{K}_m^{-\hat{t}_m}$$

όπου $K_i^{-t_i}$ είναι η πραγματική αξία του παλαιού τίτλου g_i και $\hat{K}_i^{-\hat{t}_i}$ η πραγματική αξία του νέου τίτλου $\hat{g}_i$.

Άσκηση 77 *Έστω οι τίτλοι g_1, g_2, g_3 με ονομαστικές αξίες $K_1 = 10.000$, $K_2 = 11.000$ και $K_3 = 12.000$. Υποθέτουμε ότι οι τίτλοι g_1, g_2 προεξοφλούνται με επιτόκια μηνιαίου ανατοκισμού $i_1 = 0.08$ και $i_2 = 0.09$ ενώ ο τίτλος g_3 προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $i_3 = 0.08$. Επιπλέον, οι τίτλοι λήγουν σε $t_1 = 100$, $t_2 = 150$ και $t_3 = 200$ ημέρες μετά την ημέρα της αντικατάστασης. Θέλουμε τους τίτλους αυτούς να* *τους αντικαταστήσουμε με ένα ο οποίος προεξοφλείται με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $\hat{i}_1 = 0.085$. Αν αποφασίσουμε ο νέος τίτλος να λήγει 250 ημέρες μετά την αντικατάσταση τότε ποια είναι η ονομαστική αξία του νέου τίτλου;*

ΛΥΣΗ. Η πραγματική αξία του g_1 τίτλου κατά την ημέρα της αντικατάστασης είναι

$$K_1^{-t_1} = 10.000 \cdot (1 + 0.08)^{-3} \cdot \left(1 + \frac{10}{90} \cdot 0.08\right) = 8.008,885277$$

Η πραγματική αξία του g_2 τίτλου κατά την ημέρα της αντικατάστασης είναι

$$K_2^{-t_2} = 11.000 \cdot (1 + 0.09)^{-5} = 7.149,245249$$

Τέλος, η πραγματική αξία του τίτλου g_3 είναι

$$K_3^{-t_3} = 12.000 \cdot e^{-\frac{200}{360} \cdot 0.08} = 11.478,34487$$

Το άθροισμα των παραπάνω πραγματικών αξιών είναι 26.636,47540 και αυτή θα πρέπει να είναι η πραγματική αξία του νέου τίτλου. Η σχέση που συνδέει την πραγματική αξία του νέου τίτλου με την ζητούμενη ονομαστική του αξία είναι η παρακάτω

$$26.636,47540 = X \cdot e^{-\frac{250}{360} \cdot 0.085}$$

Λύνοντας ως προς X προκύπτει ότι $X = 28.256,098$. $\square$

Έστω ότι θέλουμε να καταθέσουμε σήμερα στην τράπεζα ένα ποσό K με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 5% έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να εκταμιεύουμε 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους για 10 χρόνια. Ποιο είναι το μικρότερο ποσό K που πρέπει να καταθέσουμε;

Το ποσό K μετά από ένα έτος θα έχει γίνει $K(1+i)$ και εμείς θα εκταμιεύσουμε το ποσό $J = 10.000$ άρα θα έχει γίνει $K_1 = K(1+i) - J$. Στον επόμενο χρόνο το ποσό αυτό θα γίνει $K_2 = K_1(1+i) - J$ και τέλος $K_{10} = K_9(1+i) - J \geq 0$. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το ελάχιστο K ούτως ώστε το $K_{10} \geq 0$. Για τέτοιου είδους προβλήματα θα ορίσουμε τις λεγόμενες ράντες (ή αλλιώς σειρές πληρωμών).

ΟΡΙΣΜΟΣ 78 *Ράντα καλείται σειρά κεφαλαίων τα οποία καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.*

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται θα ονομάζεται όρος ή δόση της ράντας. Αν ο όρος μιας ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου τότε η ράντα θα ονομάζεται ληξιπρόθεσμη ενώ αν καταβάλλεται στην αρχή θα ονομάζεται προκαταβλητέα.

Η έννοια της παρούσης αξίας ενός μελλοντικού ποσού θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα σε αυτό το κεφάλαιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 79 *Ένα ποσό $\hat{K}$ σήμερα και ένα ποσό K σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον θα λέγονται* **οικονομικά ισοδύναμα ποσά** *όταν μπορώ να τοκίσω σήμερα το ποσό $\hat{K}$ κατάλληλα έτσι ώστε το ποσό αυτό μαζί με τους τόκους να είναι ίσο με K στην συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή. Επιπλέον, το ποσό $\hat{K}$ ονομάζεται η* **παρούσα αξία** *του ποσού K.*

Ο τοκισμός αυτός μπορεί να είναι με την μέθοδο του απλού τόκου ή του σύνθετου (περιοδικού ή συνεχούς ανατοκισμού). Σε κάθε περίπτωση η παρούσα αξία μεταβάλλεται και εξαρτάται βέβαια και από το επιτόκιο. 'ρα, δυο ποσά είναι οικονομικά ισοδύναμα όταν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένους χρόνους, με συγκεκριμένο επιτόκιο και συγκεκριμένο τρόπο κεφαλαιοποίησης. Σημειώστε ότι η παρούσα αξία ενός ποσού είναι διαφορετική για μια τράπεζα και διαφορετική για έναν ιδιώτη διότι η τράπεζα μπορεί να δανείσει (νομίμως) με μεγαλύτερο επιτόκιο από ότι ένας οποιοσδήποτε ιδιώτης.

14 Εύρεση της παρούσης αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσω στην τράπεζα σήμερα έτσι ώστε μετά από ένα χρόνο να έχει γίνει 1 Ευρώ όταν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι i; Αν το ποσό που πρέπει να καταθέσω είναι K τότε μετά από ένα χρόνο θα γίνει $K(1+i)$

οπότε για να είναι ίσο με 1 Ευρώ πρέπει $K = \frac{1}{1+i}$. Αυτό το ποσό ονομάζεται η παρούσα αξία του 1 Ευρώ μετά από ένα χρόνο από σήμερα. Παρόμοια, η παρούσα αξία 1 Ευρώ μετά από n χρόνια από σήμερα θα είναι $\Pi = \frac{1}{(1+i)^n}$ και γενικότερα η παρούσα αξία του ποσού K έπειτα από n χρόνια είναι $\hat{K} = \frac{K}{(1+i)^n}$.

Αντίστοιχα, αν υποθέσουμε συνεχή ανατοκισμό τότε η παρούσα αξία του ποσού K μετά από t χρονικές μονάδες θα είναι

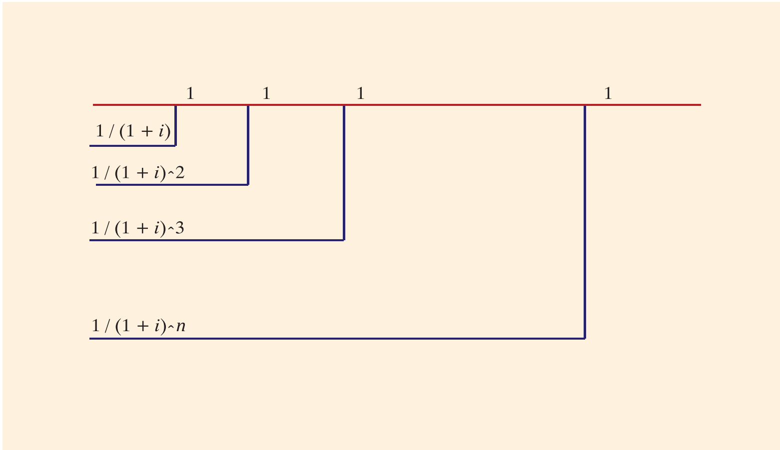
$$\hat{K} = K \cdot e^{-t \cdot i}$$

όπου το t και το i αναφέρονται προφανώς στις ίδιες χρονικές μονάδες. Εύκολα βλέπουμε λοιπόν ότι η παρούσα αξία ενός ποσού K διαφέρει ανάλογα με τον τρόπο τοκισμού αλλά και με το επιτόκιο.

Έστω ότι καταβάλλουμε 1 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους για n χρόνια με ετήσιο επιτόκιο i. Αυτή η σειρά πληρωμών είναι μια ληξιπρόθεσμη ράντα και θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία της. Η παρούσα αξία της ράντας είναι το άθροισμα των επιμέρους αξιών (δες σχήμα 18) και επομένως

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Συμβολίζουμε με $\alpha_{\overline{n}|i}$ την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων με επιτόκιο i. Όπως διαπιστώνουμε η παρούσα αξία είναι μια γεωμετρική πρόοδος και είναι ίση με



Σχήμα 18: Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1-U^n}{i}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων)

όπου $U = \frac{1}{1+i}$. Πράγματι, θέτοντας

$$S_{n+1} = \frac{1}{1+i} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

έχουμε ότι

$$S_{n+1} - \frac{1}{1+i} \cdot S_{n+1} = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}$$

Λύνοντας ως προς S_{n+1} καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$S_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Αν αντί για 1 Ευρώ καταβάλλουμε K Ευρώ στο τέλος κάθε έτους τότε η παρούσα αξία της αντίστοιχης ράντας θα είναι ίση με $K\alpha_{\overline{n}|i}$. Υπολογίζοντας την παράγωγο ως προς i παρατηρούμε ότι η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το επιτόκιο.

Γυρνώντας στο παράδειγμα που δώσαμε στην αρχή της παραγράφου θα χρησιμοποιήσουμε ράντες για τον υπολογισμό του αρχικού κεφαλαίου K. Αυτό θα είναι ίσο με

$$K = J\alpha_{\overline{n}|i} = J\alpha_{\overline{10}|0.05}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι καθώς το $n \to \infty$ έχουμε ότι $U^n \to 0$ άρα ορίζουμε την λεγόμενη διηνεκή ράντα να είναι η

$$\alpha_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η περίπτωση όπου χρειαζόμαστε την παρούσα αξία ράντας (την οποία συμβολίζουμε με $\alpha^m_{\overline{n}|i}$) η οποία ξεκινά μετά από $m-1$ χρονικές περιόδους. Σε αυτή την περίπτωση, όταν έχουμε n συνολικά όρους, ισχύει ότι

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^m} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{m+n-1}}$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα αυτό υπολογίζουμε την διαφορά

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} - \frac{1}{1+i}\alpha^m_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^m} - \frac{1}{(1+i)^{n+m+1}}$$

'ρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\boxed{\alpha^m_{\overline{n}|i} = \tfrac{\alpha_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{m-1}}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

και η αντίστοιχη διηνεκής ράντα είναι η

$$\boxed{\alpha^m_{\overline{\infty}|i} = \tfrac{\alpha_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^{m-1}}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού με ετήσιο επιτόκιο i η παρούσα αξία του ενός Ευρώ μετά από n χρόνια θα είναι e^{-ni}. Συνεπώς, αν καταβάλλουμε 1 Ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου τότε η παρούσα αξία των ποσών αυτών θα είναι ίση με

$$\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{-i} + \cdots + e^{-ni}$$

Θέτοντας $x = e^{-i}$ και $S_{n+1} = x + x^2 + \cdots + x^n$ έχουμε ότι

$$S_{n+1} - xS_{n+1} = x^{n+1} - x$$

Λύνοντας ως προς S_{n+1} καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $S_{n+1} = x\frac{1-x^n}{1-x}$. Δηλαδή η παρούσα αξία στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού είναι

$$\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{-i}\frac{1-e^{-ni}}{1-e^{-i}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων)

Η αντίστοιχη διηνεκής ράντα θα είναι

$$\varepsilon_{\overline{\infty}|i} = e^{-i}\frac{1}{1-e^{-i}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

Εντελώς ανάλογα με πριν η αρξάμενη ράντα μετά από $m-1$ χρονικές περιόδους η οποία διαρκεί για n περιόδους θα είναι

$$\varepsilon^{m}_{\overline{n}|i} = \frac{\varepsilon_{\overline{n}|i}}{e^{(m-1)i}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

ενώ η αντίστοιχη διηνεκής ράντα θα είναι

$$\varepsilon^{m}_{\overline{\infty}|i} = \frac{\varepsilon_{\overline{\infty}|i}}{e^{(m-1)i}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Σημειώστε ότι όλες οι παραπάνω παρούσες αξίες αφορούν τις ράντες όπου η κάθε δόση είναι μια νομισματική μονάδα. Αν κάθε δόση είναι K νομισματικές μονάδες τότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την παρούσα αξία της κάθε ράντας με το K.

ΑΣΚΗΣΗ 80 *Ίδρυμα θέλει να καταβάλλει το ποσό των 1.000 Ευρώ μηνιαίως στον καλύτερο φοιτητή για τα επόμενα 4 χρόνια των σπουδών του. Για τον λόγο αυτό θα καταθέσει ένα ποσό σήμερα στην τράπεζα από την οποίο θα εκταμιεύεται το ποσό των 1.000 Ευρώ στο τέλος του κάθε μήνα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει στην τράπεζα αν το μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού είναι* $i = 0.05$;

ΛΥΣΗ. Τα 4 χρόνια αποτελούνται από 48 μήνες. Στο τέλος του πρώτου μήνα πρέπει να καταβληθούν 1.000 Ευρώ. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει σήμερα να καταβάλλει το Ίδρυμα στην τράπεζα για να είναι σε θέση να καταβάλλει το ποσό αυτό; Στην ουσία ψάχνουμε την παρούσα αξία των 1.000 Ευρώ του πρώτου μήνα η οποία είναι $\frac{1.000}{1+i}$. Παρόμοια, η παρούσα αξία των 1.000 Ευρώ τον m-οστό μήνα είναι $\frac{1.000}{(1+i)^m}$. Συνεπώς, τα χρήματα που πρέπει σήμερα να καταβάλλει το ίδρυμα είναι το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών. 'ρα πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη ράντα 48 όρων με επιτόκιο $i = 0.05$ και 1.000 Ευρώ το ποσό του κάθε όρου. Επομένως, το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το Ίδρυμα στην τράπεζα είναι ίσο με την παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 48 όρων επί 1.000 Ευρώ, δηλαδή

$$K = 1.000 \cdot \alpha_{\overline{48}|0.05} = 18.077,15782 \text{ (Ευρώ)}$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 81 *Ο Α (ηλικίας 20 ετών) κέρδισε 4.000.000 Ευρώ στο λαχείο και σκέφτεται πως θα χειριστεί το ποσό αυτό. Μια λύση είναι να το επενδύσει σε μια επιχείρηση αλλά αποφασίζει να κρατήσει ένα ποσό ούτως ώστε από την ηλικία των 60 ετών και μετά να μπορεί να παίρνει 10.000 Ευρώ ετησίως για πάντα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα στην τράπεζα όταν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι* $i = 0.05$; *Αν ο Α αποβιώσει στην ηλικία των* $60 + N$ *πόσα χρήματα θα περισσέψουν στην τράπεζα;*

ΛΥΣΗ. Το ποσό θα το καταθέσει σήμερα αλλά η πρώτη δόση θα του καταβληθεί σε 41 χρόνια από τώρα. Στην ουσία, το ζητούμενο είναι η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας αρξάμενης μετά από 40 χρόνια (δες σχήμα 19), δηλαδή το ποσό που θα καταθέσει σήμερα είναι

$$K = 10.000 \cdot \alpha^{41}_{\overline{\infty}|i} \simeq 28.410 \text{ (Ευρώ)}$$

Δηλαδή καταθέτοντας σήμερα ένα πολύ μικρό ποσό θα έχει από την ηλικία των 60 και έπειτα 10.000 Ευρώ το χρόνο για πάντα!

Θα υπολογίσουμε τώρα τα χρήματα που θα απομείνουν στην τράπεζα όταν ο Α αποβιώσει σε ηλικία $60 + N$ ετών. Καταρχάς, το ποσό των 28.410 Ευρώ που θα καταθέσει σήμερα θα γίνει 200.000 Ευρώ στην ηλικία των 60 ετών. Τόσα άλλωστε είναι τα χρήματα που χρειάζεται στην τράπεζα εκείνη την χρονική στιγμή ούτως ώστε να μπορεί να εκταμιεύει 10.000 Ευρώ το χρόνο για τα επόμενα χρόνια. Αν το δούμε ως παρούσα αξία διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας θα βρούμε ότι το ποσό που χρειάζεται στην ηλικία των 60 ετών είναι $\frac{10.000}{0.05} = 200.000$. Αν ο Α αποβιώσει στην ηλικία των $60 + N$ ετών θα έχει εκταμιεύσει το ποσό των 10.000 Ευρώ κάθε χρόνο για τα N αυτά χρόνια μετά τα 60. Η παρούσα αξία (κατά την ηλικία των 60 ετών) των ποσών αυτών θα είναι

$$10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}$$

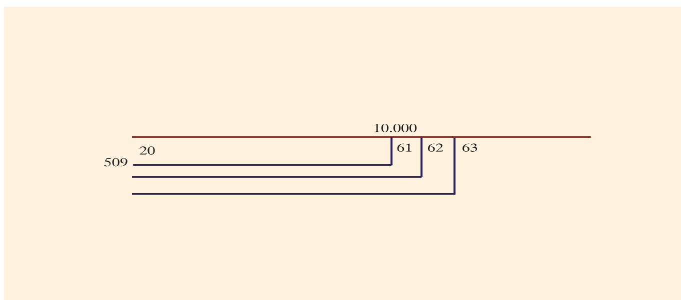
Επομένως το ποσό που θα περισσέψει θα είναι

$$200.000 - 10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}$$

Το ποσό αυτό θα τοκίζεται για τα επόμενα N χρόνια και θα είναι ίσο με

$$\left(200.000 - 10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}\right) \cdot (1 + i)^N = 200.000$$

'ρα, όποτε και αν αποβιώσει ο Α, το υπόλοιπο ποσό θα είναι το ίδιο και ίσο με αυτό που είχε στα 60 του χρόνια. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό. Σκεφτείτε ποιο ποσό πρέπει να έχει στην ηλικία των M χρόνων ούτως ώστε να μπορεί να παίρνει το ποσό των 10.000 Ευρώ κάθε επόμενο χρόνο για πάντα. Το ζητούμενο ποσό θα είναι πάλι $\frac{10.000}{i} = 200.000$ Ευρώ! Αν το δούμε διαφορετικά, οι τόκοι του ποσού των 200.000 Ευρώ κάθε χρόνο είναι 10.000 Ευρώ. Δηλαδή μπορεί να καταναλώνει κάθε χρόνο μονάχα τους τόκους έτσι ώστε το κεφάλαιο να μένει ακέραιο. $\square$



Σχήμα 19: 10.000 Ευρώ στα 61 έτη είναι οικονομικώς ισοδύναμα με $\frac{10.000}{(1+0.05)^{61}} \backsimeq 509$ Ευρώ στα 20 έτη.

Ασκηση 82 *Ο Α θέλει να καταθέσει ένα ποσό σήμερα στην τράπεζα έτσι ώστε το νεογέννητο παιδί του σήμερα να παίρνει κατά την ηλικία των 18 ετών και για τα 10 επόμενα έτη το ποσό των 10.000 Ευρώ ετησίως. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα αν το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $i = 0.03$; Υπολογίστε επίσης το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα έτσι ώστε το παιδί του να παίρνει 10.000 Ευρώ ετησίως για πάντα.*

Λυση. Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων και αρξάμενης μετά από 18 χρονικές περιόδους, δηλαδή το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα είναι

$$K = 10.000 \cdot \varepsilon^{19}_{\overline{10}|i} \simeq 49.594$$

Από την άλλη μεριά το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα ούτως ώστε το παιδί του να μπορεί να παίρνει το ποσό των 10.000 Ευρώ το χρόνο για πάντα είναι

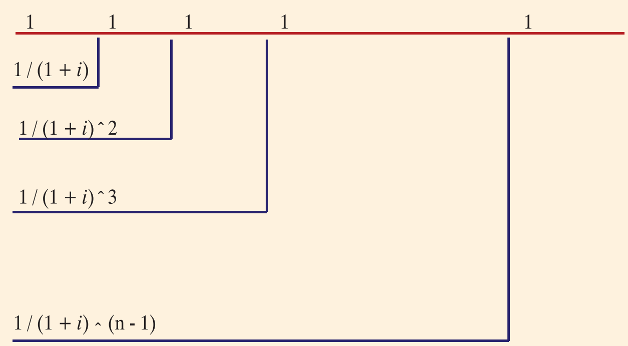
$$K = 10.000 \cdot \varepsilon^{19}_{\overline{\infty}|i} \simeq 191.350$$

Η διαφορά είναι μεγάλη όμως το πλεονέκτημα είναι σοβαρό. Το παιδί θα παίρνει για πάντα (όσο ζει) το ποσό των 10.000 Ευρώ ετησίως και ταυτόχρονα θα αφήσει με την σειρά του το ποσό των $\frac{10.000}{i}$ στο δικό του παιδί και ούτω κάθε εξής. □

15 Εύρεση της παρούσης αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις προκαταβλητέες ράντες. Η διαφορά εδώ είναι ότι το ποσό προκαταβάλλεται στην αρχή της κάθε χρονικής περιόδου. Αν συμβολίσουμε με $U = \frac{1}{1+i}$ τότε η παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα είναι (δες σχήμα 20) το άθροισμα των παρουσών αξιών, δηλαδή

$$\overline{\alpha}_{\overline{n}|i} = 1 + U + U^2 + \cdots + U^{n-1} = \frac{1 - U^n}{i}(1+i) = \alpha_{\overline{n}|i}(1+i)$$



Σχήμα 20: Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Για να δούμε την απόδειξη θέτουμε $S_n = 1+x+\cdots+x^{n-1}$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - xS_n = 1 - x^n$. Λύνοντας ως προς S_n προκύπτει η ζητούμενη ταυτότητα.

Δηλαδή, τοποθετούμε 1 Ευρώ σήμερα στην τράπεζα επομένως η παρούσα αξία του είναι 1 Ευρώ. Το 1 Ευρώ που θα τοποθετήσουμε μετά από ένα χρόνο θα έχει παρούσα αξία U και συνεχίζοντας έτσι προκύπτει το άθροισμα των σημερινών αξιών. Διαπιστώνουμε ότι η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη.

Παρόμοια, με την ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε τα εξής, στην περιοδική ανακεφαλαιοποίηση

$$\overline{\alpha}_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i}(1+i)$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας n όρων)

$$\overline{\alpha}_{\overline{\infty}|i} = \alpha_{\overline{\infty}|i}(1+i)$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)

$$\overline{\alpha}^{m}_{\overline{n}|i} = \frac{\overline{\alpha}_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας n όρων)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

$$\overline{\alpha}^{m}_{\overline{\infty}|i} = \frac{\overline{\alpha}_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

ενώ στην συνεχή ανακεφαλαιοποίηση ισχύουν τα παρακάτω

$$\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = \varepsilon_{\overline{n}|i} e^i$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας n όρων)

$$\overline{\varepsilon}_{\overline{\infty}|i} = \varepsilon_{\overline{\infty}|i} e^i$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)

$$\overline{\varepsilon}^{m}_{\overline{n}|i} = \frac{\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i}}{\varepsilon^{(m-1)i}}$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας n όρων)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

$$\overline{\varepsilon}^{m}_{\overline{\infty}|i} = \frac{\overline{\varepsilon}_{\overline{\infty}|i}}{\varepsilon^{(m-1)i}}$$

(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)

(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Για να δικαιολογήσουμε την σχέση $\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = \varepsilon_{\overline{n}|i} e^i$ έχουμε ότι

$$\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = 1 + e^{-i} + \cdots + e^{-(n-1)i} = e^i(e^{-i} + \cdots + e^{-ni}) = \varepsilon_{\overline{n}|i} e^i$$

Παρόμοια προκύπτουν και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Μπορεί κάποιος να εργαστεί στις ίδιες ασκήσεις με την προηγούμενη παράγραφο υποθέτοντας τώρα προκαταβλητέες ράντες.

16 Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

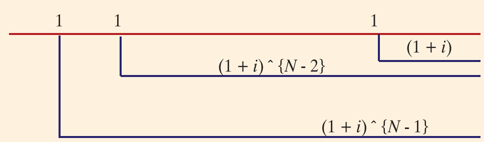
Στην άσκηση 81 ο Α έπρεπε να τοποθετήσει το ποσό των 28.410 Ευρώ σήμερα ούτως ώστε μετά από 40 χρόνια να έχει το ποσό των 200.000 Ευρώ στην τράπεζα. Όπως είδαμε το ποσό αυτό είναι αρκετό για να μπορεί να εκταμιεύει 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου για όλα τα επόμενα χρόνια. Τίθεται το εξής ερώτημα: Μπορεί να καταθέτει στην τράπεζα ένα συγκεκριμένο ποσό τον χρόνο έτσι ώστε μετά από 40 χρόνια να δημιουργήσει το ζητούμενο ποσό των 200.000 Ευρώ;

Ας δούμε το ερώτημα λίγο διαφορετικά. Έστω ότι καταθέτω 1 Ευρώ στο τέλος τους κάθε χρόνου για N χρόνια με επιτόκιο κατάθεσης i. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος των N χρόνων;

Το ποσό θα είναι

$$K = 1 \cdot (1+i)^{N-1} + \cdots + 1$$

Το πρώτο Ευρώ θα το καταθέσω στο τέλος του πρώτου έτους και άρα θα τοκιστεί για τα επόμενα $N-1$ έτη. Το δεύτερο Ευρώ θα το καταθέσω στο τέλος του δεύτερου έτους και θα τοκιστεί για τα επόμενα $N-2$ χρόνια και ούτω κάθε εξής.



Σχήμα 21: Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

'ρα μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας μιας νομισματικής μονάδας υποθέτοντας περιοδική κεφαλαιοποίηση η οποία θα είναι

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
(τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας)

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η τελική αξία (σε αντίθεση με την παρούσα αξία) ληξιπρόθεσμης ράντας τείνει στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$ συνεπώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για τελική αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας. Υπολογίζοντας την παράγωγο της τελικής αξίας ως προς το επιτόκιο i διαπιστώνουμε ότι είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το επιτόκιο.

Επίσης είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Στην περίπτωση συνεχούς κεφαλαιοποίησης θα έχουμε

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{(n-1)i} + \cdots + 1$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα αυτό θέτουμε $S_n = 1 + e^i + \cdots + e^{(n-1)i}$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - e^i S_n = 1 - e^{ni}$. Λύνοντας ως προς S_n προκύπτει η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας υποθέτοντας συνεχή κεφαλαιοποίηση η οποία είναι

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = \frac{1-e^{ni}}{1-e^i}$$

(τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας)

Διαπιστώνουμε ότι όταν το επιτόκιο είναι αυστηρά θετικό η τελική αξία τείνει στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$.

17 Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

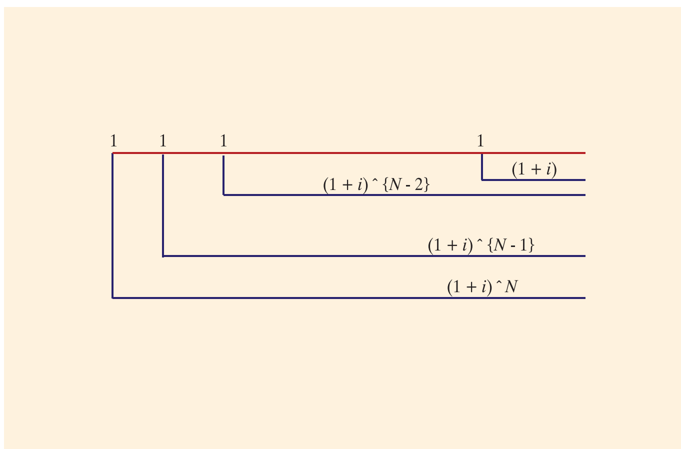
Σε αυτήν την περίπτωση καταβάλλουμε 1 Ευρώ στην αρχή του πρώτου έτους και επομένως αυτό τοκίζεται για τα επόμενα n έτη με αντίστοιχη τελική αξία. Η τελική αξία της προκαταβλητέας ράντας θα είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + \cdots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

'ρα η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας στη περίπτωση περιοδικής ανακεφαλαίωσης είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

(τελική αξία προκαταβλητέας ράντας)



Σχήμα 22: Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Παρόμοια, όταν έχουμε συνεχή ανατοκισμό η τελική αξία θα είναι

$$\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{ni} + \cdots + e^{i}$$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό θέτουμε $S_n = e^{ni} + \cdots + e^i$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - e^i S_n = e^i - e^{(n+1)i}$. Λύνοντας ως προς S_n έχουμε $S_n = e^i \frac{1-e^{ni}}{1-e^i}$.

'ρα η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας σε συνεχή ανατοκισμό είναι

$$\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} e^i$$

(τελική αξία προκαταβλητέας ράντας)

18 Κλασματικές Ράντες

Έστω ότι ο Α δανείστηκε το ποσό των 2.000 Ευρώ από τον Β. Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι i το οποίο αναφέρεται σε t χρονικές μονάδες. Ο Α θα επιστρέψει το ποσό στον Β με ισόποσες δόσεις στο μέλλον. Για να εξοφλήσει το δανεισμένο ποσό θα πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών των μελλοντικών ποσών να είναι ίσο με 2.000 Ευρώ ανεξάρτητα από την περίοδο καταβολής των δόσεων. Ας υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος ενδιαφέρεται να αποπληρώνει το δανεισμένο ποσό σε μελλοντικές δόσεις οι οποίες θα καταβληθούν σε χρόνους που δεν είναι πολλαπλάσια της χρονικής μονάδας t στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο. Αν π.χ. το επιτόκιο είναι ετήσιο ο δανειζόμενος μπορεί να θέλει να πληρώνει κάποιο χρηματικό ποσό κάθε τετράμηνο. Έτσι, προκύπτουν οι λεγόμενες **κλασματικές** ράντες τις οποίες θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα.

18.1 Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Έστω ότι το επιτόκιο i αναφέρεται σε t χρονικές μονάδες. Τότε η παρούσα αξία κλασματικής ράντας μιας νομισματικής μονάδας, με περίοδο δόσεων t_1, σύνολο δόσεων n και αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες είναι

$$\alpha^{m}_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m}^{n+m-1} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

Αν το επιτόκιο i αναφέρεται σε t χρονικές μονάδες συνεχούς ανατοκισμού τότε η παρούσα αξία της κλασματικής ράντας, αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες, θα είναι

$$\varepsilon^{m}_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m}^{m+n-1} e^{-i\cdot\frac{j\cdot t_1}{t}} = e^{-i\cdot m\cdot\frac{t_1}{t}} \frac{1-e^{-n\cdot i\cdot\frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} \qquad (10)$$

Διαπιστώνουμε ότι κάτω από την υπόθεση συνεχούς ανατοκισμού η παρούσα αξία κλασματικής ράντας έχει μια πιο συμπαγή μορφή. Επιπλέον, είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογίσουμε το επιτόκιο ή το πλήθος των δόσεων όταν όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά.

Παρόμοια με τις απλές ράντες έχουμε τις διηνεκείς και κλασματικές ράντες. Στην περίπτωση περιοδικού ανατοκισμού ισχύει ότι η παρούσα αξία της κλασματικής και αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες είναι ίση με

$$\alpha^m_{\overline{\infty}|i} = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

ενώ στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού η παρούσα αξία είναι ίση με

$$\varepsilon^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{e^{-im\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}}$$

18.2 Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Στην περίπτωση προκαταβλητέας ράντας θα έχουμε

$$\overline{\alpha}^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m-1}^{n+m-2} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι περιοδικός και

$$\overline{\varepsilon}^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m-1}^{m+n-2} e^{-i\cdot\frac{j\cdot t_1}{t}} = e^{-i(m-1)\cdot\frac{t_1}{t}} \frac{1 - e^{-n\cdot i\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

Οι αντίστοιχες διηνεκείς ράντες είναι

$$\overline{\alpha}^{m}_{\overline{\infty}|i} = \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι περιοδικός και

$$\overline{\varepsilon}^{m}_{\overline{\infty}|i} = \frac{e^{-i(m-1)\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{11}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

18.3 Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Συμβολίζουμε με T τον χρόνο λήξης της ράντας, δηλαδή μετά τον χρόνο αυτό δεν υπάρχει κανένας όρος της ράντας. Αν το επιτόκιο είναι περιοδικής κεφαλαιοποίησης τότε η τελική αξία ληξιπρόθεσμης και κλασματικής ράντας είναι

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{[\frac{T-j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{T - j\cdot t_1}{t} - [\frac{T - j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)$$

Για την περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού έχουμε

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} e^{i\frac{T-j\cdot t_1}{t}} = e^{i\frac{T-t_1}{t}} \frac{1 - e^{-i\cdot n\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{12}$$

18.4 Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Αν το επιτόκιο είναι περιοδικής κεφαλαιοποίησης τότε η τελική αξία προκαταβλητέας και κλασματικής ράντας είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{[\frac{T-j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{T-j\cdot t_1}{t} - [\frac{T-j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)$$

Για την περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού έχουμε

$$\boxed{\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{T-j\cdot t_1}{t}} = e^{i\frac{T}{t}} \frac{1-e^{-i\cdot n\cdot \frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} \qquad (13)}$$

Παρατηρηση 83 (Σχόλια επί των Κλασματικών Ραντών) *Σημειώστε ότι στην περίπτωση που το t_1 είναι ίσο με το t, δηλαδή η περίοδος της δόσης της ράντας συμπίπτει με την περίοδο κεφαλαιοποίησης, τότε η κλασματική ράντα συμπίπτει με την απλή ράντα.*

Επίσης, δεν είναι από μαθηματικής άποψης ορθό να εργαστούμε στο ισοδύναμο επιτόκιο το οποίο θα αναφέρεται στις t_1 χρονικές μονάδες για να αποφύγουμε την χρήση κλασματικής ράντας (δες άσκηση 86 παρακάτω). Όπως έχουμε διαπιστώσει τα ποσά είναι ίδια μονάχα στο Ε.Κ.Π. των t_1 και t συνεπώς τα αποτελέσματα θα διαφέρουν από τα πραγματικά. Μπορούμε όμως να το κάνουμε στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού (δες παρατήρηση 67).

Η χρονική μονάδα t_1 μπορεί κάλλιστα να είναι πολλαπλάσιο του t άρα η κλασματική ράντα είναι μια γενίκευση της απλής ράντας. Εύκολα βλέπουμε ότι η χρήση επιτοκίου συνεχούς ανατοκισμού οδηγεί σε απλούστερους υπολογισμούς και ο υπολογισμός αρχικών ή τελικών αξιών των ραντών είναι ευκολότερος ιδιαίτερα στις διηνεκείς.

ΑΣΚΗΣΗ 84 *Ο Α δανείσθηκε το ποσό των 2.000 Ευρώ από τον Β με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$ συνεχούς ανατοκισμού. Θέλει να επιστρέψει το δανεισμένο ποσό σε 4 ισόποσες δόσεις τις οποίες θα πληρώνει ανά 7 μήνες με πρώτη δόση 7 μήνες μετά τον δανεισμό. Ποιο είναι το ποσό της κάθε δόσης;*

ΛΥΣΗ. Στην περίπτωση αυτή έχουμε να κάνουμε με μια κλασματική ράντα διότι η χρονική περίοδος των 7 μηνών δεν συμπίπτει με την χρονική περίοδο κατά την οποία είναι ορισμένο το επιτόκιο. Η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη με παρούσα αξία το ποσό των 2.000 Ευρώ και το ζητούμενο είναι η δόση K. Επομένως ισχύει ότι

$$2.000 = K \cdot \varepsilon_{\overline{4}|0.05} = K \cdot e^{-0.05 \cdot \frac{7}{12}} \frac{1 - e^{-0.05 \cdot 4 \cdot \frac{7}{12}}}{1 - e^{-0.05 \cdot \frac{7}{12}}}$$

Λύνοντας ως προς K υπολογίζουμε την δόση η οποία είναι $K = 537,5346087$ Ευρώ. □

ΑΣΚΗΣΗ 85 *Θέλουμε να καταθέτουμε κάθε τρεις μήνες το ποσό των 100 Ευρώ σε ένα λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο*

$i = 0.05$. Πρώτη κατάθεση θα είναι μετά από τρεις μήνες από τώρα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 25 μήνες;

ΛΥΣΗ. Πρόκειται για μια κλασματική ράντα αφού η περίοδος καταβολής των δόσεων δεν συμπίπτει με την περίοδο κεφαλαιοποίησης των τόκων. Επίσης, πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας γνωρίζουμε την δόση $K = 100$, το πλήθος των όρων $n = 8$, το τέλος της ράντας $T = 25$ μήνες και το ζητούμενο είναι η τελική αξία. 'ρα η τελική αξία είναι ίση με

$$\begin{aligned} K_t &= 100 \cdot \sum_{j=1}^{8} (1+0.05)^{[\frac{25-j\cdot 3}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{25-j\cdot 3}{12} - [\frac{25-j\cdot 3}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 838,7916667 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 86 *Θέλουμε να καταθέτουμε κάθε τρεις μήνες το ποσό των 1.000 Ευρώ σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$. Πρώτη κατάθεση θα είναι μετά από τρεις μήνες από τώρα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 18 μήνες;*

ΛΥΣΗ. Όπως στην προηγούμενη άσκηση πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη κλασματική ράντα της οποία ψάχνουμε την τελική αξία. Έχουμε όπως πριν ότι

$$\begin{aligned} K_t &= 1.000 \cdot \sum_{j=1}^{6} (1+0.05)^{[\frac{18-j\cdot 3}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{18-j\cdot 3}{12} - [\frac{18-j\cdot 3}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 6.188,125000 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε την τελική αξία χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο επιτόκιο τριμήνου θα βρούμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Πράγματι, το ισοδύναμο επιτόκιο τριμήνου είναι το i_1 τέτοιο ώστε $(1+i_1)^4 = 1+0.05$. Προκύπτει ότι $i_1 = 0.012272234$. Η τελική αξία θα είναι

$$\hat{K}_t = 1.000 \cdot s_{\overline{6}|i_1} = 6.187,123551$$

Διαπιστώνουμε ότι οι τελικές αξίες διαφέρουν. □

ΑΣΚΗΣΗ 87 *Θέλουμε να καταθέτουμε το ποσό των 100 Ευρώ για τους επόμενους 50 μήνες σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού $i = 0.05$. Η πρώτη κατάθεση θα γίνει στο τέλος του πρώτου μήνα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 40 χρόνια;*

ΛΥΣΗ. Στην περίπτωση μας ο χρόνος λήξης της ράντας είναι $T = 40 \cdot 12$ μήνες. Η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη και κλασματική και το πλήθος των όρων είναι $n = 50$ μήνες. 'ρα η τελική αξία θα είναι

$$\begin{aligned} K_t &= 100 \cdot \sum_{j=1}^{50} (1+0.05)^{[\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12} - [\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 31.794,10495 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 88 *Καταθέτουμε το ποσό των 1.000 Ευρώ κάθε 1 χρόνο και 7 μήνες σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού $i = 0.05$. Η πρώτη δόση είναι μετά από 1 χρόνο και 7 μήνες από σήμερα και συνολικά κάνουμε αυτού του είδους την κατάθεση 20 φορές. Ποια είναι η παρούσα αξία του συνόλου των καταθέσεων και ποια η τελική αξία των μετά από 40 χρόνια; Ποια η σχέση μεταξύ της παρούσης αξίας και της τελικής;*

ΛΥΣΗ. Έχουμε να κάνουμε με ληξιπρόθεσμες και κλασματικές ράντες. Εδώ το $t_1 = 1 + \frac{7}{12} = 1,583$ και το $n = 20$ ενώ ο χρόνος λήξης της ράντας είναι $T = 40$ χρόνια. Η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{j=1}^{20} \frac{1.000}{(1+0.05)^{[j\cdot 1,583]} \cdot (1 + (j \cdot 1,583 - [j \cdot 1,583]) \cdot 0.05)} \\ &= 9.793,278116 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Η τελική αξία της ράντας θα είναι

$$\begin{aligned} K_t &= 1.000 \cdot \sum_{j=1}^{20} (1+0.05)^{[40-j\cdot 1,583]} \times (1 + (40 - j \cdot 1,583 - [40 - j \cdot 1,583]) \cdot 0.0 \\ &= 68.973,02625 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Η σχέση μεταξύ παρούσης αξίας και τελικής είναι $K_t = \Pi \cdot (1+0.05)^{40}$. Αυτό σημαίνει ότι αν τοκίζαμε για 40 χρόνια το ποσό της παρούσης αξίας θα είχαμε ως τελικό ποσό την τελική αξία της παραπάνω ράντας. □

ΑΣΚΗΣΗ 89 *Ο Α θέλει να καταθέσει σήμερα, στην ηλικία των 20 ετών, ένα ποσό έτσι ώστε από τα 60 του χρόνια και μετά να εκταμιεύει 1.000 Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα για πάντα. Το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι* $i = 0.05$. *Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα στην τράπεζα;*

ΛΥΣΗ. Πρόκειται για μια κλασματική και διηνεκής ράντα αρξάμενης σε $40 \cdot 12$ μήνες από τώρα. Ψάχνουμε την αρχική αξία η οποία θα είναι

$$\Pi = 1.000 \cdot \varepsilon^{m}_{\overline{\infty}|i} = 1.000 \cdot \frac{e^{-im\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}} = 1.000 \cdot \frac{e^{-0.05\cdot 40\cdot 12\cdot\frac{1}{12}}}{1 - e^{-0.05\cdot\frac{1}{12}}} = 32.548, 18225 \text{ (Ευρώ)}$$

□

19 Ισοδύναμες Ράντες

Στην άσκηση 80 μελετήσαμε την περίπτωση όπου κάποιο ίδρυμα θέλει να δώσει υποτροφία στον καλύτερο φοιτητή ενός τμήματος. Το ερώτημα ήταν ποιο ποσό έπρεπε να τοποθετήσει σήμερα στην τράπεζα ούτως ώστε να μπορεί να εκταμιεύεται το ποσό των 1.000 Ευρώ μηνιαίως για τέσσερα χρόνια στο τέλος κάθε μήνα. Είδαμε ότι το ποσό που χρειαζόταν ήταν 18.077,15782 Ευρώ.

Σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να προκύψουν διάφορα ερωτήματα. Έστω ότι το ίδρυμα καταθέσει το ίδιο ποσό χρημάτων σήμερα αλλά αποφασίσει να δίνει την υποτροφία στην αρχή κάθε μήνα. Ποιο είναι το ποσό που θα παίρνει ο φοιτητής στην αρχή του κάθε μήνα; 'λλο ερώτημα είναι αν το ίδρυμα καταθέσει το ίδιο ποσό σήμερα αλλά αποφασίσει να δίνει την υποτροφία για 5 χρόνια (αντί για τέσσερα) στον φοιτητή στην αρχή ή στο τέλος του κάθε μήνα τότε πόσα χρήματα θα παίρνει ο φοιτητής τον μήνα;. Τα ερωτήματα αυτά ανάγονται σε προβλήματα «μετατροπής» ράντας, δηλαδή να περάσουμε από την μια μορφή ράντας σε μια άλλη, π.χ. από ληξιπρόθεσμη σε προκαταβλητέα, από n όρων σε διηνεκή κ.τ.λ.

Κάθε ράντα αποτελείται από τις εξής παραμέτρους: αρχική αξία, τελική αξία, τον όρο, το πλήθος των όρων, επιτόκιο, ληξιπρόθεσμη ή προκαταβλητέα, διηνεκής. Θα λέμε λοιπόν ότι δυο ράντες είναι ισοδύναμες αν συμπίπτουν σε τουλάχιστον μια παράμετρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 90 *Ο Α αποφασίζει να καταθέσει το ποσό των 100.000 Ευρώ σήμερα στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$ έτσι ώστε να λαμβάνει ένα ποσό στο τέλος κάθε έτους για 40 έτη ή για πάντα. Για να αποφασίσει τι από τα δυο θα κάνει χρειάζεται να συγκρίνει τα ποσά.*

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα με γνωστή αρχική αξία, το ποσό των 100.000 Ευρώ, 40 όρων και ψάχνουμε να βρούμε βρούμε το ποσό της κάθε δόσης. Έτσι έχουμε

$$100.000 = K \cdot \alpha_{\overline{40|}0.05}$$

Δηλαδή, η δόση είναι $K = \frac{100.000}{\alpha_{\overline{40|}0.05}} = 5.827,816117$ *Ευρώ.*

Η δεύτερη περίπτωση είναι να καταθέσει το ίδιο ποσό αλλά να λαμβάνει για πάντα ένα ποσό στο τέλος κάθε χρόνου. 'ρα πρέπει να εργαστούμε στην «ισοδύναμη» διηνεκή ράντα για να βρούμε τον όρο της. Έτσι έχουμε

$$100.000 = K \cdot \frac{1}{0.05}$$

Δηλαδή το ποσό που θα παίρνει στο τέλος του κάθε χρόνου για πάντα θα είναι $K = 5.000$ *Ευρώ.*

Ο Α διαπιστώνει ότι η διαφορά δεν είναι μεγάλη και αποφασίζει να χρησιμοποιήσει την δεύτερη λύση, αυτή της διηνεκούς ράντας. Επιπλέον, όπως έχουμε ήδη δει, όταν αποβιώσει το ποσό που θα υπάρχει στην τράπεζα θα είναι πάντοτε 100.000 Ευρώ. Αυτό το «κληροδότημα» θα το κληρονομήσουν τα παιδιά του τα οποία επίσης μπορούν να παίρνουν το ίδιο ποσό για πάντα στο τέλος του κάθε έτους! Βέβαια, να σημειώσουμε ότι αυτό θα συμβαίνει όσο το επιτόκιο τραπέζης είναι 0.05. *Αν μειωθεί θα πρέπει να γίνει επαναπροσδιορισμός της δόσης ούτως ώστε να διατηρηθεί το αρχικό κεφάλαιο. Αν αυξηθεί μπορεί κάλλιστα να αυξηθεί και το ύψος της δόσης.*

Ας υποθέσουμε ότι μετά από 20 χρόνια αλλάξει το επιτόκιο και γίνει $i = 0.01$. *Πως πρέπει να αναπροσαρμοσθεί τη δόση;*

Το ποσό που θα έχει ο Α στην τράπεζα εκείνη την χρονική στιγμή θα είναι 100.000 Ευρώ και το ερώτημα είναι ποια είναι η δόση στην περίπτωση που το επιτόκιο γίνει $i = 0.01$ *έτσι ώστε* *να διατηρηθεί το ποσό των 100.000 Ευρώ σταθερό.*

Έχουμε ότι

$$100.000 = K \cdot \frac{1}{0.01}$$

άρα $K = 1.000$ *Ευρώ.*

Αν ο Α θελήσει να παίρνει το ποσό των 5.000 Ευρώ τον χρόνο παρόλο που το επιτόκιο μειωθεί τότε για πόσα χρόνια θα γίνεται αυτό;

Το ερώτημα αυτό ανάγεται στον υπολογισμό των όρων της ισοδύναμης ράντας η οποία θα έχει την ίδια αρχική αξία, επιτόκιο $i = 0.01$ *και δόση* $K = 5.000$ *και το ζητούμενο είναι το* n. *'ρα έχουμε*

$$100.000 = 5.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0.05)^n}}{0.05}$$

Λύνοντας ως προς n θα έχουμε ότι μπορεί να παίρνει το ποσό των 5.000 ευρώ για τα επόμενα 22 περίπου χρόνια.

20 Παραδείγματα και Ασκήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 91 *Συνεχίζοντας την άσκηση 81 θα υπολογίσουμε το ποσό χρημάτων που πρέπει να καταθέτει ο Α στο τέλος κάθε έτους προκειμένου να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ μετά από 40 χρόνια.*

Στην ουσία έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα για την οποία γνωρίζουμε την τελική αξία αλλά ψάχνουμε την δόση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$200.000 = K \cdot s_{\overline{40}|0.05}$$

Λύνοντας ως προς K *προκύπτει ότι πρέπει να καταθέτει το ποσό των* $K = 1.655, 632233$ *Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου.*

Παρομοίως, θα υπολογίσουμε το ποσό των χρημάτων που πρέπει να καταθέτει ο Α στην αρχή κάθε έτους προκειμένου να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ μετά από 40 χρόνια.

Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό δόσης της ισοδύναμης προκαταβλητέας ράντας οπότε θα έχουμε

$$200.000 = K \cdot \sigma_{\overline{40}|0.05} = \frac{(1 + 0.05)^{40} - 1}{0.05} \cdot (1 + 0.05)$$

Λύνοντας ως προς K *προκύπτει ότι* $K = 1.576, 792603$ *Ευρώ. Διαπιστώνουμε ότι το ποσό είναι μικρότερο από ότι στην ληξιπρόθεσμη και αυτό συμβαίνει διότι η κάθε δόση τοκίζεται ένα χρόνο παραπάνω.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 92 *Ο Α θέλει να καταθέτει στο τέλος του κάθε έτους το ποσό των 1.000 Ευρώ για 10 χρόνια. Η τράπεζα του δίνει επιτόκιο* $i = 0.01$ *για τα δέκα χρόνια αλλά για 20 χρόνια του δίνει επιτόκιο* $i = 0.02$. *Ποιο ποσό αρκεί να καταθέτει στο τέλος του κάθε έτους για 20 χρόνια έτσι ώστε να μαζέψει το διπλάσιο ποσό από ότι αν κατέθετε 1.000 Ευρώ το χρόνο για 10 χρόνια;*

Θα υπολογίσουμε την τελική αξία της ράντας, 10 όρων με επιτόκιο $i = 0.01$ *και δόση 1.000 Ευρώ. Έχουμε ότι*

$$K = 1.000 \cdot \frac{(1+0.01)^{10}-1}{0.01} = 10.462,21250$$

Τώρα μας ενδιαφέρει να βρούμε τον όρο μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 20 όρων, με επιτόκιο $i = 0.02$ *και τελική αξία την διπλάσια, δηλαδή περίπου 21.000 Ευρώ. Έχουμε λοιπόν*

$$21.000 = K \cdot \frac{(1+0.02)^{20}-1}{0.02}$$

Λύνοντας ως προς K *υπολογίζουμε την δόση η οποία θα είναι* $K \backsimeq 864,29$ *Ευρώ.*

Ασκηση 93 *Ο Α, φοιτητής ηλικίας 20 ετών, αποφάσισε να δημιουργήσει μια εταιρία. Έπεισε τους συνομήλικους συμφοιτητές του (100 άτομα) να του δίνουν 1.655,632233 Ευρώ το χρόνο στο τέλος του κάθε χρόνου για τα επόμενα 40 χρόνια. Από την άλλη μεριά ο Α θα είναι υποχρεωμένος να τους δίνει το ποσό των 10.000 Ευρώ στο τέλος του κάθε έτους από την ηλικία των 60 ετών και πέρα. Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς και υποθέσεις διαπίστωσε ότι με τα χρήματα που θα του καταθέτουν κάθε χρόνο μπορεί να κρατά το ποσό των 21.165 Ευρώ κάθε χρόνο μέχρι την ηλικία των 60 ετών ή το ποσό των 18.159,27826 για πάντα και ταυτόχρονα θα είναι σε θέση να εκπληρώσει τις οικονομικές του υποσχέσεις προς τους συμφοιτητές του. Εξηγήστε* *πως ακριβώς μπορεί αυτό να γίνει υποθέτοντας ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού* $i = 0.05$.

ΛΥΣΗ. Ο Α κάνει την εξής σημαντική υπόθεση αλλά ταυτόχρονα λογική. Υποθέτει ότι το πολύ 10 συμφοιτητές του θα ξεπεράσουν την ηλικία των 100 ετών. Αυτό σημαίνει ότι μετά τα 100 χρόνια θα πληρώνει 10.000 Ευρώ μονάχα για αυτούς τους 10 ανθρώπους.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη άσκηση, για να είναι σε θέση να δίνει το ποσό των 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους, πρέπει να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ για τον κάθε ένα μετά από 40 χρόνια. Καταθέτοντας κάθε συμφοιτητής του το ποσό των 1.655,632233 Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου θα έχει συγκεντρώσει το ποσό αυτό για τον καθένα.

Στην ηλικία των 60 ετών ο Α πρέπει να έχει στην διάθεση του $10 \cdot 200.000$ Ευρώ για να καλύψει τους 10 συμφοιτητές του για τους οποίους δεν έχει υποθέσει τίποτε. Πόσα χρήματα χρειάζεται στην ηλικία των 60 ετών για να καλύψει τους 90 για τα επόμενα 40 χρόνια; Πρόκειται για την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 40 όρων, δηλαδή

$$90 \cdot 10.000 \cdot \alpha_{\overline{40}|0.05} = 1,544317772 \cdot 10^7$$

Με το ποσό αυτό θα καλύψει τους 90 ανθρώπους για τα επόμενα 40 χρόνια ενώ με το ποσό $10 \cdot 200.000$ θα καλύψει και τους υπόλοιπους 10 για πάντα. ’ρα στην ηλικία των 60 ετών χρειάζεται το ποσό των $1.744317772 \cdot 10^7$ Ευρώ για να τους καλύψει όλους.

Για να δημιουργηθεί αυτό το ποσό πρέπει οι 100 αυτοί άνθρωποι να καταθέτουν ένα συγκεκριμένο ποσό τον χρόνο με τελική αξία αυτό το ποσό. Θέλουμε να βρούμε το ποσό αυτό και επειδή πρόκειται για την εύρεση τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας πρέπει το ποσό αυτό K να είναι τέτοιο ώστε

$$100 \cdot K \cdot s_{\overline{40}|0.05} = 100 \cdot K \cdot \frac{(1+0.05)^{40}-1}{0.05} = 1,744317772 \cdot 10^7$$

Δηλαδή το ποσό που αρκεί να καταβάλλει ο καθένας είναι $K = 1.443,974364$ Ευρώ. Επομένως, περισσεύουν $211,657869$ Ευρώ από τον καθένα το οποίο μπορεί να το καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο, δηλαδή 21.165,7869 Ευρώ το χρόνο, από την ηλικία των 20 ετών ως την ηλικία των 60 ετών.

Εναλλακτικά, θα υπολογίσουμε πόσα μπορεί να καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο για πάντα. Για να το βρούμε αυτό θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία της προηγούμενης ράντας, δηλαδή

$$21.165,7869 \cdot \alpha_{\overline{40}|0.05} = 3,631855652 \cdot 10^5$$

Στην συνέχεια θα σχηματίσουμε την ισοδύναμη ληξιπρόθεσμη και διηνεκή ράντα με παρούσα αξία το ποσό $3,631855652 \cdot 10^5$ και το ζητούμενο είναι η δόση της ράντας. Έχουμε λοιπόν

$$3,631855652 \cdot 10^5 = K \cdot \alpha_{\overline{\infty}|0.05}$$

Λύνοντας ως προς K λαμβάνουμε το ποσό που μπορεί να καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο για πάντα, το οποίο είναι $K = 18.159,27826$ Ευρώ.

Σημειώστε ότι το ποσό που θα απομείνει στον Α στα 100 του χρόνια (αν η υπόθεση του είναι σωστή) θα είναι $90 \cdot 200.000$. Τα χρήματα αυτά θα μπορεί να τα καταναλώσει όπως θέλει. Η παρούσα αξία των χρημάτων αυτών είναι ίση με

$$\frac{90 \cdot 200.000}{(1+0.05)^{80}} = 3,631855652 \cdot 10^5$$

Δηλαδή όσο το ποσό που υπολογίσαμε με διαφορετικό σκεπτικό παραπάνω.

Συνεχίζοντας το ίδιο σκεπτικό, αν οι υπόλοιποι 10 έχουν αποβιώσει μέχρι την ηλικία των 110 τότε θα περισσέψει επιπλέον το ποσό (εκείνη την εποχή) των $10 \cdot 200.000$ Ευρώ. Η παρούσα αξία του ποσού αυτού είναι 24.773,82579 Ευρώ η οποία μπορεί να προστεθεί στο ποσό των $3,631855652 \cdot 10^5$ Ευρώ. Με αυτή την επιπλέον υπόθεση μπορεί ο Α να καταναλώνει το ποσό των 19.397,96956 Ευρώ ετησίως για πάντα! □

Στο προηγούμενο παράδειγμα περιγράφουμε ουσιαστικά την βασική αρχή της ασφάλισης. Οι ασφαλιστικές εταιρίες λειτουργούν περίπου με αυτό τον τρόπο. Λόγω όμως του υψηλού ανταγωνισμού (πολλές εταιρίες που παρέχουν τις ίδιες υπηρεσίες) τα ποσά που συλλέγουν από τους ασφαλιζόμενους δεν τα τοποθετούν κατά ανάγκη σε τράπεζα. Προσπαθούν να επενδύσουν κατάλληλα τα χρήματα αυτά (όπως άλλωστε κάνουν και οι τράπεζες) έτσι ώστε να αποκομίσουν μεγαλύτερα κέρδη (αυξάνοντας όμως το ρίσκο) ή αλλιώς να πετύχουν μεγαλύτερο επιτόκιο από κατάθεση σε τράπεζα. Σε αυτή την προσπάθεια ιδιαίτερη σημασία έχει η χρηματοοικονομική επιστήμη. Με τον τρόπο αυτό θα ζητούν για τις ίδιες υπηρεσίες λιγότερα χρήματα από τους ασφαλισμένους αυξάνοντας έτσι την πελατεία τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **94** *Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί μια υποτροφία ύψους 2.000 Ευρώ το χρόνο επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα δοθεί μετά από ένα χρόνο από σήμερα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού* 3%; *Το ίδιο αν η πρώτη υποτροφία δοθεί στην αρχή του πρώτου έτους.*

Η σειρά πληρωμών είναι στην πραγματικότητα μια ληξιπρόθεσμη ράντα (ενώ είναι προκαταβλητέα στη δεύτερη περίπτωση) επομένως η παρούσα αξία είναι

$$V = 2.000 \cdot \alpha_{\overline{10}|0.03}$$

ενώ στην περίπτωση της προκαταβλητέας είναι

$$V = 2.000 \cdot \overline{\alpha}_{\overline{10}|0.03}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **95** *Έστω ότι ο A καταθέτει στο τέλος (αντίστοιχα στην αρχή) κάθε έτους το ποσό των 10.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού* 3% *επί 10 συνεχόμενα χρόνια. Τι ποσό θα έχει στο τέλος της 10ετίας*;

Απάντηση. Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε την τελική αξία μια ληξιπρόθεσμης (αντίστοιχα προκαταβλητέας ράντας).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$V = 10.000 \cdot s_{\overline{10}|0.03}$$

ενώ στην περίπτωση της προκαταβλητέας η τελική αξία είναι

$$V = 10.000 \cdot \sigma_{\overline{10}|0.03}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96 *Να υπολογισθεί η ετήσια δόση ληξιπρόθεσμης ράντας με παρούσα αξία* 10.000 *Ευρώ, επιτόκιο* $i = 3\%$ *και διάρκεια 10 ετών.*

Απάντηση. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα με αρχική αξία $V = 10.000$, $n = 10$, $i = 0.03$. Αυτό που ψάχνουμε είναι το R τ.ω.

$$V = R \cdot \alpha_{\overline{10}|0.03}$$

Λύνοντας ως προς R υπολογίζουμε την ετήσια δόση. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 97 *Με ποιο επιτόκιο ληξιπρόθεσμη ράντα με ετήσιο όρο 10.000 Ευρώ και διάρκεια 10 ετών έδωσε τελική αξία 120.000 Ευρώ;*

Απάντηση. Εδώ γνωρίζουμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, τον ετήσιο όρο (δόση) καθώς και τη διάρκεια. Ψάχνουμε το i το οποίο θα βρούμε από τη σχέση

$$120.000 = 10.000 \cdot s_{\overline{10}|i} = 10.000 \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

Για να λυθεί ως προς i η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να εφαρμοστεί κάποια αριθμητική μέθοδος όπως η μέθοδος του Νεύτωνα την οποία έχουμε ήδη αναφέρει. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 98 (ΤΑΚΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ) *Να βρεθεί το πλήθος των όρων ληξιπρόθεσμης ράντας η οποία έχει αρχική αξία 10.000 Ευρώ ετήσια δόση 500 Ευρώ και επιτόκιο 3%.*

Απάντηση. Εδώ ψάχνουμε να βρούμε το n από τη σχέση

$$10.000 = 500 \cdot \alpha_{\overline{n}|0.03} = 500 \cdot \frac{1 - U^n}{0.03}$$

όπου $U = \frac{1}{1+0.03}$. Χρησιμοποιώντας το λογάριθμο υπολογίζουμε το n

$$\frac{1}{(1+0.03)^n} = 1 - \frac{10.000 \cdot 0.03}{500} = 0.4 \text{ δηλαδή } n = \frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}$$

Υπάρχει όμως η περίπτωση να μην είναι ακέραιος αριθμός οπότε σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να κάνουμε τη λεγόμενη **τακτοποίηση του κλασματικού αριθμού**. Αυτό σημαίνει ότι θα αλλάξουμε λίγο τη δόση της ράντας ούτως ώστε το n να είναι ακέραιος. Επιλέγουμε ως διάρκεια είτε $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]$ είτε $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]+1$. Έπειτα υπολογίζουμε τη δόση από τη σχέση

$$10.000 = R \cdot \alpha_{\overline{[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]}|0.03}$$

αν έχουμε επιλέξει το $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]$ ως διάρκεια. □

Δάνεια Θα εξετάσουμε διάφορους τρόπους αποπληρωμής δανείων, χρησιμοποιώντας τις ράντες (σειρές πληρωμών). Συμβολίζουμε με K το δανεισμένο ποσό, με n τις χρονικές περιόδους, i το επιτόκιο και T τον χρόνο λήξης του δανείου.

21 Δάνεια εξοφλητέα σε μια δόση

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν γενικά δυο υποπεριπτώσεις. Η μια είναι ο δανειζόμενος να αποδίδει στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο του κεφαλαίου και στο τέλος των n ετών να καταβάλλει και το ποσό K.

Στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων ο τόκος σε κάθε περίοδο είναι ίσος με Ki ενώ στην περίπτωση της συνεχούς κεφαλαιοποίησης ο τόκος σε κάθε περίοδο είναι $K(e^i - 1)$.

Η παρούσα αξία των ποσών αυτών στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης είναι

$$Ki\alpha_{\overline{n}|i} + KU^n$$

και αυτή θα πρέπει να είναι ίση με το δάνειο K, δηλαδή θα ισχύει η σχέση

$$K = Ki\alpha_{\overline{n}|i} + KU^n$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας τις ποσότητες βλέπουμε ότι ισχύει.

Από την άλλη μεριά η παρούσα αξία των ποσών στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού θα είναι

$$\underbrace{K(e^i - 1)}_{\text{τόκος μιας περιόδου}} \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i} + Ke^{-ni}$$

Αντικαθιστώντας διαπιστώνουμε ότι η παρούσα αξία των ποσών αυτών είναι ίση με K.

'ρα, στο τέλος κάθε περιόδου καταβάλλει το ποσό των Ki ή $K(e^i - 1)$ Ευρώ ανάλογα τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων και στο τέλος της n-οστής περιόδου το ποσό των K Ευρώ.

Η δεύτερη περίπτωση είναι να μην καταβάλλει τίποτε κατά τη διάρκεια του δανείου και στο τέλος να καταβάλλει το ποσό με τους τόκους, δηλαδή $K(1+i)^n$ στην περιοδική κεφαλαιοποίηση και Ke^{ni} στην συνεχή κεφαλαιοποίηση.

ΑΣΚΗΣΗ 99 *Ο Α δάνεισε στον Β το ποσό των 10.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο* $i = 0.05$. *Συμφώνησαν να αποπληρωθεί το δάνειο σε 4 χρόνια καταβάλλοντας τους τόκους στο τέλος του κάθε έτους. Ποια είναι η παρούσα αξία των ποσών που θα καταβληθούν; Υποθέστε ετήσιο ανατοκισμό αλλά και συνεχή ανατοκισμό.*

ΛΥΣΗ. Στο τέλος του κάθε χρόνου ο Α θα καταβάλλει το ποσό των $10.000 \cdot 0.05$ Ευρώ ενώ στο τέλος των 4 χρόνων θα πρέπει να του καταβάλλει και το ποσό των 10.000 Ευρώ. Η παρούσα αξία των ποσών είναι

$$\underbrace{10.000 \cdot 0.05 \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}_{\text{παρούσα αξία τόκων}} + \underbrace{10.000 \cdot \frac{1}{(1+0.05)^4}}_{\text{παρούσα αξία κεφαλαίου}} = 10.000$$

όταν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό ενώ

$$\underbrace{10.000 \cdot (e^{0.05} - 1) \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}}_{\text{παρούσα αξία τόκων}} + \underbrace{10.000 \cdot e^{-4 \cdot 0.05}}_{\text{παρούσα αξία κεφαλαίου}} = 10.000$$

όταν έχουμε συνεχή ανατοκισμό. □

22 Εξοφλητικό Απόθεμα

Η ιδέα εδώ είναι ο δανειζόμενος να καταθέτει κάποια χρήματα στην τράπεζα με επιτόκιο $r < i$ (διότι αν ήταν μεγαλύτερο το r θα μπορούσε κάποιος να δανειστεί με επιτόκιο i να τα καταθέσει στην τράπεζα με μεγαλύτερο επιτόκιο και στο τέλος να έχει κέρδος) έτσι ώστε στο τέλος της διάρκειας του δανείου να σχηματιστεί το κατάλληλο ποσό για την αποπληρωμή του χρέους. Αν οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε χρόνου, (δηλαδή Ki ή $K(e^i - 1)$ ανάλογα με τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων) και αν καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό R με επιτόκιο r τότε πρέπει

$$Rs_{\overline{n}|r} = K$$

στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων και

$$Rse_{\overline{n}|r} = K$$

στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού.

Δηλαδή, ο δανειζόμενος πληρώνει κάθε χρόνο τους τόκους και το ερώτημα είναι πόσα χρήματα πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος κάθε χρόνου έτσι ώστε η τελική αξία (της ληξιπρόθεσμης ράντας) να είναι ίση με το K.

Οπότε

$$R = \frac{K}{s_{\overline{n}|r}} \quad \text{ή} \;\; R = \frac{K}{se_{\overline{n}|r}}$$

Αν συμβολίσουμε με

$$\boxed{P_{\overline{n}|r} = \frac{1}{s_{\overline{n}|r}} \;\; \text{ή} \;\; P^e_{\overline{n}|r} = \frac{1}{se_{\overline{n}|r}} \;\; \text{(χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας)}}$$

τότε θα έχουμε $R = KP_{\overline{n}|r}$ και το $P_{\overline{n}|r}$ ονομάζεται χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή, το $P_{\overline{n}|r}$ συμβολίζει το ποσό που πρέπει να καταθέτουμε στην τράπεζα για n χρονικές περιόδους και με επιτόκιο περιόδου r ούτως ώστε στο τέλος να έχει συγκεντρωθεί το ποσό του ενός Ευρώ. 'ρα αν θέλουμε να συγκεντρώσουμε K Ευρώ θα πρέπει να καταθέτουμε $KP_{\overline{n}|r}$ Ευρώ ανά χρονική περίοδο.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία των ποσών που ο δανειζόμενος θα έχει δώσει. Η παρούσα αξία που θα υπολογίσουμε θα είναι με βάση το επιτόκιο i, δηλαδή από την πλευρά του δανειστή (τράπεζας). Ο δανειζόμενος καταβάλλει τους τόκους σε κάθε χρονική περίοδο, οι οποίοι είναι Ki ή $K(e^i - 1)$ ανάλογα με τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων, και η παρούσα αξία τους θα είναι

$$K \cdot i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \quad \text{ή} \quad K \cdot (e^i - 1) \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}$$

Τα ποσά που τοποθετεί στην τράπεζα για να σχηματίσει το τελικό ποσό έχουν παρούσα αξία

$$K \cdot P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \quad \text{ή} \quad K \cdot P^e_{\overline{n}|r} \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}$$

'ρα, η παρούσα αξία όλων των ποσών που καταβάλλει ο δανειζόμενος είναι στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης

$$K \cdot i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} + K \cdot P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i}$$

Σημειώστε ότι

$$\frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Επομένως, η παρούσα αξία θα είναι

$$\begin{aligned} K \cdot (i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} + P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i}) &= K \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}}\right) \\ &= K\left(1 + \frac{1}{(1+i)^n}\left(\frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Λόγω του ότι $\frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} > 1$ (σημειώστε ότι η $s_{\overline{n}|i}$ είναι αύξουσα ως προς i) προκύπτει τελικά ότι η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη από το K. Δηλαδή, ο δανειζόμενος θα δώσει περισσότερα χρήματα από ότι είχε δανεισθεί. Η διαφορά προκύπτει από το γεγονός ότι δανείζεται με μεγαλύτερο επιτόκιο από ότι μπορεί ο ίδιος να καταθέσει (δανείσει). Το πλεονέκτημα όμως είναι ότι καθ΄ όλη την διάρκεια των καταθέσεων σε τράπεζα ο δανειζόμενος μπορεί να εκταμιεύσει οποιοδήποτε ποσό θέλει για μια έκτατη ανάγκη. Για να δούμε καλύτερα την διαφορά αρκεί να υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος καταθέτει τα ποσά στην ίδια τράπεζα από την οποία δανείσθηκε το ποσό. Βλέπουμε ότι τα χρήματα που παίρνει η τράπεζα από τον ιδιώτη με επιτόκιο r μπορεί να τα δανείσει με επιτόκιο $i > r$ και επομένως να έχει κέρδος το οποίο προκύπτει από την διαφορά των επιτοκίων.

Παρόμοιοι είναι οι υπολογισμοί στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού.

Στην περίπτωση που ο δανειζόμενος δεν πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε χρόνου θα πρέπει να σχηματίσει ένα εξοφλητικό απόθεμα με τελική αξία $K(1+i)^n$ ή Ke^{ni}. 'ρα η δόση που πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος του κάθε έτους θα είναι

$$R = K(1+i)^n P_{\overline{n}|r} \quad ή \quad Ke^{ni} P^e_{\overline{n}|r}$$

Η παρούσα αξία των παραπάνω ποσών είναι, στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων,

$$K \cdot (1+i)^n P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i} = K \cdot (1+i)^n \frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} = K \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}}$$

Παρατηρούμε πάλι ότι η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη του K.

Η γενικότερη περίπτωση είναι όταν ο δανειζόμενος καταθέτει χρήματα σε τράπεζα σε χρονικές περιόδους που δεν είναι κατ΄ ανάγκη ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου που αναφέρεται το επιτόκιο. Δηλαδή μπορεί να θελήσει να καταθέσει m-φορές χρήματα στην τράπεζα μέχρι την λήξη του δανείου και μάλιστα σε χρόνους που δεν έχουν κάποια περιοδικότητα ή σχέση με την περίοδο που αναφέρεται το επιτόκιο. Αρκεί βέβαια το τελικό ποσό που θα προκύψει στο τέλος του δανείου να είναι ίσο με το ζητούμενο ποσό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 100 *Έστω ότι ο Α δανείζεται το ποσό $K = 100.000$ Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 6% και το οποίο πρέπει να αποπληρωθεί σε 20 χρόνια. Ας υποθέσουμε ότι ο Α επιθυμεί να σχηματίσει εξοφλητικό απόθεμα στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 4%. Να βρεθεί η δόση που πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στην περίπτωση που πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε έτους αλλά και στην περίπτωση που δεν πληρώνει τους τόκους.*

Απάντηση. Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να σχηματίσει μετά από 20 χρόνια το ποσό K. ’ρα πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος κάθε έτους το ποσό

$$R = K \cdot P_{\overline{20}|0.04}$$

ενώ στην περίπτωση που δεν καταβάλλει τους τόκους στο τέλος του έτους θα πρέπει να σχηματίσει ποσό ίσο με $K(1+0.06)^{20}$ και επομένως η δόση θα είναι

$$R = K \cdot (1+0.06)^{20} \cdot P_{\overline{20}|0.04}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 101 *Ο Α δανείζεται το ποσό των 10.000 Ευρώ από τον Β και συμφωνούν να έχει αποπληρωθεί μετά από 4 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο δανεισμού είναι $i = 0.06$ ενώ το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης είναι $r = 0.04$ συνεχούς ανατοκισμού. Συμφωνούν επίσης να καταβάλλονται οι τόκοι στο τέλος του κάθε χρόνου. Ο Α για κάποιο λόγο μπορεί να καταθέτει ένα ποσό στο τέλος κάθε 7μήνου στην τράπεζα προκειμένου να σχηματίσει το ζητούμενο ποσό. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέτει;*

ΛΥΣΗ. Εδώ ο χρόνος λήξης του δανείου είναι $T = 4$ χρόνια. Ο Α πρέπει να καταβάλλει το ποσό των $10.000 \cdot 0.05$ Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου. Επίσης, στο τέλος των 4 χρόνων πρέπει να καταβάλλει και το ποσό των 10.000 Ευρώ. Για να σχηματίσει το ποσό αυτό θα καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό R στο τέλος κάθε 7μήνου με επιτόκιο κατάθεσης $r = 0.04$ έτσι ώστε στο τέλος της τετραετίας να έχει σχηματιστεί το ποσό των 10.000 Ευρώ.

Τα 4 έτη αποτελούνται από 6 επτάμηνα και περισσεύουν και 6 μήνες. Στο τέλος κάθε επταμήνου θα καταθέτει ένα ποσό

R. Μετά την κατάθεση του έκτου επταμήνου τα χρήματα θα παραμείνουν στην τράπεζα μέχρι την λήξη του δανείου, δηλαδή για έξι μήνες ακόμη. Η συγκεκριμένη σειρά πληρωμών είναι μια κλασματική και ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας γνωρίζουμε την τελική αξία (10.000 Ευρώ) και ψάχνουμε την δόση. 'ρα, η δόση είναι (δες 12)

$$R = \frac{10.000}{s\varepsilon_{\overline{6}|0.04}} = \frac{10.000}{e^{0.04\cdot\frac{48-7}{12}}\cdot\frac{1-e^{-0.04\cdot 6\cdot\frac{7}{12}}}{1-e^{-0.04\cdot\frac{7}{12}}}} = 1.539,870685 \quad \text{Ευρώ}$$

□

Σχήμα 23: Ομόλογο της Carl Zeiss-Stiftung του 1926

23 Απόσβεση δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Στην προηγούμενη μέθοδο αποπληρωμής δανείου είδαμε ότι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει σε κάθε χρονική περίοδο είναι

$$\underbrace{Ki}_{\text{ποσό για τόκους}} + \underbrace{KP_{\overline{n}|r}}_{\text{ποσό κατάθεσης}}$$

στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης. Είδαμε επίσης ότι λόγω της διαφοράς των επιτοκίων κατάθεσης και δανεισμού η παρούσα αξία του τελικού ποσού που θα καταβάλλει ο δανειζόμενος ξεπερνά την αξία του δανεισμένου ποσού.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου ο δανειζόμενος μπορεί να καταβάλλει στον δανειστή μέρος του κεφαλαίου σε κάθε χρονική περίοδο μαζί με τους ανάλογους τόκους αντί να καταθέτει σε τράπεζα με χαμηλότερο επιτόκιο. Έστω ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου καταβάλλει το ποσό

$$R = Ki + KP_{\overline{n}|i}$$

όπου το Ki είναι ο τόκος του κεφαλαίου ενώ το ποσό $KP_{\overline{n}|i}$ είναι μέρος του κεφαλαίου. Στη δεύτερη περίοδο ο δανειζόμενος έχει ήδη αποπληρώσει μέρος του κεφαλαίου επομένως ο τόκος που θα πληρώσει θα είναι $(K - KP_{\overline{n}|i})i$. Αν ο δανειζόμενος θέλει να πληρώνει σταθερή δόση τότε στο τέλος της δεύτερης περιόδου θα πληρώσει τον τόκο $(K - KP_{\overline{n}|i})i$ και το ποσό $R - (K - KP_{\overline{n}|i})i = KP_{\overline{n}|i}(1+i)$.

Σε κάθε σταθερή δόση R βλέπουμε ότι μειώνονται οι τόκοι και αυξάνεται το ποσό για το κεφάλαιο. Συνεχίζοντας τη διαδικασία διαπιστώνουμε επαγωγικά ότι στο τέλος της m περιόδου το ποσό που θα πληρώσουμε για το κεφάλαιο θα είναι ίσο με

$$\boxed{KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1} \quad \text{ποσό για κεφάλαιο στο τέλος της } m \text{ περιόδου}}$$

Πράγματι, για $m = 1$ ισχύει όπως έχουμε δει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο m, δηλαδή στο τέλος της m-περιόδου το ποσό για κεφάλαιο θα είναι $KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}$. Αυτό σημαίνει ότι έχει αποπληρώσει μέχρι εκείνη την στιγμή το ποσό

$$KP_{\overline{n}|i} + KP_{\overline{n}|i}(1+i) + \cdots + KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1} = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}$$

Αυτό σημαίνει ότι στην επόμενη περίοδο θα πληρώσει το ποσό $(K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i$ για τόκους και $R - (K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i$ για κεφάλαιο. Αντικαθιστώντας έχουμε ότι $R - (K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i = KP_{\overline{n}|i}(1+i)^m$ αποδεικνύοντας έτσι τον ισχυρισμό μας.

Αν συμβολίσουμε με $E_m = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}$ το ποσό του κεφαλαίου που έχει εξοφληθεί στο τέλος της m περιόδου τότε το ανεξόφλητο ποσό θα είναι $K - E_m$ και επομένως ο τόκος που πρέπει να πληρωθεί στο τέλος του $m+1$ χρόνου θα είναι $(K - E_m)i$. Παρατηρήστε ότι στο τέλος της n-οστής περιόδου θα έχουμε $E_n = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{n}|i} = K$.

Η παρούσα αξία των ποσών που έχει καταβάλλει ο δανειζόμενος είναι

$$R\alpha_{\overline{n}|i} = (Ki + KP_{\overline{n}|i})\alpha_{\overline{n}|i} = K$$

Επομένως ο δανειζόμενος θα καταβάλλει ποσά των οποίων η παρούσα αξία θα είναι ίση με το δανειζόμενο ποσό σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο κατά την οποία ήταν μεγαλύτερη. Εδώ όμως δεν έχει το πλεονέκτημα να εκταμιεύσει κάποιο ποσό σε περίπτωση ανάγκης.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα με τρεις στήλες και n γραμμές όσες είναι και οι περίοδοι αποπληρωμής. Στην πρώτη στήλη θα έχουμε τη δόση κάθε περιόδου που είναι σταθερή και ίση $R = Ki - KP_{\overline{n|}i}$. Στη δεύτερη στήλη θα έχουμε το ποσό που αναλογεί σε πληρωμή κεφαλαίου που είναι ίσο με $KP_{\overline{n|}i}(1+i)^{m-1}$ στο τέλος της m περιόδου. Στην τρίτη στήλη θα έχουμε το ποσό που αναλογεί σε τόκους και είναι η διαφορά των δυο προηγούμενων τιμών. Αν θέλουμε προσθέτουμε και μια τέταρτη στήλη στην οποία γράφουμε το συνολικό ποσό κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί στο τέλος της m περιόδου, το οποίο είναι ίσο με $KP_{\overline{n|}i}s_{\overline{m|}i}$.

Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής στο τέλος της m περιόδου

$R = Ki + KP_{\overline{n\|}i},$	ποσό σταθερής δόσης,
$KP_{\overline{n\|}i}(1+i)^{m-1},$	ποσό για κεφάλαιο,
$R - KP_{\overline{n\|}i}(1+i)^{m-1},$	ποσό για τόκους,
$KP_{\overline{n\|}i}s_{\overline{m\|}i},$	μέρος του κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί

Παρόμοιους συλλογισμούς και υπολογισμούς μπορούμε να κάνουμε στην περίπτωση της συνεχούς κεφαλαιοποίησης των τόκων. Σε αυτή την περίπτωση ο δανειζόμενος θα καταβάλλει το ποσό

$$\underbrace{K(e^i - 1)}_{\text{ποσό για τόκους}} \quad + \quad \underbrace{KP^e_{\overline{n|}i}}_{\text{ποσό για κεφάλαιο}}$$

στο τέλος της πρώτης περιόδου.

Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής στο τέλος της m περιόδου

$R = K(e^i - 1) + KP^e_{\overline{n}\mid i}$,	ποσό σταθερής δόσης,
$KP^e_{\overline{n}\mid i} e^{i(m-1)}$,	ποσό για κεφάλαιο,
$R - KP^e_{\overline{n}\mid i} e^{i(m-1)}$,	ποσό για τόκους,
$KP^e_{\overline{n}\mid i} se_{\overline{m}\mid i}$,	μέρος του κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 102 *Δάνειο 100.000 Ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις και επιτόκιο 5%. Να κατασκευαστεί πίνακας αποπληρωμής του δανείου.*

Απάντηση. Εδώ το κεφάλαιο είναι $K = 100.000$, $n = 5$ και $i = 0.05$. Η δόση θα είναι $R = Ki + KP_{\overline{n}\mid i} = 23.097,5$

Έτη	Δόση	Ποσό για κεφάλαιο	Ποσό για τόκους	Μέρος κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί
1	23.097,5	18.097,4	5.000	18.097,4
2	23.097,5	19.002,3	4.095,1	37.099,8
3	23.097,5	19.952,4	3.145	57.052,3
4	23.097,5	20.950,0	2.147,4	78.002,4
5	23.097,5	21.997,5	1.099,9	100.000

□

ΑΣΚΗΣΗ 103 *Επιχειρηματίας δανείζεται το ποσό των 10.000.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο δανεισμού $i = 0.06$ το οποίο λήγει σε 10 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης σε τράπεζα είναι $r = 0.04$. Ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος και ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου;*

ΛΥΣΗ. Αν εφαρμόσει την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος και αποφασίσει να πληρώνει τους τόκους στο τέλος του κάθε χρόνου τότε η δόση που θα καταβάλλει θα είναι

$$R_1 = \underbrace{10.000.000 \cdot 0.06}_{\text{ποσό για τόκους}} + \underbrace{10.000.000 \cdot P_{\overline{10}|0.04}}_{\text{ποσό κατάθεσης σε τράπεζα}} = 1.432.909,443$$

Από την άλλη μεριά η δόση που θα καταβάλλει με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου θα είναι

$$R_2 = 10.000.000 \cdot 0.06 + 10.000.000 \cdot P_{\overline{10}|0.06} = 1.358.679,582$$

Διαπιστώνουμε ότι η δόση με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου είναι μικρότερη. Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και έχουμε αποδείξει ότι η παρούσα αξία των ποσών με την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος ξεπερνά το ποσό του αρχικού δανείου. Το μοναδικό πλεονέκτημα για την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος είναι ότι τα ποσά που θα καταβάλλει στην τράπεζα κάθε χρόνο θα είναι διαθέσιμα στον επιχειρηματία σε περίπτωση έκτακτης ανάγκης. □

24 Ομολογιακά Δάνεια

Τα ομολογιακά δάνεια είναι δάνεια πολλών δανειστών σε ένα δανειζόμενο. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν το κράτος σκοπεύει να δανειστεί (από τους πολίτες) ένα ποσό K το οποίο το χωρίζει σε N ίσα ποσά τα οποία ονομάζονται ομολογίες. Ο κάθε δανειστής μπορεί να πάρει έναν ή περισσότερους τέτοιους τίτλους όπου σε κάθε τίτλο αναγράφεται η ονομαστική αξία του τίτλου. Η τιμή του τίτλου στην οποία πωλούνται οι ομολογίες ονομάζεται τιμή εκδόσεως ενώ η τιμή που θα εξοφληθεί η κάθε ομολογία ονομάζεται τιμή εξοφλήσεως, η οποία μπορεί να είναι και διαφορετική από την ονομαστική αξία. Ο δανειζόμενος καταβάλλει τόκο ο οποίος υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία του ομολόγου.

Οι τόκοι του ομολόγου εξοφλούνται με τα τοκομερίδια τα οποία είναι κουπόνια με τα οποία εισπράττονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου (εξαμήνου, χρόνου κτλ). Το δανεισμένο κεφάλαιο εξοφλείται με τις ομολογίες, δηλαδή σε προκαθορισμένες ημερομηνίες κληρώνεται ορισμένος αριθμός ομολογιών και οι ομολογιούχοι εισπράττουν τα χρήματα που αντιπροσωπεύουν οι ομολογίες τους.

Επομένως, αν το δάνειο εξοφληθεί σε n χρόνια ο δανειζόμενος θα πρέπει να καταβάλλει (εκτός των τόκων μέσω των κουπονιών) μέρος του δανείου κληρώνοντας αντίστοιχες ομολογίες. Αυτό γίνεται με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Θα σχηματιστεί μια ράντα με τελική τιμή K, και άρα

$$R = Ki + KP_{\overline{n}|i}$$

είναι το ποσό που θα καταβάλλει ο δανειζόμενος σε κάθε περίοδο. Για κεφάλαιο αναλογεί το ποσό $KP_{\overline{n}|i}$ το οποίο θα διαιρεθεί με το ποσό K/N για να μας δώσει το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν το οποίο θα είναι $[NP_{\overline{n}|i}]$. Σημειώστε ότι πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός το πλήθος των ομολογιών ενώ το ποσό $NP_{\overline{n}|i}$ μπορεί να μην είναι ακέραιος αριθμός. Σε μια τέτοια περίπτωση θα εξοφλήσει λιγότερα από όσα πρέπει και η διαφορά θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης φοράς. Το ποσό $KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$ θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης χρονικής περιόδου που θα πρέπει να εξοφλήσει ο δανειζόμενος, δηλαδή θα πρέπει να εξοφλήσει $R' = R + KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$.

Στην επόμενη περίοδο έχουν περισσέψει $N - [NP_{\overline{n}|i}]$ τίτλοι και επομένως θα καταβληθούν οι αντίστοιχοι τόκοι οι οποίοι θα είναι τώρα $\frac{K}{N}\left(N - [NP_{\overline{n}|i}]\right) i$ ενώ το ποσό δανείου που θα αποπληρωθεί θα είναι $R' - \frac{K}{N}(N - [NP_{\overline{n}|i}])i$. Αυτό με τη σειρά του θα διαιρεθεί με το K/N για να βρεθεί το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν. Αν η διαίρεση δεν δώσει ακέραιο αριθμό το υπόλοιπο το προσθέτουμε στο ποσό του επόμενου έτους. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το τέλος του n-οστού έτους.

ΑΣΚΗΣΗ 104 *Το κράτος σύναψε ομολογιακό δάνειο ύψους 5.000.000 Ευρώ το οποίο αποτελείται από 10.000 ομολογίες ονομαστικής α-*

ξίας 500 Ευρώ. Το δάνειο θα εξοφληθεί με επιτόκιο 3% σε 6 χρόνια. Κατασκευάστε τον πίνακα αποπληρωμής του δανείου.

ΛΥΣΗ. Όπως είπαμε το ποσό που θα καταβάλλει το χρόνο (για τόκους και αποπληρωμή κεφαλαίου) θα είναι

$$R = \underbrace{5.000.000 \cdot 0.03}_{\text{τόκοι}} + \underbrace{5.000.000 \cdot P_{\overline{6}|0.03}}_{\text{ποσό για κεφάλαιο}} = 923.000$$

1^o Έτος.

Το ποσό των $5.000.000 \cdot 0.03$ είναι για τόκους ενώ το ποσό $5.000.000 \cdot P_{\overline{6}|0.03} = 772.987,5004$ είναι για αποπληρωμή κεφαλαίου. Διαιρούμε με το 500 για να δούμε πόσοι τίτλοι πρέπει να αποπληρωθούν και βλέπουμε ότι είναι 1.545 τίτλοι. Το ποιοι ακριβώς θα είναι αυτοί θα προκύψει μέσω κλήρωσης στο τέλος του πρώτου έτους. Όμως περισσεύουν $772.987,5004 - 1.545 \cdot 500 = 487,5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στον επόμενο χρόνο.

2^o Έτος.

Στο τέλος του δεύτερου έτους το κράτος θα καταβάλλει το ποσό $8.455 \cdot 500 \cdot 0.03 = 126.825$ για τόκους και επομένως θα καταβάλλει $923.487,5004 - 126.825 = 796.662,5004$ για αποπληρωμή κεφαλαίου. Διαιρούμε το ποσό αυτό με το 500 για να δούμε πόσες ομολογίες θα κληρωθούν. Διαπιστώνουμε ότι πρέπει να κληρωθούν 1.593 ομολογίες αλλά περισσεύουν και 162,5004 Ευρώ. Επειδή αυτό το ποσό δεν εξοφλεί κάποιον τίτλο το κρατά ο οφειλέτης και το προσθέτει στο ποσό των 923.000 στο τρίτο έτος.

3^o ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.545 + 1.593) = 6.862$ το πλήθος. Επομένως στο τέλος του τρίτου χρόνου πρέπει να πληρώσει το ποσό των $6.862 \cdot 500 \cdot 0.03 = 102.930$ Ευρώ για τόκους. Για να υπολογίσουμε το ποσό για αποπληρωμή δανείου θα αφαιρέσουμε το ποσό αυτό από το $923.162, 5004$ και άρα θα έχουμε $820.232, 5004$ Ευρώ για κεφάλαιο. Διαιρώντας με το 500 θα βρούμε το πλήθος των ομολογιών που πρέπει να κληρωθούν και είναι 1.640 τίτλοι. Όμως $820.232, 5004 - 1.640 \cdot 500 = 232, 5004$ Ευρώ τα οποία πρέπει να προστεθούν στην επόμενη χρονιά.

4^o ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.545 + 1.593 + 1.640) = 5.222$ τίτλοι. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος του τέταρτου έτους θα πληρώσει για τόκους το ποσό $5.222 \cdot 500 \cdot 0.03 = 78.330$. Αφαιρούμε από το ποσό των $923.232, 5004$ για να υπολογίσουμε το ποσό για κεφάλαιο το οποίο είναι $923.232, 5004 - 78.330 = 844.902, 5004$ Ευρώ. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των ομολογιών διαιρούμε το ποσό αυτό με το 500 και έχουμε ότι είναι 1.689 ομολογίες. Όμως $844.902, 5004 - 1.689 \cdot 500 = 402, 5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στον επόμενο χρόνο.

5^o ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.545 + 1.593 + 1.640 + 1.689) = 3.533$ το πλήθος. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος τους πέμπτου έτους θα πληρώσει το ποσό $3.533 \cdot 500 \cdot 0.03 =$

52.995 Ευρώ για τόκους. 'ρα για κεφάλαιο θα δώσει το ποσό $923.402,5004 - 52.995 = 870.407,5004$ Ευρώ. Διαιρούμε με το 500 για να βρούμε το πλήθος των ομολογιών το οποίο είναι 1.740 ομολογίες. Όμως περισσεύουν $870.407,5004 - 1.740 \cdot 500 = 407,5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στο επόμενο και τελευταίο έτος.

6^o ´Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.544 + 1.593 + 1.640 + 1.689 + 1.740) = 1.793$. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος του έκτου έτους θα πληρώσει το ποσό $1.793 \cdot 500 \cdot 0.03 = 26.895$ Ευρώ για τόκους. 'ρα για κεφάλαιο θα δώσει το ποσό των $923.407,5004 - 26.895 = 896.512,5004$ Ευρώ. Εφόσον είναι το τελευταίο έτος θα πρέπει να ισχύει $\frac{896.512,5004}{500} = 1.793$.

Έτη	Πλήθος Τίτλων	Τόκοι Περιόδου
1	1.545	150.000
2	1.593	126.825
3	1.640	102.930
4	1.689	78.330
5	1.740	52.995
6	1.793	26.895

□