Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

Νίκος Χαλιδιάς
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες εμφανίζονται συχνά στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών. Στόχος εδώ είναι να αποφύγουμε την διατύπωση και απόδειξη θεωρημάτων που σχετίζονται με τις εξισώσεις διαφορών, αλλά ο ενδιαφερόμενος μπορεί στο βιβλίο [3] να μελετήσει συστηματικά το θέμα αυτό.

• Έστω μια ακολουθία αριθμών $y(n)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) \quad (\text{εξίσωση διαφορών}) \\ y(0) &= y_0 \quad (\text{αρχική συνθήκη}) \end{aligned}$$

όπου $a, y_0 \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί τα παραπάνω. Εφόσον $y(n+1) = ay(n) = a^2 y(n-1)$ προκύπτει εύκολα ότι $y(n) = a^n y(0)$. Αντικαθιστώντας και το δεδομένο $y(0) = y_0$ καταλήγουμε στο ότι $y(n) = a^n y_0$. Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1}{2} y(n) \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι $y(n) = 3\frac{1}{2^n}$.

• Θα γενικεύσουμε στην συνέχεια την παραπάνω εξίσωση διαφορών εργαζόμενοι σε μια εξίσωση σε μορφή πινάκων. Έστω $z(n) = \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$ μια ακολουθία διανυσμάτων και έστω ένας δοσμένος πίνακας $A_{k\times k}$. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} z(n+1) &= A \cdot z(n) \\ z(0) &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκεπτόμενοι όπως προηγούμενα προκύπτει ότι $z(n) = A^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$. Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A έτσι ώστε να πάρουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών.

• Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης.

Έστω μια ακολουθία $y(n)$ τ.ω.

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = 0 \tag{1}$$

όπου $a_{k-1}, \cdots, a_0$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται ομογενής και γραμμική εξίσωση διαφορών k τάξης. Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό στον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα A κάτι το οποίο έχουμε μελετήσει διεξοδικά στο κεφάλαιο γραμμικής άλγεβρας. Για να γίνει αυτό κατασκευάζουμε k νέες ακολουθίες $b_1(n), b_2(n), \cdots, b_k(n)$ τ.ω.

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ &\vdots \\ b_k(n) &= y(n+k-1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} b_1(n+1) &= b_2(n) \\ b_2(n+1) &= b_3(n) \\ &\vdots \\ b_{k-1}(n+1) &= b_k(n) \\ b_k(n+1) &= -a_0 b_1(n) - a_1 b_2(n) - \cdots - a_{k-1} b_k(n) \end{aligned} \tag{2}$$

Έπειτα θέτουμε $x_n = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ \vdots \\ b_k(n) \end{pmatrix}$ και επομένως το σύστημα 2 γράφεται $x_{n+1} = A \cdot x_n$ όπου $A_{k\times k}$ είναι ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτής της μορφής είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο `συνοδός πίνακας` του πολυωνύμου $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (δες [2]). Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό όσο και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι ίσο με το $d_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (συγκρίνετε το με την εξίσωση διαφορών!).

Συνεπώς ισχύει ότι

$$x_n = A^n \cdot x_0$$

άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα A. Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο $k-1$ βαθμού, το $v(\lambda) = c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_0$, έτσι ώστε

$$\begin{array}{rcl} v(\lambda_1) & = & f(\lambda_1) \\ v^{'}(\lambda_1 & = & f^{'}(\lambda_1) \\ & \vdots & \\ v^{(r_1-1)}(\lambda_1) & = & f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ & \vdots & \\ v(\lambda_2) & = & f(\lambda_2) \\ & \vdots & \end{array}$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) και $r_1, \cdots, r_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους και επίσης $f(x) = x^n$. Αν συμβολίσουμε με F τον πίνακα του παραπάνω συστήματος τότε η λύση θα είναι η

$$\begin{pmatrix} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f^{'}(\lambda_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Δηλαδή οι συντελεστές $c_{k-1}, \cdots, c_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός του δεξί μέλους του παραπάνω συστήματος. Επειδή $A^n = c_{k-1}A^{k-1} + c_{k-2}A^{k-2} + \cdots + c_0 I_{k\times k}$ έπεται ότι η $y(n)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{rcl} y(n) = b_1(n) = & & \lambda_1^n(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1} n^{r_1-1}) \\ & + & \lambda_2^n(f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1} n^{r_2-1}) \\ & + & \lambda_3^n \cdots \end{array}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots$ αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα υπολογισθούν αν μας δίνονται ισάριθμες αρχικές συνθήκες.

Παραδειγμα 1 *Έστω η παρακάτω εξίσωση διαφορών*

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

το οποίο έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας 1 (δηλαδή $r_1 = 1$) και $\lambda_2 = -3$ πολλαπλότητας 2 (δηλαδή $r_2 = 2$). Συνεπώς η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = c_0 1^n + (-3)^n(d_0 + d_1 n)$$

όπου $c_0, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές. □

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να μετατρέψουμε μια μη ομογενή εξίσωση διαφορών ανώτερης τάξης σε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = w(n)$$

Αν μπορούμε να βρούμε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών, δηλαδή ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \\ \vdots \\ z_k(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix} \tag{3}$$

όπου $A_{k\times k}$ πίνακας πραγματικών αριθμών (και όχι συναρτήσεις του n), έτσι ώστε $z_1(n) = w(n)$ τότε η μη ομογενής εξίσωση διαφορών μπορεί να μετατραπεί σε ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \\ \vdots \\ z_k(n+1) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$$

όπου B κατάλληλος πίνακας πραγματικών αριθμών. Ένας βολικός τρόπος για να κατασκευάσουμε το σύστημα 3 είναι να κατασκευάσουμε μια ομογενής εξίσωση διαφορών ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές της οποίας μια λύση να είναι η $w(n)$. Δηλαδή μια εξίσωση της μορφής

$$y(n+k) + c_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + c_0 y(n) = 0$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και κατάλληλες σταθερές $c_0, c_1, \cdots$, Στην συνέχεια, κατά τα γνωστά, κατασκευάζουμε το σύστημα 3 από αυτή την εξίσωση διαφορών.

Παραδειγμα 2 *Έστω η μη ομογενής εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = w, \quad c, d, w \in \mathbb{R}$$

Θα μετατρέψουμε την παραπάνω μη ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης σε ομογενή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης.

Πρέπει να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της οποίας λύση να είναι η $g(n) = w$. Για την συγκεκριμένη περίπτωση θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης. Δηλαδή

$$h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Υπάρχει κάποιο $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. η $g(n) = w$ να είναι λύση της; Τοποθετώντας την $g(n) = w$ στην εξίσωση θα υπολογίσω το c_0, αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει, θα προσπαθήσω να κατασκευάσω μια ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης η οποία θα έχει δυο συντελεστές που μπορώ να επιλέξω και άρα περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας.

Αν η $g(n) = w$ *ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση διαφορών θα ισχύει*

$$w + c_0 w = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι $c_0 = -1$ *και επομένως η* $g(n) = w$ *είναι μια λύση της εξίσωσης διαφορών*

$$h(n+1) = h(n)$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν χρειάζεται να μετατρέψουμε αυτή την εξίσωση διαφορών σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης διότι είναι ήδη πρώτης τάξης.

Στην συνέχεια θα μετατρέψουμε την αρχική εξίσωση διαφορών σε ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ z_1(n) &= w \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -d & -c & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \end{pmatrix}$$

Άρα, θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του παραπάνω πίνακα. Σημειώστε ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\delta(k) = (k-1)(k^2 + ck + d)$ *αφού ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός σε μορφή Block (δες θεώρημα 578 του [1]). Αν για παράδειγμα οι ιδιοτιμές είναι οι* $k_1 = 1$ *πολλαπλότητας δυο και η* $k_2 = \lambda$ *τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή*

$$y(n) = A + Bn + C\lambda^n$$

Αντικαθιστώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τις σταθερές A, B, C*.*

Ας πάρουμε για παράδειγμα την παρακάτω εξίσωση

$$y(n+2) - \frac{1}{p} y(n+1) + \frac{1-p}{p} y(n) = -\frac{1}{p} \tag{4}$$

με $p \in (0, 1)$*.*

Αν $p \neq \frac{1}{2}$ *τότε οι ιδιοτιμές είναι οι* $k_1 = 1$ *πολλαπλότητας δυο και* $k_2 = \frac{1-p}{p}$*. Επομένως η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή*

$$y(n) = A + Bn + C\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών διαπιστώνουμε ότι πρέπει $B = \frac{1}{1-2p}$*. Δηλαδή όταν* $p \neq \frac{1}{2}$ *η λύση θα έχει την μορφή*

$$y(n) = A + \frac{n}{1-2p} + C\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \tag{5}$$

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε και τους A, C αν έχουμε και δυο αρχικές συνθήκες.

Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε έχουμε μια ιδιοτιμή, την $k = 1$ πολλαπλότητας τρία, επομένως η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn + Cn^2$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι $C = -1$. Δηλαδή η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn - n^2 \tag{6}$$

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε και τους A, B αν έχουμε και δυο αρχικές συνθήκες. □

Παραδειγμα 3 *Έστω η εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = n$$

Στόχος μας, σε πρώτη φάση, είναι να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της οποίας μια λύση της να είναι η $g(n) = n$. Ας δοκιμάσουμε πάλι μια εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης, δηλαδή της μορφής

$$h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Τοποθετώντας την $g(n) = n$ στην εξίσωση αυτή έχουμε

$$(n+1) + c_0 n = 0$$

Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. να ισχύει το παραπάνω για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση δεύτερης τάξης. Αυτή θα έχει την μορφή

$$h(n+2) + c_1 h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Τοποθετώντας την $g(n) = n$ στην εξίσωση αυτή έχουμε ότι $c_1 = -2$ και $c_0 = 1$. Δηλαδή η $g(n) = n$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$h(n+2) - 2h(n+1) + h(n) = 0$$

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης από την παραπάνω εξίσωση. Θέτουμε

$$\begin{aligned} z_1(n) &= h(n) \\ z_2(n) &= h(n+1) \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης είναι το

$$\begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix}$$

Τέλος, θα κατασκευάσουμε το σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης για την αρχική εξίσωση διαφορών. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αρχική εξίσωση διαφορών θα είναι ισοδύναμη με το παρακάτω σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας του παραπάνω συστήματος είναι άνω τριγωνικός σε μορφή Block επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\delta(k) = (k^2 + ck + d)(k^2 - 2k + 1)$.

Για παράδειγμα έστω η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = n$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα θα είναι το $\delta(k) = (k-1)^2(k^2 - 2k + 1) = (k-1)^4$. *Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή*

$$y(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών παίρνουμε την εξής σχέση

$$2C + (6n + 6)D = n$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$(6D - 1)n + 6D + 2C = 0$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται για οποιοδήποτε n *όταν* $D = \frac{1}{6}$ *και* $C = -\frac{1}{2}$. *Τις σταθερές* A, B *μπορούμε να τις υπολογίσουμε αν έχουμε δυο αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν απαιτήσουμε* $y(0) = 1$ *και* $y(1) = 2$ *προκύπτει ότι* $A = 1$ *και* $B = \frac{4}{3}$. *Επομένως η εξίσωση διαφορών*

$$\begin{aligned} y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) &= n \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την

$$y(n) = 1 + \frac{4}{3}n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

$\square$

Παραδειγμα 4 *Έστω η εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2)+cy(n+1)+dy(n)=\lambda w^n$$

Επειδή η εξίσωση είναι μη ομογενής θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών όπου η $g(n)=\lambda w^n$ θα είναι μια λύση. Δοκιμάζουμε μια εξίσωση πρώτης τάξης, δηλαδή

$$h(n+1)+c_0h(n)=0$$

Τοποθετούμε την $g(n)=\lambda w^n$ στην εξίσωση αυτή και έχουμε $c_0=w$, άρα η εξίσωση είναι η

$$h(n+1)=wh(n)$$

Επομένως η μη ομογενής εξίσωση διαφορών γράφεται, αφού πρώτα θέσουμε $b_1(n)=y(n)$ και $b_2(n)=y(n+1)$,

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -d & -c & 1 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι το $\delta(k)=(k-w)(k^2+ck+d)$.

Ως δούμε συγκεκριμένα την εξίσωση

$$\begin{aligned} y(n+2)-2y(n+1)+y(n) &= 2\cdot 3^n \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση θα είναι της μορφής

$$y(n)=A+Bn+C3^n$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι $C=\frac{1}{2}$. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες έχουμε τελικά την λύση η οποία είναι

$$y(n)=\frac{1}{2}+\frac{3^n}{2}$$

□

Παραδειγμα 5 (Τυχαίος Περίπατος με ένα ανακλαστικό εμπόδιο) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στο $\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $X_0=i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω. $P_{i,i-1}=q$, $P_{i,i+1}=p$ για $i\geq 1$ ενώ $P_{00}=q$ και $P_{01}=p$ με $p+q=1$ και $pq\neq 0$.*

Διαλέγουμε $s=0$ και σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$y_i=\sum_{j\neq 0}P_{ij}y_j, \quad i\neq 0$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= py_{i+1}+qy_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots, \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύξαμε περί εξισώσεων διαφορών θα ισχύει ότι

$$y_i = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad \text{όταν } p \neq q$$

και

$$y_i = C + Di, \quad \text{όταν } p = q = \frac{1}{2}$$

• *Αν* $q > p$ *τότε αναγκαστικά* $D = 0$ *αλλιώς η λύση θα είναι μη φραγμένη. Επομένως* $y_i = C$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *και επιπλέον* $y_1 = pC$. *Άρα από την σχέση* $y_2 = qy_1 + py_3$ *προκύπτει ότι* $C = qpC + pC$. *Αν* $C \neq 0$ *τότε αναγκαστικά* $p = 1$ *το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι* $q > p$. *Άρα* $C = 0$ *επομένως δεν υπάρχει μη μηδενική και φραγμένη λύση του συστήματος και συνεπώς η αλυσίδα είναι επαναληπτική.*

• *Αν* $q = p = \frac{1}{2}$ *τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η* $y_i = A + Bi$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *Προφανώς,* $B = 0$ *αλλιώς η λύση είναι μη φραγμένη και επομένως* $y_i = A$ *για* $i = 2, 3, \cdots$,. *Όμως* $y_1 = py_2 = pA$ *και όπως προηγούμενα έχουμε το συμπέρασμα ότι αναγκαστικά* $A = 0$, *δηλαδή η αλυσίδα είναι πάλι επαναληπτική.*

• *Αν* $q < p$ *τότε μπορούμε να δούμε ότι μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι η*

$$y_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad \text{για } i = 1, 2, \cdots , \tag{7}$$

Προφανώς πρόκειται για μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση των εξισώσεων επομένως σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι μεταβατική.

Αυτό θα μπορούσαμε να το δούμε και ως εξής: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= py_{i+1} + qy_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots , \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned} y_i &= qy_{i-1} + py_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots , \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Όταν $p \neq q$ *τότε η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι η* $y_i = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i$. *Αφού* $y_0 = 0$ *έπεται ότι* $D = -C$ *και άρα* $y_i = C\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$ *για οποιοδήποτε* C. *Διαλέγοντας* $C = 1$ *παίρνουμε την μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση της ισότητας 7.* □

Παραδειγμα 6 (Τυχαίος Περίπατος) *Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 1156 του βιβλίου [1] στον τυχαίο περίπατο για να επιβεβαιώσουμε το γεγονός ότι είναι επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν* $p = q = \frac{1}{2}$ *και μεταβατική αλλιώς (δες θεώρημα 1151 του βιβλίου [1]). Διαλέγουμε* $s = 0$ *και σχηματίζουμε τις εξισώσεις*

$$y_i = \sum_{j \neq 0} P_{ij} y_j, \quad i \neq 0$$

Το σύστημα αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε δυο συστήματα εξισώσεων. Το πρώτο θα είναι

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= qy_{i-1} + py_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

και το δεύτερο θα είναι

$$\begin{aligned} y_{-1} &= qy_{-2} \\ y_{-i} &= qy_{-i-1} + py_{-i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

Θέτοντας $z_i = y_{-i}$ *το δεύτερο σύστημα γράφεται*

$$\begin{aligned} z_1 &= qz_2 \\ z_i &= pz_{i-1} + qz_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

• *Αν* $q > p$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$. *Αναγκαστικά θα πρέπει* $B = 0$ *για να είναι φραγμένη και επομένως* $y_i = A$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *καθώς και* $y_1 = pA$. *Από την σχέση* $y_2 = qy_1 + py_3$ *προκύπτει ότι αν* $A \neq 0$ *τότε αναγκαστικά* $p = 1$ *το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση* $q > p$. *Άρα* $A = 0$. *Στο δεύτερο όμως σύστημα μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση είναι της μορφής* $z_i = 1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i$. *Επομένως η αλυσίδα σε αυτή την περίπτωση είναι μεταβατική.*

• *Αν* $q < p$ *εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και καταλήγουμε στο γνωστό συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική.*

• *Αν* $q = p = \frac{1}{2}$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + Bi$. *Άρα πρέπει* $B = 0$ *αλλιώς θα είναι μη φραγμένη. Αν* $A \neq 0$ *τότε από τις σχέσεις* $y_1 = py_2$ *και* $y_2 = qy_1 + py_2$ *προκύπτει ότι* $p = 1$ *το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι* $p = q = \frac{1}{2}$. *Δηλαδή αναγκαστικά* $A = 0$. *Εργαζόμενοι στο δεύτερο σύστημα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μοναδική λύση των εξισώσεων είναι η μηδενική. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική.* □

Παραδειγμα 7 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & \dots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & \dots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

με $0 < p_i < 1$ *για* $i = 0, 1, 2, \cdots$. *Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη αφού* $p_i > 0$ *για όλα τα* i *άρα όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Επομένως η αλυσίδα θα είναι μεταβατική* `αν και μόνο αν` *είναι μεταβατική η κατάσταση* 0. *Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση* 0 *τότε το μόνο πιθανό μονοπάτι στο οποίο δεν ξαναγυρνά είναι το* $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$. *Η πιθανότητα να ακολουθήσει η αλυσίδα αυτό το μονοπάτι είναι* $(1 - p_0) \cdot (1 - p_1) \cdots$. *Η πιθανότητα αυτή δηλαδή είναι ίση με την πιθανότητα η αλυσίδα να φύγει από την κατάσταση* 0 *και να μην* επιστρέψει ποτέ. Συνεπώς, αν είναι θετική τότε η κατάσταση 0 είναι μεταβατική ενώ αν είναι μηδέν είναι επαναληπτική. Δηλαδή η αλυσίδα είναι μεταβατική αν και μόνο αν

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-p_i) > 0$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} < \infty$$

Ας εφαρμόσουμε και το θεώρημα 1156 του βιβλίου [1] για να δούμε αν συμφωνεί με το παραπάνω συμπέρασμα. Διαλέγουμε $s = 0$ και σχηματίζουμε το σύστημα εξισώσεων

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{8}$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$y_n = \frac{1}{1-p_{n-1}} y_{n-1}$$

επομένως

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

Εφόσον $\frac{1}{1-p_i} > 1$ έπεται ότι η ακολουθία

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

είναι αύξουσα. Αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο ∞ τότε υποχρεωτικά θα πρέπει να διαλέξουμε $y_1 = 0$ και τότε η αλυσίδα θα είναι επαναληπτική. Αν όμως η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο $A < \infty$ τότε μπορούμε να διαλέξουμε $y_1 = \frac{1}{A}$ και επομένως η

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

θα είναι μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση του συστήματος των εξισώσεων 8. Τελικά η αλυσίδα θα είναι μεταβατική αν και μόνο αν

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} < \infty$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{1-p_i} - 1\right) < \infty$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 355 του βιβλίου [1] καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{1-p_i} < \infty$$

Για παράδειγμα αν $p_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ *για* $n \geq 2$ *τότε προκύπτει ότι*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} = \infty$$

δηλαδή η αλυσίδα είναι επαναληπτική ενώ αν $p_n = \frac{1}{n^2}$ *τότε*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} < \infty$$

και επομένως είναι μεταβατική.
Στην περίπτωση όπου οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές τότε θα υπάρχει στάσιμη κατανομή **αν και μόνο αν** *(δες πόρισμα 1232 του βιβλίου [1]) οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Υπολογίζοντας την στάσιμη κατανομή εύκολα βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο του διανύσματος* π *έχει την μορφή* $\pi_k = \pi_0(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})$ *οπότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει ότι*

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 1 - p_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})} \tag{9}$$

Αν η αλυσίδα είναι επαναληπτική τότε

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i} = \infty$$

το οποίο σημαίνει ότι $(1-p_0)\cdots(1-p_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Παρότι τα γινόμενα* $(1-p_0)\cdots(1-p_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$ *υπάρχει περίπτωση όπου το άπειρο άθροισμα στην ισότητα 9 να αποκλίνει. Πράγματι, αν* $p_k = \frac{1}{k}$ *για* $k > 1$ *τότε τα γινόμενα είναι ίσα με* $(1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_k) = (1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot\frac{1}{k}$ *συγκλίνουν στο μηδέν όμως το άπειρο άθροισμα αποκλίνει διότι έχει γενικό όρο τον* $\frac{1}{k}$ *και ως γνωστό η σειρά αποκλίνει οπότε σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και μηδενικά επαναληπτική.*
Οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με μηδέν και στις δυο περιπτώσεις όπου οι καταστάσεις δεν είναι θετικά επαναληπτικές. Στην πρώτη περίπτωση όπου όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές έχουμε αποδείξει ότι $P_{ij}^n \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Όταν οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές τότε οι καταστάσεις έχουν μέσο χρόνο επαναφοράς* $m_i = \infty$ *επομένως από το θεώρημα 1213 του βιβλίου [1] προκύπτει ότι οι οριακές πιθανότητες είναι πάλι μηδέν. Στην περίπτωση που είναι θετικά επαναληπτικές τότε οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με* $\pi_i = \frac{1}{m_i}$. □

Στα επόμενα παραδείγματα θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο πρώτης επίσκεψης ή μέσο χρόνο απορρόφησης σε διάφορες αλυσίδες (δείτε το θεώρημα 1192 του [1]). Ένα χρήσιμο λήμμα είναι το παρακάτω καθώς επίσης και η παρατήρηση μετά από αυτό.

Λημμα 8 *Έστω ότι υπάρχει κάποια κατάσταση $q \in S$ τέτοια ώστε*

$$k_q^A = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n | X_0 = q) = \infty$$

Τότε $k_j^A = \infty$ για οποιαδήποτε κατάσταση j τέτοια ώστε $P_{jq} > 0$.

Αποδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
k_j^A &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n | X_0 = j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{l \in S} P(H^A = n | X_1 = l) P_{jl} \\
&= \sum_{l \in S} P_{jl} \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n | X_1 = l)
\end{aligned}$$

Στο διπλό άθροισμα παραπάνω θα εμφανιστεί και το άθροισμα για $l = q$ το οποίο είναι ίσο με άπειρο. Επομένως θα ισχύει ότι $k_j^A = \infty$ για οποιαδήποτε κατάσταση j τέτοια ώστε $P_{jq} > 0$. □

Παρατηρηση 9 *Αν οι μέσοι χρόνοι k_i^A είναι πεπερασμένοι τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1192 του [1]) ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων*

$$\begin{aligned}
k_i^A &= 0, & \text{όταν} \quad i \in A, \\
k_i^A &= 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij} k_j^A, & \text{όταν} \quad i \notin A.
\end{aligned}$$

αρκεί κάθε κατάσταση $j \notin A$ να επικοινωνεί με τουλάχιστον μια κατάσταση $l \in A$. Επομένως, αν το σύστημα αυτό δεν επιδέχεται μη αρνητική λύση τότε υποχρεωτικά οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με άπειρο. Αν το σύστημα έχει τουλάχιστον μια μη αρνητική λύση τότε από την απόδειξη του θεωρήματος 1192 προκύπτει ότι οι μέσοι χρόνοι k_i^A είναι πεπερασμένοι, αφού φράσσονται από πάνω από την λύση του συστήματος. Συνεπώς, αποτελούν λύση του παραπάνω συστήματος. □

Παραδειγμα 10 *Θα υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους απορρόφησης του παραδείγματος 1196, ξεκινώντας από τον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια όπου η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Σύμφωνα με το θεώρημα 1192 οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης θα ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned}
k_0 &= k_m = 0 \\
k_i &= 1 + (1-p)k_{i-1} + pk_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1
\end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε πρόκειται για μια μη ομογενή εξίσωση διαφορών. Είναι ισοδύναμη με την 4 (του παραδείγματος 2). Η λύση της, όταν $p \neq \frac{1}{2}$ είναι η 5 ενώ όταν $p = \frac{1}{2}$ είναι η 6. Στην περίπτωση $p \neq \frac{1}{2}$ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες $k_0 = k_m = 0$ προκύπτει ότι

$$C = -A = \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m - (1-p)^m)}$$

ενώ στην περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ *προκύπτει ότι* $A = 0$ *και* $B = m$. *Δηλαδή στον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια έχουμε*

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p} + \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m-(1-p)^m)}\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right), & \textit{όταν } p \neq \frac{1}{2} \\ n(m-n), & \textit{όταν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους απορρόφησης στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο. Αν $p \neq \frac{1}{2}$ *τότε η λύση όπως είδαμε είναι η*

$$k_n = A + \frac{n}{1-2p} + C\frac{(1-p)^n}{p^n}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη $k_0 = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p} + C\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right)$$

Αν $p < \frac{1}{2}$ *οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης θα δίνονται διαλέγοντας* $C = 0$ *οπότε θα είναι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p}, \quad p < \frac{1}{2}$$

Αν $p > \frac{1}{2}$ *δεν υπάρχει σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε η* k_n *να είναι θετική για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης είναι ίσοι με άπειρο. Παρόμοια και στην περίπτωση* $p = \frac{1}{2}$.

Τελικά στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο θα έχουμε

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p}, & \textit{όταν } p < \frac{1}{2} \\ \infty, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

□

Παραδειγμα 11 *Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε πάλι τον τυχαίο περίπατο, χωρίς εμπόδια, ο οποίος ξεκινά από το 0, δηλαδή* $X_0 = 0$. *Επίσης υποθέτουμε ότι* $P(X_{n+1} = i+1|X_n = i) = p$ *και* $P(X_{n+1} = i-1|X_n = i) = 1-p$ *όπου* $p > \frac{1}{2}$. *Ξεκινώντας από το μηδέν, ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι ποιος είναι ο μέσος όρος βημάτων για να μεταβεί στην κατάσταση* $m > 0$. *Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τους* k_i^m *για όλα τα* $i \leq m$. *Οι εξισώσεις που ικανοποιούν είναι οι παρακάτω*

$$\begin{aligned} k_m^m &= 0 \\ k_i^m &= 1 + (1-p)k_{i-1}^m + pk_{i+1}^m \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών έχει ως λύση την

$$k_i^m = A + \frac{i}{1-2p} + C\frac{(1-p)^i}{p^i}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1} + C\left(\frac{(1-p)^i}{p^i} - \frac{(1-p)^m}{p^m}\right)$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων η οποία λαμβάνεται όταν $C = 0$. *Δηλαδή*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1}$$

και ειδικότερα ο μέσος χρόνος για να μεταβεί από την κατάσταση μηδέν στην $m > 0$ *είναι*

$$k_0^m = \frac{m}{2p-1}$$

Αν $m < 0$ *τότε οι εξισώσεις δεν επιδέχονται μη αρνητική λύση (αφού δεν υπάρχει κατάλληλη σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για κάθε* $i \in (m, +\infty)$*) το οποίο σημαίνει ότι οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με το άπειρο. Δηλαδή ξεκινώντας από το μηδέν κατά μέσο όρο θα χρειαστούν άπειρα βήματα για να φτάσει στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση, δηλαδή την* $m = -1$.

Ας δούμε και την περίπτωση $p = \frac{1}{2}$. *Στην περίπτωση αυτή η λύση των εξισώσεων θα έχει την μορφή*

$$k_i^m = A + Bi - i^2, \qquad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = (m-i)(m+i-B), \qquad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων. Όμως δεν υπάρχει τέτοια λύση καθώς δεν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $B \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για όλα τα* $i \in (-\infty, m)$. *Άρα* $k_i^m = \infty$ *και πιο συγκεκριμένα σημαίνει ότι στον συμμετρικό τυχαίο περίπατο ο μέσος χρόνος βημάτων για να μεταβεί από την κατάσταση 0 στην 1 είναι ίσος με το άπειρο.* $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Νίκος Χαλιδιάς, Απειροστικός Λογισμός Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, εκδόσεις Broken Hills, 2018.

[2] L. Brand, *The Companion Matrix and Its Properties*, The American Mathematical Monthly Vol. 71, No. 6 1964, pp. 629-634.

[3] S. Elaydi, *An introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.