Σημειώσεις Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙ

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό Geogebra για υπολογισμούς.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση Νίκος Χαλιδιάς.

1 Πιθανότητες

Έστω ένα πείραμα τύχης (π.χ. ρίψιμο ζαριών, στρίψιμο νομίσματος κτλ) για το οποίο γνωρίζουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ονομάζεται δειγματικός χώρος.

Ας δούμε το στρίψιμο ενός νομίσματος. Όπως γνωρίζουμε έχει δυο πιθανά αποτελέσματα, κορώνα ή γράμματα και το σύνολο των αποτελεσμάτων το συμβολίζουμε με

$$\Omega = \{K, \Gamma\}$$

Στο ρίξιμο ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος όπως γνωρίζουμε είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Επίσης, ένα άλλο πείραμα τύχης είναι να μετρήσει κανείς το χρόνο ζωής ενός λαμπτήρα. Ο δειγματικός χώρος σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\Omega = \{t : 0 \leq t < \infty\}$$

Ο δειγματικός χώρος επομένως δεν είναι πάντα ένα διακριτό σύνολο, αλλά μπορεί να είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ή κάτι άλλο.

Έστω Ω δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και έστω E, F δυο οποιαδήποτε υποσύνολά του. Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμη υποσύνολα, τα $E \cup F$ και $E \cap F$ τα οποία είναι η ένωση και η τομή αντίστοιχα των υποσυνόλων.

Για την ένωση και την τομή, ισχύουν τα παρακάτω,

$$\begin{aligned}
\text{(Αντιμεταθετική)} \quad & E \cup F = F \cup E, \\
\text{(Προσεταιριστική)} \quad & (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G), \\
\text{(Επιμεριστική)} \quad & (E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)
\end{aligned}$$

Οι ίδιες ιδιότητες ικανοποιούνται αντιστρέφοντας τους ρόλους της ένωσης και της τομής. Ισχύει και ο νόμος De Morgan,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$$

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου είναι το ίδιο πιθανά, τότε μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα ενός υποσυνόλου E ως εξής,

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)}, \quad E \subseteq \Omega,$$

όπου $N(E), N(\Omega)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του E και του Ω αντίστοιχα. Αυτό ισχύει βέβαια, στην περίπτωση που τα E, Ω είναι διακριτά σύνολα και μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος τους. Σε άλλη περίπτωση, η πιθανότητα θα ορισθεί διαφορετικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου ο δειγματικός χώρος είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να μετρούμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υπάρχουν αρκετά προβλήματα σε αυτή τη διαδικασία και δεν είναι καθόλου απλή όπως η προηγούμενη. Δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ κάποιον αριθμό, με λογικό τρόπο, χωρίς να δημιουργούνται άλλες τεχνικές δυσκολίες. Σε αυτό το επίπεδο, η Θεωρία Μέτρου, είναι αυτή ακριβώς που χρειάζεται για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες αυτές και για να κατασκευασθεί, αξιωματικά, η Θεωρία Πιθανοτήτων με ενιαίο τρόπο για όλες τις περιπτώσεις.

Για τους παραπάνω λόγους θα προχωρήσουμε στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

1.1 'λγεβρα, σ-'λγεβρα και Πιθανότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Έστω Ω ένα οποιοδήποτε σύνολο και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα στο Ω αν*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) *Αν* $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) *Αν* $A, B \in \mathcal{F}$ *τότε* $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Τα στοιχεία μιας άλγεβρας ονομάζονται ενδεχόμενα και μόνο αυτά. Για παράδειγμα το $\{\emptyset, \Omega\}$ είναι άλγεβρα στο Ω, όπως και το $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ όταν $A \subseteq \Omega$.

Ασκηση 2 *Έστω* $\mathcal{F}$ *άλγεβρα. Δείξτε ότι,* $\emptyset \in \mathcal{F}$, *αν* $A, B \in \mathcal{F}$ *τότε* $A \cap B \in \mathcal{F}$ *και* $A \setminus B \in \mathcal{F}$. *Τέλος, αν* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *είναι άλγεβρες τότε και* $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ *είναι επίσης άλγεβρα.*

Αποδειξη. Αφού $\Omega \in \mathcal{F}$ τότε και $\Omega \setminus \Omega \in \mathcal{F}$ το οποίο είναι το κενό σύνολο.

Η τομή $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ και χρησιμοποιούμε τη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα της άλγεβρας για να τελειώσουμε την απόδειξη.

Η διαφορά $A \setminus B = A \cap B^c$ και προκύπτει επίσης ότι ανήκει στην άλγεβρα.

Έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ άλγεβρες. Θα δείξουμε ότι η τομή τους είναι επίσης άλγεβρα. Προφανώς $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Έστω $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, τότε και $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ άρα και $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Παρόμοια και η τρίτη ιδιότητα. $\square$

Παρακάτω, θα ορίσουμε την έννοια της πιθανότητας σε μια άλγεβρα και για το λόγο αυτό ονομάζεται πεπερασμένα προσθετική πιθανότητα.

Ορισμος 3 *Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα του Ω. Μια απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ ονομάζεται πεπερασμένα προσθετική πιθανότητα όταν,*

(*i*) $P(\Omega) = 1$,

(*ii*) *για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ με $A \cap B = \emptyset$ έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Λέμε ότι η $P(A)$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A.

Ασκηση 4 *Δείξτε ότι $P(\emptyset) = 0$, αν $A \subseteq B$ τότε $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, $P(A^c) = 1 - P(A)$, αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.*

Αποδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι $P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$. Οπότε $P(\emptyset) = 0$.

Παρατηρούμε ότι $B = A \cup (B \setminus A)$ επομένως $P(A) + P(B \setminus A) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(B)$ άρα $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο έχουμε ότι $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$. $\square$

Άσκηση 5 *Δείξτε ότι* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Απόδειξη. Η ένωση $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, άρα $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$. Όμως $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ και παρόμοια η $P(B \setminus A)$ και αντικαθιστώντας έχουμε τελειώσει. $\square$

Θα ορίσουμε παρακάτω την έννοια της σ-άλγεβρας η οποία είναι γενικότερη της έννοιας της άλγεβρας.

Ορισμός 6 *Έστω Ω ένα οποιοδήποτε σύνολο και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω αν*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) *Αν* $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) *Αν* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *τότε* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας ονομάζονται ενδεχόμενα και το ζευγάρι $(\Omega, \mathcal{F})$ *ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.*

ΑΣΚΗΣΗ 7 *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος. Δείξτε ότι αν* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *τότε και* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το νόμο του de Morgan έχουμε ότι

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i^c) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c$$

και άρα με τη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα τελειώνουμε την απόδειξη. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια οικογένεια υποσυνόλων του* Ω, *όχι κατά ανάγκη σ-άλγεβρα. Τότε με* $\sigma(\mathcal{A})$ *συμβολίζουμε τη μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{A}$. *Η* $\sigma(\mathcal{A})$ *ονομάζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την* $\mathcal{A}$.

Προφανώς, αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$. Ειδικότερα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 *Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και το $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών διαστημάτων, τότε ονομάζουμε την $\sigma(\mathcal{A})$ την σ-άλγεβρα των συνόλων Borel και τη συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$. Τα σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{B}$ ονομάζονται σύνολα Borel.*

ΑΣΚΗΣΗ 10 *Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι σύνολα Borel: (a, b), (a, ∞), $[a, b]$, $\{a\}$, κάθε πεπερασμένο σύνολο, κάθε αριθμήσιμο σύνολο, το σύνολο των ρητών καθώς και των άρρητων αριθμών.*

Ορίζουμε τώρα την έννοια της πιθανότητας πάνω σε μια σ-άλγεβρα. Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 *Έστω μια απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες,*

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) *για κάθε ακολουθία* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *ανά δύο ξένα, έχουμε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Αυτή ονομάζεται μέτρο πιθανότητας και η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ονομάζεται χώρος πιθανότητας.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12 *Χρησιμοποιώντας το μέτρο Lebesgue από τη θεωρία Μέτρου μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας. Ας πάρουμε το* $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$) *δηλαδή τα σύνολα Borel που είναι υποσύνολα του* Ω *και* $P = Leb$ *το μέτρο Lebesgue όπως ορίζεται στη θεωρία Μέτρου. Το μέτρο αυτό έχει τη βασική ιδιότητα* $Leb[a, b] = b - a$. *Τότε η τριάδα* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *είναι ένας χώρος πιθανότητας.*

ΛΗΜΜΑ 13 *Αν* $A_1, A_2, ...$ *είναι μια αύξουσα (φθίνουσα)* *ακολουθία ενδεχομένων, τότε*

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P(A_k), \qquad \textit{(αύξουσα)} \\
P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P(A_k) \qquad \textit{(φθίνουσα)}
\end{aligned}
$$

Αποδειξη. Θέτουμε $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$ και $B_0 = A_1$ τα οποία είναι ανά δύο ξένα. Επίσης έχουμε

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

και

$$\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_{n+1}.$$

Οπότε,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Για την περίπτωση της φθίνουσας ακολουθίας συνόλων έχουμε, διαπιστώνοντας ότι A_k^c είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k^c\right) \\ &= 1 - \lim_{k\to\infty} P\left(A_k^c\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} (1 - P(A_k^c)) \\ &= \lim_{k\to\infty} P(A_k) \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 14 *Δείξτε ότι*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Επίσης, αν $P(A_n) = 0$ *τότε*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Τέλος, αν $P(A_n) = 1$ *τότε*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Αποδειξη. Θέτουμε $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Τότε

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \text{ αφού } B_n \text{ αύξουσα} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Τα άλλα δύο αφήνονται ως άσκηση. □

Ορισμος 15 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε το άνω και το κάτω όριο μιας ακολουθίας συνόλων $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ ως εξής,*

$$
\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,
$$

$$
\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.
$$

Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα για τα παραπάνω όρια.

Πρόταση 16 *Έστω $A_1, A_2, ... \subseteq \mathcal{F}$ όπου $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Ισχύει ότι*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Το πρώτο λήμμα των Borel-Cantelli είναι το επόμενο.

Λήμμα 17 (Λήμμα των Borel-Cantelli) *Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

τότε

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

’ρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &\le P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty. \end{aligned}$$

Αυτό συμβαίνει διότι η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ συγκλίνει στο S, άρα $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = S - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Ορισμος 18 *Ορίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου $A \in \Omega$ ως εξής,*

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

1.2 Ανεξαρτησία

Θα εξετάσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας δυο και περισσοτέρων ενδεχομένων καθώς και σχετικά θέματα. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Ορισμος 19 *Έστω $P(B) > 0$. Τότε η*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B.

Ασκηση 20 *Δείξτε ότι $P(A|\Omega) = P(A)$. Αν $B \subseteq A$ και $P(B) > 0$, τότε $P(A|B) = 1$. Αν $A \cap B = \emptyset$ και $P(B) > 0$, τότε $P(A|B) = 0$. Αν $A \cap B = \emptyset$ και $P(C) > 0$ τότε $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$. Δείξτε ότι $A \to P(A|B)$ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\mathcal{F}$.*

Ασκηση 21 *Έστω $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. Δείξτε ότι*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap ... \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)... \\ &\quad P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Θα δώσουμε καταρχήν μερικά χρήσιμα αποτελέσματα και ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 22 *Λέμε ότι τα ενδεχόμενα* $H_1, H_2, \ldots$ *παριστούν μια διαμέριση του* Ω *αν είναι ανά δύο ξένα και* $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 (Ολικής πιθανότητας) *Έστω* $H_1, H_2, \ldots$ *μια διαμέριση του* Ω *τ.ω.* $P(H_n) \neq 0$ *για κάθε* n. *Τότε για κάθε ενδεχόμενο* A, *έχουμε*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 24 (Τύπος του Bayes) *Έστω* $H_1, H_2, \ldots$ *μια διαμέριση του* Ω *τ.ω.* $P(H_n) \neq 0$ *και έστω* $P(A) > 0$. *Τότε,*

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)}.$$

Παρακάτω δίνουμε τους ορισμούς για την ανεξαρτησία δύο και περισσότερων ενδεχομένων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 25 *Τα ενδεχόμενα* A, B *ονομάζονται ανεξάρτητα αν*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι ανεξάρτητα αν για κάθε $k \leq n$ και για κάθε επιλογή k ενδεχομένων, η πιθανότητα της τομής τους είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ...$ (άπειρα το πλήθος) λέγονται ανεξάρτητα αν οποιοδήποτε υποσύνολο του πεπερασμένου πλήθους είναι ανεξάρτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *Έστω A, B, C ανεξάρτητα. Δείξτε ότι και A, B^c ανεξάρτητα καθώς και ότι $A, B \cup C$ ανεξάρτητα.*

Το επόμενο θεώρημα είναι το δεύτερο λήμμα των Borel-Cantelli.

ΘΕΩΡΗΜΑ 27 (Δεύτερο λήμμα των Borel-Cantelli) *Έστω ότι τα ενδεχόμενα A_n είναι ανεξάρτητα. Τότε έχουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)
\end{aligned}
$$

Όμως,

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c &= P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) \\
&= P(A_n^c)...P(A_m^c) \\
&\leq e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)},
\end{aligned}
$$

αφού $1 - x \leq e^{-x}$ (δείξτε το).

’ρα

$$
P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c \to 0
$$

όταν $m \to \infty$. Οπότε,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

και τότε $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. $\square$

Παρατηρούμε ότι αν τα ενδεχόμενα A_n είναι ανεξάρτητα, τότε η πιθανότητα

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

έχει μόνο δύο πιθανές τιμές, τις 0 και 1.

1.3 Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 28 *Μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή (ή $\mathcal{F}$-μετρήσιμη) αν $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

Παρατηρήστε, ότι μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μπορεί να μην είναι τυχαία μεταβλητή σε έναν άλλο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ με $\mathcal{G}$ σ-άλγεβρα.

ΑΣΚΗΣΗ 29 *Δείξτε ότι $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή ανν το σύνολο $\{X \in B\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$ για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης, αν X είναι μια σταθερή συνάρτηση τότε είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Το σύνολο $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \{X \in A\} \in \mathcal{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα (δείξτε το). Επίσης, αφού είναι τυχαία μεταβλητή τότε $\{X \in (a, b)\} \in \mathcal{F}$ με $a < b$ (διότι $\{X > a\} \in \mathcal{F}, \{X > b\} \in \mathcal{F}$ άρα και $\{X > a\} \setminus \{X > b\} = \{a < X < b\} \in \mathcal{F}$. 'ρα τα ανοιχτά διαστήματα ανήκουν στο $\mathcal{C}$. Επομένως $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Το δεύτερο μέρος αφήνεται ως άσκηση. □

ΑΣΚΗΣΗ 30 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ μια άλλη σ-άλγεβρα. Δείξτε ότι η X είναι επίσης τυχαία μεταβλητή στην $\mathcal{G}$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 *Έστω X_n ακολουθία τ.μ. Τότε και οι $\sup X_n,\ \inf X_n,\ \limsup X_n,\ \liminf X_n$ είναι τ.μ. Αν*

$X_n \to X$ σημειακά τότε και X τ.μ. Επίσης η δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{I}_A(\omega)$ είναι τ.μ. ανν $A \in \mathcal{F}$. Τέλος, αν X, Y είναι τ.μ. τότε και οι $X \pm Y, XY, X \vee Y, X \wedge Y, X/Y$ είναι επίσης τ.μ.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της σ-άλγεβρας που παράγεται από μια οικογένεια τ.μ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 32 *Έστω $X_1, X_2, ...$ τ.μ. Με $\sigma(X_1, X_2, ...)$ ορίζουμε την μικρότερη σ-άλγεβρα τ.ω. η X_i να είναι τ.μ. για κάθε i.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 33 *Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τ.μ. και έστω η οικογένεια συνόλων*

$$\mathcal{G} = \{(X_1, X_2, ..., X_n) \in B\}$$

για κάθε B σύνολο Borel του $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα και ότι $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Επίσης, εξ ορισμού είναι ίση με την $\sigma(\cup_{i=1}^n \{X_i \in B_i\})$ με B_i οποιοδήποτε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (δείτε 'σκηση 29). Ειδικότερα, για μια τυχαία μεταβλητή X έχουμε $\sigma(X) = (\{X \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Πράγματι, από *άσκηση 79, η X θα είναι $\sigma(X)$-μετρήσιμη αν περιέχει όλα τα ενδεχόμενα $\{X \in B\}$ με $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επιπλέον, αν δείξουμε ότι η $\mathcal{G} = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι σ-άλγεβρα τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\sigma(X) = \mathcal{G}$ αφού η $\sigma(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία η X είναι μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα. Προφανώς το $\Omega \in \mathcal{G}$ διότι το $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ οπότε το ενδεχόμενο $\{X \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{G}$. Αν $A \in \mathcal{G}$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $A = \{X \in B\}$ οπότε $A^c = \{X \in B\}^c = \{X \in B^c\}$ και αφού $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε και $A^c \in \mathcal{G}$. Τέλος, αν $A_1, A_2, .. \in \mathcal{G}$ τότε υπάρχουν $B_1, B_2, ... \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $A_i = \{X \in B_i\}$. Επομένως, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty}\{X \in B_i\} = \{X \in \cup_{i=1}^{\infty} B_i\}$ και αφού $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$.*

Θα λέμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Borel αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ ενός οποιοδήποτε συνόλου Borel είναι επίσης Borel.

ΟΡΙΣΜΟΣ 34 *Δυο τ.μ. X, Y λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε A, B Borel σύνολα τα ενδεχόμενα, $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα. Λέμε ότι οι τ.μ.*

$X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε σύνολα Borel $B_1, B_2, ..., B_n$ τα ενδεχόμενα $\{X_1 \in B_1\}, ..., \{X_n \in B_n\}$ είναι ανεξάρτητα. Τέλος, για μια οποιαδήποτε οικογένεια τ.μ. λέμε ότι είναι ανεξάρτητες αν ένα οποιαδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό τους είναι ανεξάρτητες τ.μ. Δυο σ-άλγεβρες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ λέγονται ανεξάρτητες αν οποιαδήποτε δυο ενδεχόμενα $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητα. Παρόμοια (όπως για τις τ.μ.) για n το πλήθος σ-άλγεβρες καθώς και για οποιαδήποτε οικογένεια σ-αλγεβρών. Θα λέμε επίσης ότι μια τ.μ. X και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες αν οι $\sigma(X), \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες.

Εν ολίγοις, δυο τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες ανν οι σ-άλγεβρες που παράγουν είναι ανεξάρτητες.

Ορισμος 35 *Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{I}$ θα λέγεται π-σύστημα αν είναι κλειστό στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $I, J \in \mathcal{I}$ τότε και $I \cap J \in \mathcal{I}$.*

Παρατηρηση 36 *Αν X είναι μια τ.μ τότε*

$$\sigma(X) = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

όπως είδαμε προηγούμενα. Θα χαρακτηρίσουμε όμως την ίδια σ-άλγεβρα χρησιμοποιώντας την έννοια του π-συστήματος. Έστω $\mathcal{I} = (\{X \leq x\}, x \in \mathbb{R})$. *Μπορεί να δείξει κάποιος ότι η* $\mathcal{I}$ *είναι π-σύστημα. Επιπλέον, η* $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(X)$ *διότι τα σύνολα* $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Επίσης, η* X *είναι* $\sigma(\mathcal{I})$*-μετρήσιμη αφού περιέχει όλες τις κατάλληλες αντίστροφες εικόνες της* X *άρα είναι ίση με την* $\sigma(X)$ *αφού αυτή είναι η μικρότερη για την οποία η* X *είναι μετρήσιμη. Το ίδιο μπορεί να δείξει κανείς για την* $\sigma(X_1, ..., X_n)$ *με* $X_1, ..., X_n$ *τ.μ. ή αλλιώς αν*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (\omega \in \Omega : (X_1, ..., X_n) \in ((-\infty, x_1], ..., (-\infty, x_n]) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\} \right)
\end{aligned}$$

τότε $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

Θα δώσουμε παρακάτω ένα λήμμα το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για το χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας τ.μ.

ΛΗΜΜΑ 37 *Έστω* $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ *δύο π-συστήματα υποσύνολα* της $\mathcal{F}$. Τότε οι $\sigma(\mathcal{I}), \sigma(\mathcal{J})$ είναι ανεξάρτητες ανν τα $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ είναι ανεξάρτητα.

Παρατηρηση 38 *Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να πούμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες ανν*

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})P(\{Y \leq y\})$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Το ίδιο συμβαίνει και με n τ.μ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ ανεξάρτητες τ.μ. Θα δείξουμε ότι οι $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n), \sigma(X_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, σύμφωνα με τα προηγούμενα η $\sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(\mathcal{I})$ με

$$\mathcal{I} = (\omega \in \Omega : (X_1, ..., X_n) \in ((-\infty, x_1], ..., (-\infty, x_n]))$$

και $\sigma(X_{n+1}) = \sigma(\mathcal{J})$ με $\mathcal{J} = (\{X_{n+1} \leq x\}, x \in \mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, οι $\mathcal{F}_n, \sigma(X_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες ανν τα ενδεχόμενα

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}, \{X_{n+1} \leq x_{n+1}\}$$

είναι ανεξάρτητα, το οποίο βέβαια συμβαίνει.

Χρήσιμο επίσης είναι το παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 39 *Αν X, Y δυο τ.μ. τότε η X είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη ανν υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω. $X = g(Y)$. Παρόμοια, αν $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ τ.μ. τότε η X_{n+1} είναι $\sigma(X_1, ..., X_n)$-μετρήσιμη ανν υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω. $X_{n+1} = g(X_1, ..., X_n)$.*

Αν f όπως παραπάνω τότε $\sigma(f(X)) \subseteq \sigma(X)$. Επιπλέον, αν η f έχει αντίστροφο και είναι συνάρτηση *Borel* τότε $\sigma(f(X)) = \sigma(X)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 40 *Έστω η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε μια τ.μ. X είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη ανν είναι σταθερή. Έστω X μια τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ και ας υποθέσουμε ότι οι $\sigma(X), \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητες. Τότε δεν μπορεί να είναι και $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Επίσης, αν είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη δεν μπορεί να είναι και ανεξάρτητη. Συμβαίνουν και τα δυο ταυτόχρονα μόνο όταν η X είναι σταθερή. Όμως δεν σημαίνει ότι αν η X δεν είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη θα είναι αναγκαστικά ανεξάρτητη και το αντίθετο. Τέλος, να επισημάνουμε ότι κάθε $\mathcal{F}$-μετρήσιμη X είναι και G-μετρήσιμη όπου $\mathcal{F} \subseteq G$,* *ενώ αν οι* $\sigma(X), \mathcal{F}$ *είναι ανεξάρτητες τότε και* $\sigma(X), G$ *ανεξάρτητες με* $G \subseteq \mathcal{F}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 41 *Αν δεχτούμε ως πείραμα το στρίψιμο ενός νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος είναι* $\Omega = \{K, \Gamma\}$. *Σε αυτόν το δειγματικό χώρο μπορούμε να προσθέσουμε μια σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}$ *(η οποία εξαρτάται από το δειγματικό χώρο) και έπειτα ένα μέτρο πιθανότητας στο* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τ.μ. σε αυτό το πείραμα, η οποία π.χ. να παίρνει την τιμή 1 όταν έρθει Κορώνα και την τιμή -1 όταν έρθει Γράμματα. Αυτή η τ.μ. με τη σειρά της ορίζει την παραγόμενη σ-άλγεβρα (η οποία εξαρτάται από το δειγματικό χώρο). Αν όμως έχουμε και δεύτερο και τρίτο στρίψιμο νομίσματος (και προσθέσουμε και άλλες τ.μ. που αναφέρονται στο δεύτερο και τρίτο στρίψιμο) ο δειγματικός χώρος αλλάζει. Επομένως αλλάζει η σ-άλγεβρα με την οποία θα εφοδιάσουμε τον δειγματικό χώρο και έπειτα το μέτρο πιθανότητας. Τέλος, θα αλλάξει και η σ-άλγεβρα των τ.μ. αφού έχει αλλάξει ο δειγματικός χώρος. Στην περίπτωση που περιγράψα-*

με παραπάνω η σ-άλγεβρα που παράγει η τ.μ. X *είναι* $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, K, \Gamma\}$. *Αν έχουμε δυο τ.μ. με τον ίδιο ορισμό όπως πριν αλλά η* X_1 *να αναφέρεται στο πρώτο στρίψιμο νομίσματος και η δεύτερη, η* X_2, *στο δεύτερο στρίψιμο νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος γίνεται* $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. *Θα περιγράψουμε τώρα τις* $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \sigma(X_1, X_2)$.

$$
\begin{aligned}
\sigma(X_1) = \quad & \{\emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K)\}, \\
\sigma(X_2) = \quad & \{\emptyset, \Omega, (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma)\}, \\
\sigma(X_1, X_2) = \; & \{\emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K), (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\
& (KK, \Gamma\Gamma), (KK, K\Gamma, \Gamma K), (KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\
& (\Gamma\Gamma, \Gamma K, KK), (\Gamma\Gamma, \Gamma K, K\Gamma), KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma, \Gamma K\}.
\end{aligned}
$$

Οι $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ *είναι σ-άλγεβρες και είναι οι μικρότερες δυνατές έτσι ώστε η* X_1 *να είναι* $\sigma(X_1)$*-μετρήσιμη και αντίστοιχα για την* X_2. *Το ότι η* $\sigma(X_1)$ *έχει αυτή την ιδιότητα είναι προφανές, διότι καταρχήν περιέχει όλες τις αντίστροφες εικόνες της* X_1 *και δεύτερο δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τίποτε από την* $\sigma(X_1)$ *και να παραμείνει σ-άλγεβρα.*

Αν ονομάσουμε $\omega_1 = KK, \omega_2 = K\Gamma, \omega_3 = \Gamma K, \omega_4 =$

ΓΓ τότε η $\sigma(X_1)$ αποτελείται από υποσύνολα του Ω όπως π.χ. το (ω_1, ω_2). Είναι φανερό πως κανείς κατασκευάζει την $\sigma(X_1)$ από τον ορισμό. Για να κατασκευάσει κανείς την $\sigma(X_1, X_2)$ αυτό που πρέπει να κάνει κατ΄ αρχήν είναι να βάλει τα στοιχεία και των δυο $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ και έπειτα όλες τις ενώσεις, τομές και συμπληρώματα για να γίνει σ-άλγεβρα. Παρατηρήστε επίσης, ότι η X_1 είναι $\sigma(X_1)$-μετρήσιμη αλλά όχι $\sigma(X_2)$ μετρήσιμη και αντίστροφα και δείξτε ότι και οι δυο είναι $\sigma(X_1, X_2)$-μετρήσιμες. Δείξτε το με τους ορισμούς. Επίσης, δείξτε ότι οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

ΛΗΜΜΑ 42 *Έστω X τυχαία μεταβλητή. Ισχύει ότι η απεικόνιση*

$$P_X : B \to P(\{X \in B\})$$

είναι μέτρο πιθανότητας στην σ-άλγεβρα των Borel συνόλων του $\mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της πιθανότητας. Προφανώς, $P_X(\mathbb{R}) = 1$.

Έστω τώρα $A_1, A_2, ...$ ανά δυο ξένα $Borel$ σύνολα. Τότε και $\{X \in A_1\}, \{X \in A_2\}, ...$ είναι επίσης ανά δυο ξένα, οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{X \in A_i\}\right) \ (\text{γιατί};) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 43 *Το μέτρο πιθανότητας P_X που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X το ονομάζουμε κατανομή. Η συνάρτηση $F_X(x) = P_X((-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.*

ΛΗΜΜΑ 44 *Η F_X είναι μη φθίνουσα, και ισχύει ότι*

$$\lim_{y \to +\infty} F_X(y) = 1$$

και ότι

$$\lim_{y\to-\infty} F_X(y) = 0$$

Ισχύει επίσης ότι είναι δεξιά συνεχής και ότι είναι συνεχής στο y ανν $P_X(\{y\}) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y_1 \le y_2$. Έχουμε,

$$F_X(y_1) = P(\{X \le y_1\}) \le P(\{X \le y_2\}) = F_X(y_2).$$

Έστω μια ακολουθία $y_n \to \infty$. Τότε $F_X(y_n) = P(\{X \le y_n\}) = P(A_n)$ με $A_n = \{X \le y_n\}$. Η ακολουθία των ενδεχομένων A_n είναι αύξουσα, άρα $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1$.

Έστω μια ακολουθία $y_n \to -\infty$. Τότε $F_X(y_n) = P(\{X \le y_n\}) = P(A_n)$ με $A_n = \{X \le y_n\}$. Η ακολουθία A_n είναι φθίνουσα, άρα

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$$

Έστω μια ακολουθία $y_n \to y$ από δεξιά. Η ακολουθία των ενδεχομένων $A_n = \{X \le y_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(\{X \le y\}) =$

$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ ή αλλιώς ότι $\{X \leq y\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Έστω $\omega \in \{X \leq y\}$ τότε και $\omega \in \{X \leq y_n\}$ άρα $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Από την άλλη μεριά, έστω $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε και $\omega \in A_n$ για κάθε n οπότε $\omega \in \{X \leq y\}$.

Για να δείξουμε και το τελευταίο μέρος της άσκησης αρκεί να δείξουμε ότι η F_X είναι αριστερά συνεχής ανν $P_X(\{y\}) = 0$. Έστω μια ακολουθία $y_n \to y$ από αριστερά, οπότε $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) \to P(\{X < y\}) = F_X(y) - P_X(\{y\})$. 'ρα έχουμε το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι $\cup_{n=1}^{\infty}\{X \leq y_n\} = \{X < y\}$. $\square$

Ορισμος 45 *Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται διακριτή όταν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $P_X(C) = 1$.*

Ορισμος 46 *Μια τυχαία μεταβλητή X είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ αν*

$$P_X((a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 47 *Έστω X μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f_X. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Δώστε έναν τύπο για την $F_X(y)$ συναρτήσει της f_X. Επίσης, δείξτε ότι η F_X είναι συνεχής. Δείξτε ότι $P_X(\{y\}) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε

$$\int_{-n}^{n} f_X(x)dx = P_X((-n,n])$$

'ρα έχουμε

$$P_X(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} P_X((-n,n]) = 1$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} F_X(y) &= P_X((-\infty,y]) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_X((-n,y]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{y} f_X(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{y} f_X(s)ds. \end{aligned}$$

Η $F_X(y)$ είναι προφανώς συνεχής ως ολοκλήρωμα.

Γράφουμε το

$$y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (y - \frac{1}{n}, y]$$

'ρα,

$$\begin{aligned} P_X(\{y\}) &= P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(y-\frac{1}{n}, y]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_X((y-\frac{1}{n}, y]) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(F_X(y) - F_X(y-\frac{1}{n})\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

λόγω συνέχειας της F_X. □

Ασκηση 48 *Αν η συνάρτηση κατανομής F_X μιας τυχαίας μεταβλητής είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε δείξτε ότι η X είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα $f_X(x) = F_X'(x)$.*

Αποδειξη. Αφού η $F_X(x)$ είναι αύξουσα, τότε η $f_X = F_X'(x)$ είναι θετική.

Έχουμε λοιπόν,

$$P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F_X^{'}(s)ds = \int_a^b f_X(s)ds.$$

'ρα η πυκνότητα είναι η παράγωγος (όταν υπάρχει) της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 49 *Έστω μια τυχαία μεταβλητή X. Θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ με $m,\sigma \in \mathbb{R}$ αν είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα,*

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Δείξτε ότι η f_X είναι πυκνότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$. Υπολογίστε την πυκνότητα της $Y = e^X$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(\{Y \leq y\}) \\
&= P(\{e^X \leq y\}) \\
&= P(\{X \leq \ln y\}) \\
&= \int_0^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int_0^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Όμως η $F_Y(y)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι η πυκνότητα της Y. Η παράγωγός της είναι

$$F_Y'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2 y^{\ln y}}}.$$

Δώστε με λεπτομέρεια το τέλος της απόδειξης. $\square$

1.4 Από κοινού κατανομές

ΟΡΙΣΜΟΣ 51 *Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}^2$ είναι τα σύνολα που ανήκουν στην σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ορθογώνια $(a,b) \times (c,d)$.*

ΛΗΜΜΑ 52 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ισχύει ότι $\{(X,Y) \in B\} \in \mathcal{F}$ για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}^2$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω το $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \{(X,Y) \in A\} \in \mathcal{F}$ (δείξτε ότι είναι σ-άλγεβρα). Στην $\mathcal{G}$ ανήκουν όλα τα ορθογώνια της μορφής $(a,b)\times(c,d)$ διότι $\{X \in (a,b)\} \in \mathcal{F}$ και $\{Y \in (c,d)\} \in \mathcal{F}$ άρα και η τομή τους. Επειδή λοιπόν η $\mathcal{B}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ορθογώνια αυτής της μορφής τότε $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 53 *Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι ένα μέτρο πιθανότητας $P_{X,Y}$ στο $\mathbb{R}^2$ τ.ω. $P_{X,Y}(B) = P(\{(X,Y) \in B\})$ για κάθε σύνολο Borel του $\mathbb{R}^2$.*

ΑΣΚΗΣΗ 54 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Δείξτε ότι οι κατανομές P_X, P_Y δίνονται από την από κοινού κατανομή ως εξής,*

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}), \\ P_Y(B) &= P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B), \end{aligned}$$

για κάθε Borel σύνολο του $\mathbb{R}$. Όταν οι P_X, P_Y εκφράζονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες κατανομές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(\{X \in B\}) \\ &= P(\{X \in B\} \cap \{Y \in \mathbb{R}\}) \\ &= P(\{(X,Y) \in B \times \mathbb{R}\}) \\ &= P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Παρόμοια για την $P_Y(B)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 55 *Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y λέγονται από κοινού συνεχείς αν υπάρχει μια συνάρτηση $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, η οποία λέγεται από κοινού πυκνότητα, τ.ω.*

$$P_{X,Y}((a,b] \times (c,d]) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *Έστω X, Y ότι είναι από κοινού συνεχείς τ.μ. Δείξτε ότι οι X, Y είναι επίσης απόλυτα συνεχείς* *με πυκνότητα,*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Οι πυκνότητες f_X, f_Y εκφρασμένες με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες πυκνότητες.

Στην περίπτωση που οι X, Y είναι απόλυτα συνεχείς τ.μ. και γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα μπορούμε να αποφασίσουμε αν είναι ανεξάρτητες με το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 57 *Αν X, Y είναι από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές τότε είναι ανεξάρτητες ανν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Αν γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα δυο τ.μ. τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα του αθροίσματός τους με το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 58 *Έστω X, Y δύο τ.μ. με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$. Τότε η πυκνότητα του αθροίσματός τους είναι*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx.$$

1.5 Μέση Τιμή

Θα ορίσουμε την έννοια της μέσης τιμής για τ.μ. Θα το κάνουμε σταδιακά, ορίζοντάς την πρώτα για απλές τ.μ. και έπειτα για οποιαδήποτε τ.μ.

Ορισμός 59 *Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται απλή αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $P(\{X \in C\}) = 1$.*

Ο παρακάτω ορισμός είναι το πρώτο βήμα για τον τελικό ορισμό μιας οποιαδήποτε τ.μ. (όχι κατά ανάγκη απλής).

Ορισμός 60 *Για μια απλή τυχαία μεταβλητή με n διαφορετικές τιμές $x_1, x_2, ..., x_n$ η μέση τιμή του X*

ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\{X = x_i\}).$$

Οι παρακάτω ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν σχετικά εύκολα για απλές τ.μ.

Προταση 61 *Ισχύει ότι* $\mathbb{E}(X + cY) = \mathbb{E}(X) + c\mathbb{E}(Y)$ *με* $c \in \mathbb{R}$. *Επίσης αν* $X \geq 0$ *τότε και* $\mathbb{E}(X) \geq 0$. *Ακόμη ισχύει ότι* $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$. *Τέλος, αν* $\mathbb{E}(X) = 0$ *και* $X \geq 0$ *τότε και* $P(X = 0) = 1$.

Ασκηση 62 *Έστω μια απλή τυχαία μεταβλητή* X. *Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *έχουμε*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i),$$

όπου $f(x_i) = P(\{X = x_i\})$ *και ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας.*

Ασκηση 63 (Ανισότητα Schwarz) *Έστω* X, Y *απλές τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε την ανισότητα,*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Προταση 64 *Έστω X μια απλή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο (a, b) και $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, τότε $h(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(h(X))$ (ανισότητα Jensen). Ισχύει επίσης ότι $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο A. Τέλος, αν X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Θα προχωρήσουμε τώρα σε επόμενο βήμα το οποίο είναι οι διακριτές τ.μ.

Ορισμος 65 *Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται διακριτή αν έχει αριθμήσιμο πλήθος τιμών. Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές $x_1, x_2, ...$. Τότε η μέση τιμή ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

αρκεί να συγκλίνει η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f(x_i)$.

Ασκηση 66 *Έστω $X \geq 0$ μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και έστω $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq ...$ μια μη φθίνουσα ακολουθία διακριτών τυχαίων μεταβλητών τ.ω $X_n \uparrow X$ καθώς $n \to \infty$. Δείξτε ότι και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.*

Ορισμος 67 *Η μέση τιμή μιας απόλυτα συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα f_X ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

αρκεί να υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx$.

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε τη μέση τιμή μιας θετικής τ.μ. όχι κατά ανάγκη διακριτή ή απόλυτα συνεχής.

Ορισμος 68 *Έστω X θετική τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τ.μ. με } 0 \le Y \le X\}.$$

Τέλος, η μέση τιμή μιας οποιαδήποτε τ.μ. ορίζεται ως εξής.

Ορισμος 69 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της είναι*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

όπου $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = -\min(X, 0)$. *Συμβολίζεται και με* $\int X dP$.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα με το οποίο μπορεί κανείς να προσεγγίσει μια θετική τ.μ. με ακολουθία απλών και θετικών τ.μ. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της σύγκλισης σβ.

Ορισμος 70 *Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ.* X_n *συγκλίνει σβ σε μια τ.μ.* X *αν*

$$N = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \text{ έχει } P(N) = 0.$$

Προταση 71 *Για κάθε θετική τ.μ.* X *υπάρχει μια ακολουθία* (X_n) *θετικών και απλών τ.μ. η οποία συγκλίνει από κάτω στην* X.

Με τον τρόπο αυτό, όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας ιδιότητας για μια θετική τ.μ. θα ξεκινάμε με το να την αποδεικνύουμε για θετικές και απλές τ.μ, έπειτα θα προσεγγίζουμε την τ.μ. με ακολουθία θετικών και απλών και τότε χρησιμοποιώντας οριακά θεωρήματα θα αποδεικνύουμε την ισχύ της ιδιότητας για τη θετική τ.μ.

Πρόταση 72 *Αν X είναι μια θετική τ.μ. και αν (X_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών απλών τ.μ. που συγκλίνει στην X, τότε $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mathbb{E}(X)$.*

Στα επόμενα θα δώσουμε σημαντικές ιδιότητες και αποτελέσματα για τη μέση τιμή.

Ορισμός 73 *Θα συμβολίζουμε με $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ την οικογένεια των τ.μ. τ.ω. $\mathbb{E}(X^+), \mathbb{E}(X^-) < \infty$.*

Θεώρημα 74 *1) Αν $X, Y \in L_1$ τότε $\mathbb{E}(X + cY) = \mathbb{E}(X) + c\mathbb{E}(Y)$. Αν $X \geq 0$ τότε και $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Αν $0 \leq X \leq Y$ και $Y \in L_1$ τότε και $X \in L_1$ και $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*

2) $X \in L_1$ ανν $|X| \in L_1$ και ισχύει $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

3) Αν $X = Y$ σχεδόν βέβαια (σβ.) τότε και $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ ($X = Y$ σβ. αν $P(X = Y) = 1$).

4) (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Αν η αύξουσα ακολουθία των θετικών τ.μ. (X_n) συγκλίνει σβ. στην X τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

5) (Λήμμα Fatou) Αν οι τ.μ. X_n είναι τ.ω. $X_n \geq Y$ σβ. ($Y \in L_1$) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

6) (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Αν η οικογένεια τ.μ. X_n συγκλίνει σβ. στην X και αν $|X_n| \leq Y$ σβ. με $Y \in L_1$ τότε $X_n, X \in L_1$ και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 75 *Έστω X_n μια ακολουθία τ.μ.*

1) Αν X_n είναι θετικές, τότε

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

2) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σβ. και ισχύει η ισότητα του 1).

Αν $X^p \in L_1$ θα λέμε ότι $X \in L_p$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 76 *1) Αν $X, Y \in L_2$ έχουμε ότι $XY \in L_1$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,*

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

2) Έχουμε ότι $L_2 \subseteq L_1$ και αν $X \in L_2$ τότε $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

3) Αν $X, Y \in L_2$ τότε και $X + cY \in L_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 77 (Ανισότητα Chebyshev) *Ισχύει ότι*

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι $a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}} \leq X^2$ οπότε

$$\mathbb{E}(a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(X^2)$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 78 *Έστω μια απόλυτα συνεχής τ.μ. X με πυκνότητα f. Αν $\mathbb{E}(h(X)) < \infty$ ή αν h θετική, τότε*

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x) f(x) dx$$

1.6 Fubini

Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ δύο χώροι πιθανότητας. Θέτουμε $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 79 *Έστω $\mathcal{F}$ η μικρότερη σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του Ω που περιέχει τα σύνολα της μορφής $A_1 \times A_2$ για κάθε $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$. Ονομάζουμε την $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 80 *Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ δύο χώροι πιθανότητας. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ και $\mathcal{F}$ την σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ τ.ω. $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$ με $A \in \Omega_1, B \in \Omega_2$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 81 (Fubini) *Έστω $f \in L^1(\Omega)$. Τότε ισχύει το εξής,*

$$\int_{\Omega} f dP = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f dP_2 \right) dP_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f dP_1 \right) dP_2.$$

1.7 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Θα ορίσουμε πρώτα την απλούστερη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου ενός ενδεχομένου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 82 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και B ένα ενδεχόμενο τ.ω. $P(B) \neq 0$. Η δεσμευμένη μέση τιμή του X δεδομένου του B ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)}{P(B)}.$$

Τώρα, ορίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου μιας διακριτής τ.μ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 83 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και έστω Y μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές $y_1, y_2, \ldots$. Η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|Y)$ του X δεδομένου Y ορίζεται να είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω. για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ να έχουμε,*

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|\{Y = y_i\}), \ \forall \omega \in \{Y = y_i\}.$$

Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση, η δεσμευμένη μέση τιμή, είναι μια τ.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 84 *Έστω Y μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και X μια τ.μ. Δείξτε ότι*

$$\sigma(\mathbb{E}(X|Y)) \subseteq \sigma(Y).$$

Δείξτε επίσης ότι $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$, *όπου* Y *διακριτή τυχαία μεταβλητή και* X *μια τυχαία μεταβλητή.*

Ασκηση 85 *Έστω* Y *μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Για κάθε* $B \in \sigma(Y)$ *δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B X).$$

Ορισμος 86 *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μη αρνητική απεικόνιση* $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ *λέγεται μέτρο αν*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

όταν $A_1, A_2, \ldots$ *είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων του* $\mathcal{F}$.

Η διαφορά, επομένως, με το μέτρο πιθανότητας είναι ότι μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες της μονάδος. Επίσης θα λέγεται πεπερασμένο μέτρο αν δεν παίρνει την τιμή ∞.

Ορισμος 87 *Έστω* P, Q *δύο πεπερασμένα μέτρα. Λέμε ότι το* Q *είναι απόλυτα συνεχές ως προς το* P *αν* $P(A) =$

0 *για* $A \in \mathcal{F}$ *να συνεπάγεται ότι και* $Q(A) = 0$. *Το συμβολίζουμε με* $Q << P$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 88 (Radon-Nikodym) *Έστω* P *μέτρο πιθανότητας ορισμένο στο μετρήσιμο χώρο* $(\Omega, \mathcal{F})$ *και έστω* Q *ένα πεπερασμένο μέτρο στον* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Αν* $Q << P$ *τότε υπάρχει μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή* X *τ.ω.* $Q(A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$. *Επιπλέον, η* X *είναι μοναδική σχεδόν βέβαια.*

Παρατήρηση. Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας την f_X. Έστω Q μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο με το P. Η τ.μ. X δεν θα έχει την ίδια συνάρτηση πυκνότητας κάτω από το μέτρο Q και επομένως δεν μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}^Q(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 89 *Έστω* X *μια τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *και έστω ότι υπάρχει το* $\mathbb{E}(X)$.

Έστω μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ υποσύνολο της $\mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μοναδική τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ δηλαδή είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, με την ιδιότητα

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε $C \in \mathcal{G}$, η οποία ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου της $\mathcal{G}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω χρειάζεται το θεώρημα των Radon-Nikodym.

Η βασική ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί η δεσμευμένη μέση τιμή είναι

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε $C \in \mathcal{G}$. Ανάμεσα στις υποψήφιες τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα είναι η ίδια η X. Όμως, πρέπει να είναι και $\mathcal{G}$-μετρήσιμη το οποίο δεν ισχύει πάντοτε. Αν όμως είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Ας θυμηθούμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση είναι τ.μ. σε οποιαδήποτε σ-άλγεβρα, οπότε αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{E}(c|\mathcal{G}) = c$ αφού το παραπάνω θεώρημα μας πληροφορεί ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 90 *Αν η σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ παράγεται από μια τ.μ. Y, δηλαδή $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, τότε λέμε ότι η $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου της Y και συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X|Y)$. Επομένως η $\mathbb{E}(X|Y)$ είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 91 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G}$ μια σ-άλγεβρα υποσύνολο της $\mathcal{F}$ και $B \in \mathcal{F}$. Υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $P(B|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη η οποία ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του $\mathcal{G}$, τ.ω.*

$$P(C \cap B) = \mathbb{E}(P(B|\mathcal{G})\mathbb{I}_C) \text{ για κάθε } C \in \mathcal{G}.$$

Επίσης ισχύει ότι $P(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\mathcal{G})$.

Στα επόμενα δίδονται ιδιότητες για τη δεσμευμένη μέση τιμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 92 *Αν $Y_1 \leq Y_2$ τότε και $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$. Επίσης ισχύει ότι $|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|Y||\mathcal{G})$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 93 *Αν* $a, b \in \mathbb{R}$ *τότε* $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 94 *Αν* $Y_n \geq 0$ *και* $Y_n \uparrow Y$ *τότε* $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. *Αν* $Y_n \geq 0$ *τότε*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 95 *Αν* $|Y_n| \leq Z$ *με* $\mathbb{E}(Z) < \infty$ *και* $Y_n \to Y$ *σβ. τότε* $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. *Αν* $Y_n \geq Z$ *με* $\mathbb{E}(Z) > -\infty$, *τότε*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n|\mathcal{G}).$$

ΑΣΚΗΣΗ 96 *Δείξτε ότι για* X, Y *τυχαίες μεταβλητές έχουμε*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Έστω X, Y, Z *τυχαίες μεταβλητές με* $\sigma(Y) \subseteq \sigma(Z)$. *Δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$$

Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$$

Άσκηση 97 *Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές. Αν $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ και η Z είναι φραγμένη (ή αν $\mathbb{E}|ZX| < \infty$) τότε δείξτε ότι $\mathbb{E}(ZX|Y) = Z\mathbb{E}(X|Y)$.*

Ορισμός 98 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και έστω $f_{X,Y}(x, y)$ η από κοινού πυκνότητα. Ορίζουμε τη δεσμευμένη πυκνότητα του X δεδομένου του Y ως εξής,*

$$h(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Άσκηση 99 *Δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x|Y)dx.$$

Άσκηση 100 *Έστω X, Y από κοινού συνεχείς και ανεξάρτητες. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$ χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 101 (Ανισότητα Jensen) *Έστω* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *κυρτή και έστω* $X, \phi(X)$ *ολοκληρώσιμες τ.μ. Για κάθε σ-άλγεβρα* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *έχουμε,*

$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}).$$

1.8 Οριακά Θεωρήματα

ΠΡΟΤΑΣΗ 102 *Έστω* X *μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε,*

$$P(\{X \geq C\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{C},$$

για κάθε $C > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 103 *Έστω* X *μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση. Τότε,*

$$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq C\}) \leq V(X)/C^2,$$

για κάθε $C > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 104 *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* X_n *λέγεται ότι συγκλίνει κατά πιθανότητα στο* X *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$, *έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 105 *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* X_n *λέγεται ότι συγκλίνει με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια σε μια τυχαία μεταβλητή* X *αν*

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 106 *Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ.* X_n *συγκλίνει στον* L_p *στην τ.μ.* X *αν* $|X_n|, |X|$ *ανήκουν στον* L_p *και*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 107 *Δείξτε ότι* $X_n \to X$ *κατά πιθανότητα ανν*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 108 *Δείξτε ότι αν* $X_n \to X$ *στον* L_p *ή σχεδόν βέβαια τότε και* $X_n \to X$ *κατά πιθανότητα.*

ΑΣΚΗΣΗ 109 *Έστω* $X_n \to X$ *κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία* n_k *τ.ω.*

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Άσκηση 110 *Έστω ότι* $X_n \to X$ *κατά πιθανότητα και έστω* $|X_n| \le Y$ *με* $Y \in L_p$. *Τότε και η* $|X|$ *είναι στον* L_p *και* $X_n \to X$ *στον* L_p.

Άσκηση 111 *Έστω* f *συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν* $X_n \to X$ *σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα) τότε και* $f(X_n) \to f(X)$ *σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα).*

Ορισμός 112 *Έστω* m_n *και* m *μέτρα πιθανότητας στον* $\mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* m_n *συγκλίνει ασθενώς στο* m *αν* $\int f(x)dm_n \to \int f(x)dm$ *για κάθε πραγματική, συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στον* $\mathbb{R}$.

Ορισμός 113 *Έστω* X_n *μια τ.μ. στον* $\mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* X_n *συγκλίνει κατά κατανομή στην* X *αν η ακολουθία κατανομών* P_{X_n} *συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή* P_X.

Άσκηση 114 *Έστω* X_n, X *τ.μ. Τότε η* X_n *συγκλίνει κατά κατανομή στην* X *ανν*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)),$$

για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$.

Σημειώστε ότι η σύγκλιση κατά κατανομή δεν απαιτεί τις τ.μ. μεταβλητές να βρίσκονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας.

ΑΣΚΗΣΗ 115 *Έστω X_n, X ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αν η $X_n \to X$ κατά πιθανότητα τότε και $X_n \to X$ κατά κατανομή.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 116 *Έστω X_n, X τ.μ. Αν $X_n \to X$ κατά κατανομή τότε και $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ για κάθε x στο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που αποτελείται από τα σημεία συνέχειας της F. Αντίστροφα, αν $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ για κάθε x σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $X_n \to X$ κατά κατανομή.*

ΑΣΚΗΣΗ 117 *Έστω μια ακολουθία απόλυτα συνεχών τ.μ. X_n, X με πυκνότητες f_n, f. Αν η ακολουθία πυκνοτήτων f_n συγκλίνει σημειακά στην f, τότε και $X_n \to X$ κατά κατανομή.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 118 (Helly's selection theorem) *Έστω m_n μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ και* *έστω*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n m_n([-a,a]^c) = 0. \qquad (1)$$

Τότε υπάρχει υπακολουθία n_k τ.ω. η m_{n_k} να συγκλίνει ασθενώς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 119 *Έστω X_n μια ακολουθία τ.μ. Τότε $X_n \to X$ κατά κατανομή ανν*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$$

για όλες τις φραγμένες, Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις g.

ΑΣΚΗΣΗ 120 *Έστω X_n, Y_n δύο ακολουθίες τ.μ. με $X_n \to X$ κατά κατανομή και $|X_n - Y_n| \to 0$ κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι $Y_n \to X$ κατά κατανομή.*

1.9 Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 121 *Έστω X μια τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ και με κατανομή P_X. Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Borel.*

Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)dP_X.$$

Ορισμος 122 *Έστω m ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός Fourier του m συμβολίζεται με $\hat{m}$ και είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία δίνεται ως εξής,*

$$\hat{m}(u) = \int e^{iux}dm.$$

Λημμα 123 *Έστω m ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε η $\hat{m}$ είναι φραγμένη, συνεχής συνάρτηση με $\hat{m}(0) = 1$.*

Ορισμος 124 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Τότε η $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως εξής,*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση του X.

Σημειώστε ότι $\mathbb{E}(e^{itX}) = \int e^{itx} dP_X$. ’ρα η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής της X.

ΑΣΚΗΣΗ 125 *Δείξτε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή X, έχουμε*

$$\begin{aligned} &a) \;\; \phi_X(0) = 1, \\ &b) \;\; |\phi_X(t)| \leq 1 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}, \\ &c) \;\; \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 126 *Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές τ.ω. $Y = aX + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_{aX}(t)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 127 *Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty$$

τότε η X έχει μια απόλυτα συνεχής κατανομή με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 128 *Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται από τη χαρακτηριστική της συνάρτηση. Η συνάρτηση κατανομής F_X δίνεται ως εξής,*

$$F_X(y) - F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \phi_X(t)dt,$$

για κάθε x, y όπου η F_X είναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΗ 129 *Αποδείξτε το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση που η X είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 130 *Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f_X, τότε $\phi_X(t) \neq 1$ για κάθε $t \neq 0$. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(u)$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη και*

$$\mathbb{E}(X^n e^{iuX}) = \frac{1}{i^n}\phi_X^{(n)}(u).$$

ΑΣΚΗΣΗ 131 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Να υπολογίσετε τη χαρακτηριστική της συνάρτηση.*

ΑΣΚΗΣΗ 132 *Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε*

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 133 *Αν δύο μέτρα πιθανότητας έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier τότε είναι ίσα.*

1.10 Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 134 *Έστω $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή) με πεπερασμένη μέση τιμή και έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$. Θέτουμε $a = \mathbb{E}(X_i)$ το οποίο είναι το ίδιο για κάθε i. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{|\frac{S_n}{n} - a| < \varepsilon\}\right) = 1,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών του Kolmogorov.

ΘΕΩΡΗΜΑ 135 *Έστω* $X_1, ..., X_n$ *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και έστω* $S_n = X_1 + ... + X_n$. *Τότε η μέση τιμή* $\mathbb{E}(X_i) = a$ *υπάρχει ανν,*

$$P(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a\}) = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 136 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) *Έστω* X_n *μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με*

$$\mathbb{E}(X_k) = a$$

και

$$Var(X_k) = s^2$$

με $0 < s^2 < \infty$. *Έστω*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

και έστω

$$Y_n = \frac{S_n - na}{s\sqrt{n}}$$

Τότε η Y_n *συγκλίνει κατά κατανομή στην* Y, *η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή.*

2 Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις στοχαστικές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο. Έστω λοιπόν ένας μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Θα λέμε ότι η οικογένεια τ.μ. $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Ένα ερώτημα είναι με ποια έννοια θα λέμε ότι ταυτίζονται οι δυο στοχαστικές διαδικασίες. Όπως παρατηρεί κανείς μια στοχαστική διαδικασία είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των t, ω. 'ρα αν $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $(t, \omega) \in [(0, \infty), \Omega]$ μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσες. Όμως, μπορούμε να δώσουμε και ασθενέστερους ορισμούς ισότητας χρησιμοποιώντας το μέτρο πιθανότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 137 *Δυο στοχαστικές διαδικασίες X_t, Y_t θα λέγονται εκδοχή η μια της άλλης όταν για κάθε t έχουμε $P(\{X_t = Y_t\}) = 1$. Θα λέμε ότι είναι μη διακρινόμενες αν $P(\{X_t = Y_t, 0 \leq t < \infty\}) = 1$. Τέλος, θα λέμε ότι δυο στοχαστικές διαδικασίες είναι ισοδύνα-*

μες αν για οποιαδήποτε $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι* $P_{X_{t_i}} = P_{Y_{t_i}}$.

Η πρώτη είναι η ισχυρότερη ενώ η τρίτη η ασθενέστερη.

Με το παρακάτω θεώρημα κανείς μπορεί να δείξει ότι υπάρχει μια συνεχής εκδοχή για μια στοχαστική διαδικασία, κάτω από προυποθέσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 138 *Έστω* X_t *μια στοχαστική διαδικασία. Αν υπάρχει* $a > 0$ *και* $\varepsilon > 0$ *τ.ω. για κάθε* $0 \leq u \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}|X_t - X_u|^a \leq C(t-u)^{1+\varepsilon},$$

για κάποια σταθερά C, *τότε υπάρχει μια εκδοχή της* X *με συνεχείς τροχιές και οι οποίες είναι Holder συνεχής τάξης* $h < \varepsilon/a$.

Όπως και στη διακριτή περίπτωση, μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο παράγει μια σ-άλγεβρα, την $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(\{X_s^{-1}(A) : 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}\})$ και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα κάτω από την οποία η X_s είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε $s \in [0, t]$.

Επίσης, φιλτράρισμα ονομάζουμε μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_t$ τ.ω. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ και θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία X_t είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$ όταν η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Θα ορίσουμε παρακάτω τη λεγόμενη κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener. Συμβολίζουμε με

$$\Gamma(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ η κατανομή $N(m, \sigma^2)$ με πυκνότητα $g(x) = \Gamma(\sigma^2, x - m)$ ονομάζεται κανονική κατανομή με παραμέτρους m, σ. Δηλαδή,

$$N(m,\sigma^2)(A) = \int_A \Gamma(\sigma^2, x - m) dx, A \in \mathcal{B}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 139 (Κίνηση Brown) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Υπάρχει στοχαστική διαδικασία W_t (η οποία ονομάζεται κίνηση Brown με τις εξής ιδιότητες,*

(i) *$W_0 = 0$ σβ.*

(ii) *η W_t είναι $\mathcal{F}_t$ προσαρμοσμένη και συνεχής,*

(iii) *για $0 \leq s < t$ η τ.μ. $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t-s)$ και είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$.*

Η ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας που ικανοποιεί τα παραπάνω αποδεικνύεται (και μπορεί να βρει τη απόδειξη κανείς στην βιβλιογραφία). Παρατηρούμε ότι η W_t ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t)$ οπότε και $\mathbb{E}(W_t) = 0$ και $\mathbb{E}(W_t^2) = t$.

Ο παρακάτω ορισμός είναι η ιδιότητα Markov η οποία στην ουσία λέει ότι αν μια στοχαστική διαδικασία την ικανοποιεί τότε στο χρόνο t η μέση τιμή της σε επόμενη χρονική στιγμή δεν εξαρτάται από προηγούμενες τιμές αλλά μόνο από την τωρινή. Η ιδιότητα αυτή αποτυπώνεται μαθηματικά στον επόμενο ορισμό.

`ΟΡΙΣΜΟΣ` **140 (Ιδιότητα Markov)** *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ *ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία* X_t *λέμε ότι έχει την ιδιότητα Markov αν για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση* ϕ *έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}(\phi(X_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(X_T)|X_t), \quad T \geq t.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα είναι ισοδύναμη με το να ισχύει ότι για κάθε σύνολο Borel A έχουμε,

$$\mathbb{E}(X_T \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_T \in A|X_t), \quad T \geq t.$$

`ΟΡΙΣΜΟΣ` **141** *Έστω* W_t *μια κίνηση Brown σε ένα χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ *με φίλτρο. Για δεδομένο* $x \in \mathbb{R}$ *και* $t \geq 0$ *η στοχαστική διαδικασία* $W_s^{t,x} = x + W_s - W_t$ *με* $s \geq t$ *ονομάζεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το* x *τη χρονική στιγμή* t*.*

Οπότε έχουμε ότι $W_t^{t,x} = x$ και επίσης $W_s^{t,x}$ είναι προσαρμοσμένη και συνεχής. Τέλος, για $t \le s \le s+h$ η τ.μ. $W_{s+h}^{t,x} - W_s^{t,x}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,h)$ και είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$. Οπότε η $W_s^{t,x}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(x, s-t)$ για $s \ge t$, δηλαδή η πυκνότητα της $W_s^{t,x}$ είναι η

$$g(y) = \Gamma^*(t,x,s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(s-t)}}.$$

Η συνάρτηση αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, ονομάζεται πυκνότητα μετάβασης της κίνησης Brown από το αρχικό σημείο (t,x) στο τελικό σημείο τη χρονική στιγμή $s \ge t$.

Έστω μια ϕ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + W_t)|\mathcal{F}_t) = u(t, W_t)$ με $u(t,x) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + x)) = \mathbb{E}(W_s^{t,x})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 142 *Μια κίνηση Brown W_t στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ έχει την ιδιότητα Markov ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$.*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(y-W_t)^2}{2(s-t)}} dy.$$

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_{xx}(t,x) - v_t(t,x) &= 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

με $\phi(x)$ συνεχή συνάρτηση και φραγμένη.

Το πρόβλημα αυτό έχει λύση, $v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^*(t,x,T,y)\phi(y)dy$ με $t < T$ και $x \in \mathbb{R}$. Η κίνηση Brown είναι λοιπόν στενά συνδεδεμένη με την εξίσωση θερμότητας (την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση). Η λύση $v(t,x)$ έχει την εξής γραφή, $v(t,x) = \mathbb{E}(\phi(W_s^{t,x}))$ με $x \in \mathbb{R}$ και $t \in [0,s]$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov έχουμε ότι $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = v(t,W_t)$ για $s \geq t$. Οι λύσεις, ορισμένων, μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι προτιμότερο να προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας τέτοιου είδους αναπαραστάσεις καθώς και εργαλεία στοχαστικής ανάλυσης. Στις εφαρμογές, πάντως, συχνά και οι δυο τρόποι (θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων και στοχαστική ανάλυση) βοηθούν, με διαφορετικό τρόπο, να περιγράψουμε και να χαρακτηρίσουμε ένα φαινόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 143 *Η διαδικασία Brown (ή διαδικασία Wiener) σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ ικανοποιεί τα παρακάτω,*

(i) η W_t έχει ανεξάρτητες και στάσιμες μεταβολές, δηλαδή, για $0 \leq t \leq s$ η τ.μ. $W_s - W_t$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, s-t)$ και οι τ.μ.

$$W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_N} - W_{t_{N-1}},$$

είναι ανεξάρτητες για κάθε σύνολο σημείων $t_1, ..., t_n$ με $t_1 < t_2 < ... < t_N$

(ii) για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία $0 < t_1 < t_2 < ... < t_N$ και για κάθε Borel σύνολα $A_1, A_2, ..., A_N \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$P(\{W(t_1) \in A_1, ..., W(t_N) \in A_N\}) =$$
$$\int_{A_1} ... \int_{A_N} \Gamma^*(0, 0, t_1, y_1)\Gamma^*(t_1, y_1, t_2, y_2)...\Gamma^*(t_{N-1}, y_{N-1}, t_N, y_N)$$
$$dy_1...dy_N.$$

Αντίστροφα, αν W_t είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τ.ω. $W_0 = 0$ σβ. και ικανοποιεί τις παραπάνω δυο ιδιότητες τότε είναι κίνηση Brown ως προς το φυσικό φιλτράρισμα $\mathcal{F}^W$.

ΑΣΚΗΣΗ 144 *Δείξτε ότι* $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s, t\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το προηγούμενο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η από κοινού πυκνότητα των $W(s), W(t)$ (αν υποθέσουμε ότι $t < s$) είναι $f_{W(s),W(t)}(x, y) = \Gamma^*(0, 0, t, x)\Gamma^*(t, x, s, y)$. ’ρα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 \Gamma^*(0, 0, t, y_1)\Gamma^*(t, y_1, s, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \cdots = t\end{aligned}$$

’ρα για οποιαδήποτε s, t έχουμε ότι $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s, t\}$.

Μια συντομότερη απόδειξη είναι η εξής, όταν $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)W(s)) &= \mathbb{E}\left(W(s)(W(t) - W(s) + W(s))\right) \\ &= \mathbb{E}(W(s)^2) + \mathbb{E}\left(W(s)(W(t) - W(s))\right) \\ &= s,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbb{E}(W(s)^2) = s$ και ότι $W(s), W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητες. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 145 *Ισχύει ότι* $\mathbb{E}(e^{i\lambda W(t)}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = \phi_{W(t)}(\lambda)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi_{W(t)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx
\end{aligned}$$

Όμως το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επομένως θα υπολογίσουμε το πρώτο. Παραγωγίζουμε ως προς λ κατά μέλη και έχουμε

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} -x\sin(\lambda x)e^{-\frac{x^2}{2t}}dx.$$

Έπειτα με ολοκλήρωση κατά μέρη (γράφοντας τον όρο $e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ως παράγωγο μιας συνάρτησης) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = -\lambda t\phi_{W(t)}(\lambda).$$

Λύνοντας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\phi_{W(t)}(0) = 1$ προκύπτει το αποτέλεσμα. $\square$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση της $W(t)$ και συμβολίζεται με $\phi_{W(t)}(\lambda)$. Αποδεικνύεται (αν $\mathbb{E}(|W(t)|^n) < \infty$ το οποίο θα δείξουμε αργότερα με μια τεχνική που δουλεύει και στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την πυκνότητα της τ.μ.) τότε ότι $\mathbb{E}(W(t)^n)i^n = \phi^{(n)}_{W(t)}(0)$. Δηλαδή για να υπολογίσει κανείς ροπές της $W(t)$ αρκεί να παραγωγίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση τόσες φορές όσο και η δύναμη της ροπής. Για παράδειγμα $\mathbb{E}(W(t)^4) = 3t^2$.

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για οποιαδήποτε τ.μ. X. Αν $X = W(t) - W(s)$ με $s < t$, βρείτε τη χαρακτηριστική συνάρτηση και υπολογίστε τη μέση τιμή της τέταρτης δύναμης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 146 *Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ είναι martingale αν $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ και για κάθε $s < t$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$. Ανάλογα ορίζουμε τις submartingale, supermartingale.*

Έστω Y μια ολοκληρώσιμη τ.μ. Τότε $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$ είναι martingale. Πράγματι, εξ ορισμού η M_t είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_t$ και ολοκληρώσιμη (δείξτε το). Επίσης, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = M_s$. Στην πρώτη ισότητα αντικαταστήσαμε την M_t ενώ στη δεύτερη ισότητα κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής, αφού $s < t$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 147 (Ανισότητα Doob) *Έστω X_t μια δεξιά συνεχής martingale και $p > 1$. Τότε για κάθε T,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) \leq q^p \mathbb{E}\left(|X_T|^p\right),$$

όπου $q = \frac{p}{p-1}$.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Doob στην martingale $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2) \leq 4\mathbb{E}(|Y|^2).$$

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι η διαδικασία Wiener καθώς και άλλες δυο που σχετίζονται με αυτή είναι martingales στο $\mathcal{F}_t$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 148 *Οι στοχαστικές διαδικασίες* $W(t)$, $W(t)^2 - t$ *και* $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$ *είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_t$ *που παράγει η διαδικασία Wiener.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς η W_t ανήκει στον L^1 διότι $\mathbb{E}|W_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}|W_t^2|}$ και αφού η W_t^2 ανήκει στον L^1 το ίδιο συμβαίνει και με την $|W_t|$.

Πράγματι, για κάθε $0 \leq s < t$ έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$, ότι η W_s είναι προσαρμοσμένη και ότι $\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(W_s) = 0$. Δηλαδή, η W_t είναι martingale στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$.

Θα δούμε τώρα την $W_t^2 - t$. Για $0 \leq s < t$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s\right) + 2\mathbb{E}\left((W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad + \mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s) \\ &= t - s + W_s^2.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$, δηλαδή οι $\sigma(W_t - W_s), \mathcal{F}_s$ είναι ανεξάρτητες και αφού $\sigma((W_t - W_s)^2) \subseteq \sigma(W_t - W_s)$ τότε και $\sigma((W_t - W_s)^2), \mathcal{F}_s$ ανεξάρτητες. Επίσης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t - s$, ότι η W_s είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_s$ και ότι η W_t είναι martingale. Επομένως, $\mathbb{E}(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$ είναι martingale. Είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ ως συνάρτηση της W_t η οποία είναι προσαρμοσμένη. Για $0 \leq s < t$ έχουμε,

$$\mathbb{E}(e^{W_t}|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{W_t - W_s}e^{W_s}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}\mathbb{E}(e^{W_t - W_s}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}\mathbb{E}(e^{W_t - W_s}).$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$ και ότι η W_t είναι προσαρμοσμένη. Αφού η μεταβολή $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t - s$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της $e^{W_t - W_s}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{W_t-W_s}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}dx \\ &= e^{\frac{t-s}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(t-s))^2}{2(t-s)}}dx \\ &= e^{\frac{t-s}{2}}\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η εν λόγω στοχαστική διαδικασία είναι και ολοκληρώσιμη. Τελικά $\mathbb{E}(e^{W_t}e^{-\frac{t}{2}}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}e^{-\frac{s}{2}}$.

$\square$

Υπολογίστε και τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)})$$

χρησιμοποιώντας παρόμοιο συλλογισμό.

Ορισμος 149 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φιλτράρισμα $(\mathcal{F}_t)$ αν για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ είναι μετρήσιμη στον $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F}_t)$.*

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι μια δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία είναι προοδευτικά μετρήσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 150 *Έστω $T > 0$. Με $\mathcal{M}^2$ ορίζουμε το χώρο των δεξιά συνεχών $\mathcal{F}_t$ martingales X_t τ.ω. $X_0 = 0$ και*

$$\|X\|_T = \sqrt{\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2)} < \infty.$$

Με $\mathcal{M}_c^2$ συμβολίζουμε τον υποχώρο των συνεχών martingales του $\mathcal{M}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 151 *Ο χώρος $(M^2, \|\cdot\|_T)$ είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy του M^2 συγκλίνει και έχει όριο στον ίδιο χώρο. Επίσης, αν η ακολουθία ανήκει στον M_c^2 τότε και το όριο θα ανήκει εκεί.*

Οι χώροι αυτοί και το προηγούμενο θεώρημα θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα αργότερα στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Συμβολίζουμε με $N = \{F \in \mathcal{F} | P(F) = 0\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 152 *Θα λέμε ότι το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες ως προς το P, αν η $\mathcal{F}_0$ και άρα και η $\mathcal{F}_t$ για κάθε t, περιέχει το N. Επίσης, αν το φιλτράρισμα είναι δεξιά συνεχές, δηλαδή για κάθε $t > 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.*

Οι δυο υποθέσεις αυτές για το φιλτράρισμα είναι καθαρά για τεχνικούς λόγους. Αν $X_t = Y_t$ σβ. και X_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη τότε θα θέλαμε να έχουμε ως αποτέλεσμα ότι και η Y_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 153 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και X_t μια στοχαστική διαδικασία. Τότε θέτουμε,*

$$\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\varepsilon>0} \hat{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^X,$$

με $\hat{\mathcal{F}}_t^X = \sigma\left(\sigma(X_t) \cup N\right)$. Διαπιστώνουμε ότι η $\mathcal{F}_t^X$ ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες.

Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε και την σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown και τη συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_t^W$. Αποδεικνύεται ότι η W_t είναι κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t^W)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 154 *Μια τ.μ. $r : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ αν $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 155 *Η τ.μ. r είναι χρόνος στάσης ανν $\{r < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t > 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν r είναι χρόνος στάσης τότε

$$\{r < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r \leq t - \frac{1}{n}\}$$

με

$$\{r \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t$$

Αντίστροφα, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\{r \leq t\} = \bigcap_{0<\delta<\varepsilon} \{r < t + \delta\}$$

οπότε $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Χρησιμοποιώντας τις συνήθεις συνθήκες έχουμε,

$$\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

$\square$

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι αν r_1, r_2 χρόνοι στάσης τότε και $r_1 \wedge r_2, r_1 \vee r_2$ χρόνοι στάσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 156 *Έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία, δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη και έστω B ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $I(\omega) = \{t \geq 0 | X_t(\omega) \in B\}$ και $r(\omega) = \inf I(\omega)$ αν $I(\omega) \neq \emptyset$ και $+\infty$ αλλιώς. Τότε η r είναι χρόνος στάσης και ονομάζεται χρόνος πρώτης εισόδου της X στο B.*

Έστω r χρόνος στάσης ο οποίος είναι πεπερασμένος στο $\Omega \setminus N$ με $P(N) = 0$ και έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία. Θέτουμε, $X_r(\omega) = X_{r(\omega)}(\omega)$ και επίσης ορίζουμε την σ-άλγεβρα

$$\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{F} | F \cap \{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

για κάθε t.

ΠΡΟΤΑΣΗ 157 (Θεώρημα Επιλεκτικής Στάσης του Doob) *Αν M_t είναι μια δεξιά συνεχής martingale και r_1, r_2 χρόνοι στάσης τ.ω. $r_1 \leq r_2 \leq T$ σβ. με $T > 0$,* *τότε* $M_{r_1} = \mathbb{E}(M_{r_2}|\mathcal{F}_{r_1})$. *Συγκεκριμένα, για κάθε σβ. φραγμένο χρόνο στάσης* r *έχουμε* $\mathbb{E}(M_r) = \mathbb{E}(M_0)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 158 *Έστω* X_t *μια στοχαστική διαδικασία στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο* $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ *και* r *ένας φραγμένος χρόνος στάσης. Θεωρούμε τη 'σταματημένη' στοχαστική διαδικασία* X_t^r *η οποία ορίζεται ως εξής,*

$$X_t^r(\omega) = X_{t\wedge r(\omega)}(\omega), \quad t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Αν X_t *είναι προοδευτικά μετρήσιμη τότε και η* X_t^r *είναι προοδευτικά μετρήσιμη και η τ.μ.* X_r *είναι* $\mathcal{F}_r$*-μετρήσιμη. Τέλος, αν* X_t *είναι δεξιά συνεχής και martingale τότε* $X_{t\wedge r} = \mathbb{E}(X_r|\mathcal{F}_t)$ *οπότε και η* X_t^r *είναι δεξιά συνεχής και martingale.*

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της κίνησης Brown.

ΘΕΩΡΗΜΑ 159 *Μια στοχαστική διαδικασία* $W(t), t \geq 0$ *είναι διαδικασία Wiener ανν ισχύουν τα επόμενα,*

(i) $W(0) = 0$ *σβ*,

(ii) *οι τροχιές* $t \to W(t)$ *είναι συνεχείς σβ.*

(iii) *η* $W(t)$ *είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_t$,

(iv) *η* $W(t)^2 - t$ *είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_t$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 160 *Θα λέμε ότι η* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι Holder συνεχής τάξης* a *με* $a \in (0, 1)$ *αν υπάρχει μια σταθερά* $K > 0$ *τ.ω. για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *έχουμε* $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^a$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 161 *Για κάθε* $a < \frac{1}{2}$ *σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown είναι Holder συνεχείς, τάξης* a, *σε κάθε φραγμένο διάστημα του* t. *Επίσης, για κάθε* $a > \frac{1}{2}$ *σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown δεν είναι Holder συνεχείς πουθενά.*

Έστω $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ μια διαμέριση του $[0, T]$. Ορίζουμε την τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown να είναι

$$[W, W](t) = [W, W]([0, t]) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)|^2$$

όπου η σύγκλιση είναι στον L^2. Το όριο είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις τ.ω. $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αποδεικνύεται, ότι παρόλο που τα παραπάνω αθροίσματα είναι τ.μ. το όριο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ω).

ΘΕΩΡΗΜΑ 162 *Η τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown πάνω στο $[0, T]$ είναι ίση με T.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας σημειώσουμε ότι οι μεταβολές $W(t_i) - W(t_{i-1})$ είναι ανεξάρτητες και ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1})) &= 0, \\
\mathbb{E}\left(W(t_i) - W(t_{i-1})\right)^2 &= t_i - t_{i-1}, \\
\mathbb{E}\left(W(t_i) - W(t_{i-1})\right)^4 &= 3(t_i - t_{i-1})^2
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι, συμβολίζοντας με $\Delta_i^n W = W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n W)^2 - T\right)^2 \\
= &\ \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)\right)^2 \\
= &\ \mathbb{E}\sum_{i=1}^n \big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)^2 \\
&+\mathbb{E}\sum_{i\neq j} \big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)\big((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\big) \\
= &\ \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)^2 \\
= &\ 2\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Θα εξηγήσουμε τώρα γιατί

$$\mathbb{E}\sum_{i\neq j} \big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)\big((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\big) = 0$$

Λόγω ανεξαρτησίας των $\Delta_i^n W$, $\Delta_j^n W$ για $i \neq j$ έχουμε, ότι και $(\Delta_i^n W)^2$, $(\Delta_j^n W)^2$ ανεξάρτητες για $i \neq j$ αφού $\sigma((\Delta_i^n W)^2) \subseteq \sigma(\Delta_i^n W)$ και το ίδιο για την $\Delta_j^n W$. Τέλος, ανεξάρτητες θα είναι και οι

$$(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}), \quad (\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})$$

αφού η οικογένεια συνόλων $\mathcal{I} = \{(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}) \leq x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγει την ίδια σ-άλγεβρα με την $\mathcal{J} = \{(\Delta_i^n W)^2 \leq x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 'ρα,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{i \neq j} \big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)\big((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\big) \\ = & \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\big((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\big)\, \mathbb{E}\big((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\big) \\ = & \ 0. \end{aligned}$$

□

Ορισμος 163 *Η κύμανση μιας συνάρτησης $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως το όριο,*

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

όπου $(t_0, t_1, ..., t_n)$ *είναι μια διαμέριση του* $[0, T]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 164 *Η κύμανση των τροχιών της* $W(t)$ *είναι άπειρη σβ.*

Αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο στη θεωρία ολοκλήρωσης ως προς την κίνηση Brown. Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 165 *Έστω* $\delta_n = \max_i(t_i^n - t_{i-1}^n)$. *Αν το όριο*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))$$

υπάρχει για κάθε συνεχή συνάρτηση f *τότε αναγκαστικά η* g *είναι φραγμένης κύμανσης στο* $[0, t]$.

'ρα, δεν μπορούμε να ορίσουμε ως Riemann-Stieltjes το ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s dW_s$ όπου X_s μια συνεχής στοχαστική διαδικασία, διότι η W_t δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Αυτό επίσης σημαίνει ότι δεν υπάρχει διάστημα $[0, t]$ τ.ω. η W_t να είναι μονότονη διότι αυτό θα σήμαινε ότι είναι και φραγμένης κύμανσης εκεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 166 *Για κάθε $t > 0$ σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown είναι μη διαφορίσιμες στο t.*

Μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά της κίνησης Brown.

ΘΕΩΡΗΜΑ 167 *Αν W_t είναι μια κίνηση Brown τότε,*

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} &= 1, \ \sigma\beta., \\
\limsup_{t\uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(t)}} &= 1, \ \sigma\beta., \\
\liminf_{t\downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} &= -1, \ \sigma\beta., \\
\liminf_{t\uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(t)}} &= -1, \ \sigma\beta.
\end{aligned}$$

2.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε και θα κατασκευάσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Ένας από τους στόχους μας θα είναι να ορίσουμε τελικά τις λεγόμενες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες μοντελοποιούν καλύτερα από τις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις διάφορα φαινόμενα (π.χ. χρηματοοικονομικά φαινόμενα) στα οποία εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο παράγοντες που δεν μπορούν εύκολα να συμπεριληφθούν στο μοντέλο.

Στόχος μας είναι να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t f(s)dW_s$. Αυτό μοιάζει με Riemann-Stieltjes αλλά όπως είπαμε παραπάνω δεν γίνεται να το ορίσουμε έτσι διότι η W_t δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Ας δούμε αρχικά έναν απλούστερο ορισμό όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα $f(t)$ δεν είναι συνάρτηση του $\omega \in \Omega$ αλλά συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(0) = f(1) = 0$. Ορίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα ως εξής, $\int_0^1 f(s)dW_s = -\int_0^1 f'(s)W_s ds$. Αυτό το ολοκλήρωμα είναι μια τ.μ. και ικανοποιεί τις ιδιότητες, $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s) = 0$ και $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s)^2 = \int_0^1 f^2(s)ds$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(\int_0^1 f'(s)W_s ds) = \int_0^1 f'(s)\mathbb{E}(W_s)ds = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s$ μπορούμε να δείξουμε και την άλλη ιδιότητα. Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό και σε μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων αλλά ανεξάρτητων του ω.

Αν θελήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^T W_s dW_s$ ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes θα είχαμε πρόβλημα όπως είπαμε και προηγούμενα. Ας δούμε ακριβώς τι γίνεται.

Έστω $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ μια διαμέριση του $[0, T]$. Μπορεί να δείξει κανείς ότι τα παρακάτω αθροίσματα οδηγούν σε διαφορετικά όρια,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)).$$

Πράγματι, έχουμε το εξής,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W^2_{t_{i+1}^n} - W^2_{t_i^n}) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \\ &= \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2.\end{aligned}$$

Στο όριο λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T$$

Παρόμοια, για το άλλο όριο έχουμε ως αποτέλεσμα

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2}W_T^2 + \frac{1}{2}T.$$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω μια κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο αυτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 168 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t ανήκει στην κλάση $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ αν*

(i) *η* X_t *είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο* $(\mathcal{F}_t)$,

(ii) *η* $X_t \in L^p([0,T] \times \Omega)$ *δηλαδή*

$$\int_0^T \mathbb{E}(X_t)^p dt < \infty.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 169 *Μια στοχαστική διαδικασία* $X_t \in \mathbb{L}^2$ *ονομάζεται απλή αν μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N} e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1},t_k]}(t), \quad t \in [0,T],$$

όπου $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ *και* e_k *τ.μ. στον* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για τις απλές στοχαστικές διαδικασίες και έπειτα θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών οριακά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 170 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ μια απλή στοχαστική διαδικασία. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Ito ως εξής,*

$$\int X_t dW_t = \sum_{k=1}^{N} e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),$$

ενώ για $0 \leq a \leq b \leq T$ ορίζουμε $\int_a^b X_t dW_t = \int X_t \mathbb{I}_{(a,b]} dW_t$ και $\int_a^a X_t dW_t = 0$.

Σημειώστε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη στοχαστική διαδικασία $X_t = \mathbb{I}_{(0,t]}$ και έχουμε ότι $\int \mathbb{I}_{(0,t]} dW_t = W_t - W_0 = W_t$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών από τις απλές στοχαστικές διαδικασίες.

ΛΗΜΜΑ 171 *Για κάθε $X_t \in \mathbb{L}^2$ υπάρχει ακολουθία $X_t^n \in \mathbb{L}^2$ απλών στοχαστικών διαδικασιών τ.ω.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (X_t - X_t^n)^2 dt\right] = 0.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 172 *Το στοχαστικό ολοκλήρωμα της $X_t \in \mathbb{L}^2$ ορίζεται ως εξής,*

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^n dW_s,$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του $\mathcal{M}_c^2$ και X_t^n είναι μια ακολουθία απλών στοχαστικών διαδικασιών που προσεγγίζουν την $X_t \in \mathbb{L}^2$.

Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν για το στοχαστικό ολοκλήρωμα για απλές στοχαστικές διαδικασίες. Για στοχαστικές διαδικασίες που δεν είναι κατά ανάγκη απλές μπορεί να δείξει κανείς ότι ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι προσεγγίζονται από απλές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 173 *Αν $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$ απλές στοχαστικές διαδικασίες και $0 \le a < b < c$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε,*

(i) *(Γραμμικότητα)* $\int_0^t (c_1 X_s + c_2 Y_s) dW_s = c_1 \int_0^t X_s dW_s + c_2 \int_0^t Y_s dW_s$,

(ii) *(Προσθετικότητα)* $\int_a^c X_t dW_t = \int_a^b X_t dW_t + \int_b^c X_t dW_t$,

(iii) *(Ισομετρία)* $\mathbb{E}[\int_a^b X_s dW_s \int_a^b Y_s dW_s | \mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\int_a^b X_s Y_s ds | \mathcal{F}_a]$,

(iv) *(Μηδενική Μέση Τιμή)* $\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t | \mathcal{F}_a] = 0$ *και*

$$\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t \int_b^c X_t dW_t | \mathcal{F}_a] = 0,$$

(v) *(Ιδιότητα martingale)* $\mathbb{E}(\int_0^t X_r dW_r | \mathcal{F}_s) = \int_0^s X_r dW_r$. *Επιπλέον, η* $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$ *δηλαδή είναι συνεχής martingale.*

Αποδειξη. Θα συζητήσουμε την τέταρτη ιδιότητα μόνο, δηλαδή της μηδενικής μέσης τιμής του στοχαστικού ολοκληρώματος, διότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η απόδειξή της. Οι αποδείξεις των υπολοίπων ιδιοτήτων απαιτούν, εν ολίγοις, τους ίδιους ισχυρισμούς.

Έχουμε υποθέσει ότι η $X_t \in \mathbb{L}^2$ δηλαδή είναι και προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο $(\mathcal{F}_t)$ ενώ τα e_k είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμες. Αν $t \in (t_{k-1}, t_k]$ τότε $X_t = e_k$ και επομένως το e_k είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμο για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k]$ ή αλλιώς το e_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$-μετρήσιμο για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή οι αντίστροφες εικόνες $\{e_k \in B\}$

με $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα και στην τομή $\cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το φίλτρο ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες έχουμε ότι η e_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-μετρήσιμη.

Θα δείξουμε τώρα την ιδιότητα της μηδενικής μέσης τιμής. Παρατηρούμε ότι

$$X_t \mathbb{I}_{(a,b]} = \sum_{k=1}^{N} e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1},t_k]\cap(a,b]} = \sum_{k=1}^{N} e_k \mathbb{I}_{(\hat{t}_{k-1},\hat{t}_k]},$$

με $\hat{t}_{k-1} = \max(t_{k-1}, a)$ και $\hat{t}_k = \max(\min(t_k, b), \hat{t}_{k-1})$.

Οπότε,

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t dW_t | \mathcal{F}_a\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} e_k (W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) | \mathcal{F}_a\right).$$

Αφού η $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$ τότε θα είναι και από την $\mathcal{F}_a$. Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Αν X, Y τ.μ. και η Y είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(\sigma(X), G)$ τότε $\mathbb{E}(XY|G) = \mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)$.

Αποδειξη. Για κάθε $A \in G$ έχουμε,

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)\big) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A XY) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(XY|G)\right).$$

Παρατηρήστε ότι $\sigma(\mathbb{I}_A X) \subseteq \sigma(\sigma(X), G)$ και άρα η Y είναι ανεξάρτητη και της $\sigma(\mathbb{I}_A X)$ το οποίο το χρησιμοποιήσαμε στη δεύτερη ισότητα. Λόγω της μοναδικότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{N} e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}})|\mathcal{F}_a\Big) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}})|\mathcal{F}_a) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(e_k|\mathcal{F}_a)\mathbb{E}(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

αφού $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}, \mathcal{F}_a) = \mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}},$$

οπότε η $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη και της $\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a)$.

□

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και χωρίς δέσμευση, δηλαδή για την απλή μέση τιμή και αυτό προκύπτει παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με όρια τα οποία είναι χρόνοι στάσης.

Προταση 174 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ και $Y_t = \int_0^t X_s dW_s$, $t \in [0,T]$. Αν r είναι χρόνος στάσης ως προς το φίλτρο $(\mathcal{F}_t)$ τ.ω. $0 \leq r \leq T$ σβ. τότε και $X_t \mathbb{I}_{\{r \leq t\}} \in \mathbb{L}^2$ και*

$$Y_r = \int_0^r X_s dW_s = \int_0^T X_s \mathbb{I}_{\{s \leq r\}} dW_s.$$

Παρόμοιες ιδιότητες ικανοποιεί και το στοχαστικό ολοκλήρωμα με χρόνο στάσης ως όριο.

Προταση 175 *Έστω $t_0 \in [0,T]$ και $r \in [t_0,T]$ χρόνος στάσης. Αν $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$ τότε*

(i) *(Μηδενική Μέση Τιμή)*

$$\mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_t dW_t | \mathcal{F}_{t_0}] = 0 \text{ και } \mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_t dW_t \int_r^T X_t dW_t | \mathcal{F}_{t_0}] = 0,$$

(ii) (Ισομετρία)

$$\mathbb{E}[\int_{t_0}^{r} X_s dW_s \int_{t_0}^{r} Y_s dW_s | \mathcal{F}_{t_0}] = \mathbb{E}[\int_{t_0}^{r} X_s Y_s ds | \mathcal{F}_{t_0}].$$

Θα ορίσουμε τώρα την τετραγωνική κύμανση του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Προταση 176 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ και $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$. Για κάθε $t > 0$ το όριο*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}|^2 = \int_0^t X_s^2 ds,$$

υπό την έννοια του L^2. Ορίζουμε ως τετραγωνική κύμανση της Y_t την ποσότητα $[Y,Y](t) = \int_0^t X_s^2 ds$. Τέλος, η $Y_t^2 - [Y,Y](t)$ είναι martingale.

Αποδειξη. Θα δείξουμε μόνο ότι η $Y_t^2 - [Y,Y](t)$ είναι martingale. Γράφουμε,

$$Y_t^2 - [Y,Y](t) = (Y_t - Y_s)^2 + Y_s^2 + 2Y_s(Y_t - Y_s) - [Y,Y](t),$$

για $0 \le s < t$. Παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή (δεδομένου της $\mathcal{F}_s$) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας κατάλληλες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής αλλά και του στοχαστικού ολοκληρώματος, συγκεκριμένα, την ισομετρία του Ito και την ιδιότητα της μηδενικής μέσης τιμής (δηλαδή το ότι $\mathbb{E}(Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s) = 0$ αφού η Y_t είναι στοχαστικό ολοκλήρωμα), έχουμε ότι η $Y_t^2 - [Y, Y](t)$ είναι martingale. Σημειώστε ότι χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $\int_0^t X_s^2 ds$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμο το οποίο προκύπτει από τη θεωρία μέτρου και του ολοκληρώματος Lebesgue και συγκεκριμένα από το θεώρημα Fubini και τη θεωρία πίσω από αυτό, καθότι η X_t είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των (t, ω). $\square$

2.2 Στοχαστικό Ανάπτυγμα Taylor

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς τη φόρμουλα του Ito.

ΟΡΙΣΜΟΣ 177 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται διαδικασία Ito αν έχει τη μορφή,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s,$$

όπου $b(t) \in \mathbb{L}^2, a(s) \in \mathbb{L}^1$ και X_0 είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη.

Συχνά χρησιμοποιούμε (μόνο συμβολικά) τη διαφορική μορφή μιας στοχαστικής διαδικασίας Ito, δηλαδή γράφουμε $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ και εννοούμε στην πραγματικότητα την ολοκληρωτική μορφή την οποία έχουμε ορίσει αυστηρά.

Εξαιρετικά χρήσιμο στις εφαρμογές αλλά και στην εύρεση λύσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (που θα ορίσουμε παρακάτω) είναι το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς η φόρμουλα του Ito. Θα δώσουμε την απλή μορφή και κάποια παραδείγματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 178 *Έστω $f(x)$ μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους $f^{'}, f^{''}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε και η $f(W(t))$ είναι μια διαδικασία Ito η οποία έχει τη μορφή,*

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W(s))ds + \int_0^t f^{'}(W(s))dW_s.$$

Σε διαφορική μορφή γράφεται $df(W(t)) = \frac{1}{2}f^{''}(W(t))dt + f^{'}(W(t))dW_t$.

Αν διαλέξουμε $f(x) = x^2$ τότε $f^{'} = 2x$ και $f^{''} = 2$. Οπότε εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι και η W_t^2 είναι μια διαδικασία Ito με διαφορική μορφή $d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t$. Επομένως, έχουμε το αποτέλεσμα ότι

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Παρόμοια, διαλέγοντας $f(x) = x^3$ διαπιστώνουμε ότι το στοχαστικό διαφορικό της W_t^3 είναι $d(W_t^3) = 3W_t dt + 3W_t^2 dW_t$.

ΛΗΜΜΑ 179 (Gronwall) *Έστω $T > 0$ και $c \geq 0$. Έστω $u(\cdot)$ μια συνάρτηση Borel μη αρνητική στο $[0,T]$ και έστω $v(\cdot)$ μια μη αρνητική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,T]$. Αν*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

τότε $$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(s)ds}.$$

Θα δώσουμε τώρα ένα γενικότερο θεώρημα στοχαστικού αναπτύγματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 180 *Έστω X_t μια διαδικασία Ito με συντελεστές $a(t), b(t)$ και έστω $f(t,x)$ μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους f_t, f_x, f_{xx} για κάθε $t \geq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε και η $f(t, X_t)$ είναι μια διαδικασία Ito τ.ω.*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = \quad & f(0,X_0) \\ + \quad & \int_0^t \left(f_t(s,X_s) + f_x(s,X_s)a(s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,X_s)b^2(s) \right) ds \\ + \quad & \int_0^t f_x(s,X_s)b(s)dW_s. \end{aligned}$$

Θα εφαρμόσουμε την έννοια του χρόνου στάσης καθώς και την φόρμουλα του Ito για να αποδείξουμε ότι η απόλυτη τιμή της κίνησης Brown έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων.

ΛΗΜΜΑ 181 *Για κάθε $p > 0$ υπάρχει κάποια σταθερά $C(p)$, εξαρτώμενη από το p μόνο τ.ω.*

$$\mathbb{E}|W_t|^p < C(p)$$

για κάθε $t \in [0, T]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την ακολουθία χρόνων στάσης

$$r_n = \inf\{t \in [0, T] : |W_t| > n\}$$

Σχηματίζουμε τη σταματημένη στοχαστική διαδικασία $W_{t\wedge r_n}$ η οποία ικανοποιεί

$$W_{t\wedge r_n} = \int_0^{t\wedge r_n} dW_s$$

Θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην $|W_{t\wedge r_n}|^p$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} |W_{t\wedge r_n}|^p &= \frac{(p-1)p}{2} \int_0^t |W_{s\wedge r_n}|^{p-3} W_{s\wedge r_n} ds \\ &\quad + p \int_0^t |W_{s\wedge r_n}|^{p-2} W_{s\wedge r_n} dW_s. \end{aligned}$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p \leq \frac{(p-1)p}{2}\int_0^t \mathbb{E}|W_{s\wedge r_n}|^{p-2}ds.$$

Επαγωγικά, και ξεκινώντας για $p = 2$ για άρτιες δυνάμεις αποδεικνύουμε ότι $\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|^p) \leq C(p)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|) = \mathbb{E}(\sqrt{|W_{t\wedge r_n}|^2}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|^2)} \leq C$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι και οι περιττές δυνάμεις είναι επίσης φραγμένες από μια σταθερά που εξαρτάται μονάχα από το p και όχι από το n όπου έχει ορισθεί ο χρόνος στάσης. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p \leq C(p).$$

Όμως

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p = \mathbb{E}\Big|W_{t\wedge r_n}\Big|^p\mathbb{I}_{\{r_n\geq t\}} + n^p P(\{r_n < t\}).$$

'ρα προκύπτει ότι

$$P(\{t\wedge r_n < t\}) = P(\{r_n < t\}) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ και έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι $t \wedge r_n \to t$ σχεδόν βέβαια καθώς $n \to \infty$. Χρησιμοποιώντας και το λήμμα Fatou παίρνουμε

$$\mathbb{E}|W_t|^p \leq C(p)$$

□

Γενικά για να υπολογίσουμε ή να φράξουμε ροπές μιας στοχαστικής διαδικασίας θα ήταν χρήσιμη η γνώση της πυκνότητάς της (όπως για παράδειγμα στην κίνηση Brown, δες θεωρήματα 225 και 229) αλλά αυτό συμβαίνει σπάνια οπότε η παραπάνω τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Παραδειγμα 182 *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}(W_t^4)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα του Ito για να βρούμε τη μορφή της W_t^4.*

$$W_t^4 = \int_0^t 4W_s^3 dW_s + \int_0^t 6W_s^2 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t^4) = \int_0^t 6\mathbb{E}(W_s^2) ds = \int_0^t 6s ds = 3t^2.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα του Fubini, το ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι μηδέν και το γεγονός ότι η διακύμανση της κίνησης Brown είναι ίση με t.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **183** *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της* W_t^6. *Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito έχουμε,*

$$W_t^6 = 6\int_0^t W_s^5 dW_s + 15\int_0^t W_s^4 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε,

$$\mathbb{E}(W_t^6) = 15t^3.$$

Στην πραγματικότητα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μέση τιμή όλων των δυνάμεων της W_t. *Από προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι* $\mathbb{E}(W_t^3) = 0$. *Θα δείξουμε, με επαγωγή, ότι* $\mathbb{E}(W_t^{2k+1}) = 0$ *και* $\mathbb{E}(W_t^{2k}) = (\frac{t}{2})^k \frac{(2k)!}{k!}$.

Ας ξεκινήσουμε με τις περιττές δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι ισχύει για $k = 1$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει για* $k = n$. *Θα δείξουμε ότι ισχύει για* $k = n + 1$. *Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t) =$

W_t^{2n+3}. *Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μέση τιμή είναι μηδέν αφού η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι πάντοτε μηδέν.*

Συνεχίζουμε με τις άρτιες δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι για $k = 1$ *η μέση τιμή είναι* $\mathbb{E}(W_t^2) = (\frac{t}{2})^1 \frac{2!}{1!} = t$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει για* $k = 2n$ *και θα δείξουμε ότι ισχύει για* $k = 2n+2$. *Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t) = W_t^{2n+2}$ *παίρνουμε το αποτέλεσμα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 184 *Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία* $X_t = e^{\sigma W_t}$ *με* $\sigma \in \mathbb{R}$. *Θα βρούμε το στοχαστικό διαφορικό της* X_t *ή αλλιώς θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t)$ *με* $f(x) = e^{\sigma x}$ *η οποία βέβαια ικανοποιεί τις απαιτούμενες προϋποθέσεις. Πράγματι,*

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t dt, \quad X_0 = 1.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε και τη μέση τιμή της X_t *χρησιμοποιώντας το παραπάνω (αφού δείξετε ότι έχει φραγμένη ροπή κατάλληλης τάξης με χρόνους στάσης και* *ίσως το λήμμα του Gronwall). Έχουμε λοιπόν,*

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \mathbb{E}(X_s)ds + 1.$$

Θέτουμε $y(t) = \mathbb{E}(X_t)$ *και διαπιστώνουμε ότι η* $y(t)$ *θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση,*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\sigma^2}{2}y(t), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Εξηγήστε γιατί. Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι $y(t) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$. *'ρα* $\mathbb{E}(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 185 *Έστω* $f(t,x) = tx$. *Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις της φόρμουλας του Ito επομένως προκύπτει ότι* $tW_t = \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 186 (Γεωμετρική κίνηση Brown) *Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία,*

$$X_t = X_0 + a\int_0^t X_s ds + b\int_0^t X_s dW_s, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι η X_t είναι της μορφής $X_t = f(t, W_t)$ για μια κατάλληλη συνάρτηση $f(t,x)$ την οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε. Γενικά αυτό δεν είναι σωστό όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα. Όμως, μπορούμε πάντοτε να κάνουμε μια τέτοια υπόθεση (ή παρόμοια) και αν μας οδηγήσει σε κάποιο αποτέλεσμα τότε αυτό που θα πρέπει να κάνουμε είναι να το επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito.

Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην άγνωστη $f(t,x)$ και έχουμε,

$$\begin{aligned} f(t, W_t) = \quad & f(0, W_0) \\ + \quad & \int_0^t \left(f_t(s, W_s) + f_x(s, W_s) \cdot 0 + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s) \cdot 1^2 \right) ds \\ + \quad & \int_0^t f_x(s, W_s) \cdot 1 dW_s, \end{aligned}$$

αφού $W_t = W_0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dW_s$. Λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης μιας διαδικασίας Ito έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(t,x) &= bf(t,x) \\ f_t(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,x) &= af(t,x). \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη έχουμε ότι $f(t,x) = g(t)e^{bx}$ *για κάποια* $g(t)$ *και χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη έχουμε ότι* $g(t) = Ce^{a-\frac{b^2}{2}t}$ *για κάποια σταθερά* C *την οποία υπολογίζουμε από τη σχέση* $f(0,0) = X_0$*, δηλαδή* $C = X_0$*. Τελικά,*

$$X_t = X_0 e^{bW_t + (a-\frac{b^2}{2})t}$$

Όπως είπαμε, θα πρέπει τώρα να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito στην $f(t, W_t)$ *με*

$$f(t,x) = X_0 e^{bx + (a-\frac{b^2}{2})t}$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας χρόνους στάσης, ότι η $|X_t$ *έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων όταν αντίστοιχα η αρχική τιμή* $|X_0|$ *έχει φραγμένες ροπές.*

Παραδειγμα 187 *Θα δούμε τώρα την* $X_t = e^{W_t}e^{-\frac{t}{2}}$. *Χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα του Ito στην* $f(t, W_t)$ *με* $f(t,x) = e^x e^{-\frac{t}{2}}$ *και έχουμε* $X_t = X_0 + \int_0^t X_s dW_s$.

Παραδειγμα 188 (Διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck) *Θα εξετάσουμε τη στοχαστική διαδικασία* $Y_t = be^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$ *όπου* $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ *και θα δείξουμε ότι* $Y_t = -a\int_0^t Y_s ds + \int_0^t b dW_s$. *Αν το δούμε αντίστροφα, διαπιστώνουμε ότι η* Y_t *δεν γράφεται στη μορφή* $Y_t = f(t, W_t)$ *για μια συνάρτηση* $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *όπως είπαμε σε προηγούμενο παράδειγμα αλλά στη μορφή* $Y_t = f(t, X_t)$ *για κατάλληλα επιλεγμένες* $f(t,x)$ *και* X_t.

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $f(t, X_t)$ *με* $f(t,x) = e^{-at}x$ *και* $X_t = b\int_0^t e^{as}dW_s$ *(εφαρμόστε τη και δείξτε το αποτέλεσμα).*

2.3 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Θα δώσουμε παρακάτω ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα ολοκλήρωσης κατά μέρη το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τη λύση των γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 189 (Ολοκλήρωση κατά μέρη) *Έστω*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t b_1(s)dW_s$$

και

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_2(s)ds + \int_0^t b_2(s)dW_s$$

διαδικασίες Ito. Τότε,

$$\begin{aligned} X_t Y_t = X_0 Y_0 &+ \int_0^t X_s a_2(s)ds + \int_0^t X_s b_2(s)dW_s \\ &+ \int_0^t Y_s a_1(s)ds + \int_0^t Y_s b_1(s)dW_s \\ &+ \int_0^t b_1(s) b_2(s)ds. \end{aligned}$$

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 190 *Έστω W_t μια κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$.*

Μια εξίσωση της μορφής,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s,$$

ονομάζεται στοχαστική διαφορική εξίσωση. Η άγνωστη ποσότητα είναι η στοχαστική διαδικασία X_t ενώ οι συναρτήσεις $f(t,x), g(t,x)$ και η τ.μ. X_0 είναι δοσμένα.

Θα δώσουμε το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, δηλαδή τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Πριν το κάνουμε αυτό όμως θα δώσουμε τον ορισμό της ισχυρής λύσης καθότι υπάρχει και η έννοια της ασθενούς λύσης με την οποία δεν θα ασχοληθούμε εδώ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 191 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t θα λέμε ότι είναι ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αν είναι προσαρμοσμένη και τ.ω. $f(t, X_t) \in \mathbb{L}^1$ και $g(t, X_t) \in \mathbb{L}^2$ και τέλος να ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση σβ.*

Το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 192 *Έστω ότι οι παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται.*

(i) *(Συνθήκη Lipschitz) Για κάθε* T, N *υπάρχει σταθερά* $K(T, N)$ *τ.ω. για κάθε* $|x|, |y| \leq N$ *και για όλα τα* $0 \leq t \leq T$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y|.$$

(ii) *(Γραμμικά αυξητική συνθήκη) Υπάρχει σταθερά* $C > 0$ *τ.ω.* $|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq C(1+|x|)$.

(iii) *Η* X_0 *είναι ανεξάρτητη από την* $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ *και* $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$.

Τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει μοναδική ισχυρή λύση X_t *η οποία είναι συνεχής και*

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) \leq \hat{C}(1 + \mathbb{E}(X_0^2)),$$

με $\hat{C}$ *να εξαρτάται μόνο από τα* C, T.

Επίσης έχουμε και το επόμενο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 193 (Yamada – Watanabe) *Έστω ότι η $f(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz και η $g(x)$ είναι Holder συνεχής τάξης $a \in (0,1)$. Τότε υπάρχει μοναδική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s.$$

Σημειώστε ότι η $g(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz συνεχής αλλά Holder συνεχής τάξης $\frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 194 *Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση,*

$$X_t = 1 + a\int_0^t X_s ds + b\int_0^t X_s dW_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι ικανοποιεί τις δυο πρώτες συνθήκες (Lipschitz και γραμμικά αυξητική συνθήκη). Θα δούμε μόνο την τελευταία για την οποία θα πρέπει να δείξουμε ότι η αρχική συνθήκη $X_0 = 1$ είναι ανεξάρτητη της $\sigma(W_s, 0 \le s \le T)$.

Για να ισχύει αυτό όπως γνωρίζουμε θα πρέπει οι $\sigma(X_0)$ *και η* $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ *να είναι ανεξάρτητες, δηλαδή αν* $A \in \sigma(X_0)$ *και* $B \in \sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ *τότε* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. *Θα μελετήσουμε την σ-άλγεβρα που παράγει η σταθερή τ.μ.* $X_0 = 1$. *Όπως γνωρίζουμε η* $\sigma(X_0) = (\{\omega \in \Omega : X_0 \in C\}, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Εδώ είναι ιδιαίτερα χρήσιμο το γεγονός ότι η* X_0 *είναι σταθερή, διότι μόνο δυο είναι οι αντίστροφες εικόνες και αυτές προκύπτουν από το αν το* $1 \in C$ *ή όχι. Όταν λοιπόν το* C *περιέχει το 1 τότε η σντίστροφη εικόνα είναι το* Ω *ενώ όταν δεν το περιέχει η αντίστροφη εικόνα είναι το κενό. 'ρα,* $\sigma(X_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ *η οποία είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που μπορεί να κατασκευάσει κανείς. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη από την* $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T))$.

2.3.1 Γραμμικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και θα καταγράψουμε τη μοναδική λύση τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 195 *Έστω* $X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$ *διαδικασία Ito και έστω* $U_t = 1 + \int_0^t U_s a_s ds + \int_0^t U_s b_s dW_s$. *Ονομάζουμε την* U_t *στοχαστικό εκθετικό της* X_t.

Στο επόμενο θεώρημα θα καταγράψουμε τη μορφή μιας τέτοιας U_t.

ΘΕΩΡΗΜΑ 196 *Αν* U_t *είναι το στοχαστικό εκθετικό της* X_t *η οποία είναι διαδικασία Ito τότε*

$$U_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $K(t) = X_t - X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds = \int_0^t (a_s - \frac{1}{2} b_s^2) ds + \int_0^t b_s dW_s$ η οποία είναι διαδικασία Ito. Επίσης, θέτουμε $f(x) = e^x$ και εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $f(K(t))$ και προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Θα εξετάσουμε τώρα τη γενική μορφή της γραμμικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή,

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a_s + b_s X_s) ds + \int_0^t (c_s + d_s X_s) dW_s,$$

με κατάλληλες στοχαστικές διαδικασίες a_t, b_t, c_t, d_t έτσι ώστε να έχει μοναδική λύση. Θα υπολογίσουμε τη λύση θεωρώντας ότι έχει τη μορφή $X_t = U_t V_t$ με U_t τ.ω.

$$U_t = 1 + \int_0^t U_s b_s ds + \int_0^t U_s d_s dW_s,$$

δηλαδή η U_t είναι το στοχαστικό εκθετικό της $Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t d_s dW_s$ και επομένως είναι γνωστή, ενώ η $V_t = X_0 + \int_0^t k_1(s)ds + \int_0^t k_2(s)dW_s$ με $k_1(t), k_2(t)$ στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα.

Θα εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά μέρη για να υπολογίσουμε το γινόμενο $U_t V_t$ το οποίο θα εξισώσουμε με την X_t και έτσι να ορίσουμε κατάλληλα τις $k_1(t), k_2(t)$ για να ισχύει η ισότητα. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} U_t V_t &= X_0 + \int_0^t U_s k_1(s) ds + \int_0^t U_s k_2(s) dW_s \\ &\quad + \int_0^t U_s V_s b_s ds + \int_0^t V_s U_s d_s dW_s + \int_0^t k_2(s) d_s U_s ds \\ &= U_0 V_0 + \int_0^t b_s X_s ds + \int_0^t d_s X_s dW_s \\ &\quad + \int_0^t (U_s k_1(s) + k_2(s) d_s U_s) ds + \int_0^t U_s k_2(s) dW_s, \end{aligned}$$

έχοντας αντικαταστήσει το γινόμενο $U_s V_s$ με την X_s. Εξισώνοντας με την X_t προκύπτει ότι $k_1(t) = \frac{a_t - c_t d_t}{U_t}$ και $k_2(t) = \frac{c_t}{U_t}$ και επομένως η $X_t = U_t V_t$ είναι γνωστή.

2.4 Στοχαστικό θεώρημα Fubini

Το επόμενο θεώρημα είναι το λεγόμενο στοχαστικό θεώρημα Fubini με το οποίο, κάτω από τις κατάλληλες προϋποθέσεις, μπορεί να εναλλάξει κανείς το στοχαστικό ολοκλήρωμα με το ολοκλήρωμα Riemann.

ΘΕΩΡΗΜΑ 197 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω W_t μια κίνηση Brown* στο χώρο αυτό. Έστω ότι $\Phi(t, r, \omega) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη και $(\mathcal{F}_t)$-προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε για κάθε $T > 0$, έχουμε

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, r, \omega)\mathbb{I}_{[0,T]}(r) dr dW_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \Phi(s, r, \omega)\mathbb{I}_{[0,T]}(r) dW_s dr.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 198 *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και διακύμανση της $Y_t = \int_0^t W_r dr$. Η μέση τιμή υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας το κλασικό θεώρημα Fubini και είναι μηδέν. Θα υπολογίσουμε τώρα την $\mathbb{E}(Y_t^2)$. Έχουμε λοιπόν,*

$$Y_t = \int_0^t W_r dr = \int_0^t \int_0^r 1 dW_s dr = \int_0^t \int_s^t 1 dr dW_s = \int_0^t (t - s) dW_s.$$

'ρα $\mathbb{E}(Y_t^2) = \frac{t^3}{3}$.

Μπορούμε να το υπολογίσουμε και διαφορετικά χωρίς τη χρήση του στοχαστικού θεωρήματος Fubini. Από προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $tW_t =$

$\int_0^t W_r dr + \int_0^t r dW_r$. *Οπότε,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t W_r dr\right)^2 &= \mathbb{E}\left(tW_t - \int_0^t r dW_r\right)^2 \\
&= t^3 + \mathbb{E}\left(\int_0^t s dW_s\right)^2 - 2t\mathbb{E}\left(W_t \int_0^t r dW_r\right) \\
&= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t\mathbb{E}\left(\int_0^t dW_r \int_0^t r dW_r\right) \\
&= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t\mathbb{E}\left(\int_0^t r dr\right) \\
&= \frac{t^3}{3}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία του Ito δυο φορές, την πρώτη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του τετραγώνου στοχαστικού ολοκληρώματος και τη δεύτερη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής για γινόμενο στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

2.5 Θεώρημα Girsanov

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την τεχνική αλλαγής μέτρου και αλλαγής κίνησης Brown.

ΟΡΙΣΜΟΣ 199 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και P, Q δυο μέτρα πιθανότητας στον ίδιο χώρο. Το Q θα λέγεται απόλυτα συνεχές ως προς το P και γράφουμε $Q << P$, αν $Q(A) = 0$ όταν $P(A) = 0$. Τα P, Q ονομάζονται ισοδύναμα αν $Q << P$ και $P << Q$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 200 (Radon-Nikodym) *Αν $Q << P$ τότε υπάρχει μοναδική τ.μ. L τ.ω. $L \geq 0$, $\mathbb{E}_P L = 1$ και*

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Η L είναι P-σβ. μοναδική. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια τ.μ. L με την παραπάνω ιδιότητα και το Q ορίζεται ως $Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A)$ τότε το Q είναι μέτρο πιθανότητας και $Q << P$.

Η τ.μ. L ονομάζεται η Radon-Nikodym παράγωγος ή η πυκνότητα του Q ως προς το P και συμβολίζεται με $\frac{dQ}{dP} = L$. Προκύπτει ότι αν $Q << P$ τότε

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_P(LX),$$

για κάθε τ.μ. X ολοκληρώσιμη ως προς το Q.

ΘΕΩΡΗΜΑ 201 *Έστω $L(t)$ μια θετική P-martingale τ.ω. $\mathbb{E}_P(L(T)) = 1$. Ορίζουμε το καινούριο μέτρο πιθανότητας Q ως εξής*

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L(T)\mathbb{I}_A), \forall A \in \mathcal{F}.$$

Τότε το Q είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P και για Q-ολοκληρώσιμη τ.μ. X,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X) &= \mathbb{E}_P(L(T)X), \\ \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_P\left(\frac{L(T)}{L(t)}X|\mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

και αν η X είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, τότε για $s \leq t$

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_P\left(\frac{L(t)}{L(s)}X|\mathcal{F}_s\right).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 202 *Μια στοχαστική διαδικασία $M(t)$ είναι μια Q-martingale ανν $L(t)M(t)$ είναι μια P-martingale*

ΘΕΩΡΗΜΑ 203 *Έστω $X_n \to X$ κατά P-πιθανότητα και έστω $Q << P$. Τότε $X_n \to X$ κατά Q-πιθανότητα.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 204 *Η τετραγωνική κύμανση μιας στοχαστικής διαδικασίας δεν αλλάζει κάτω από αλλαγή σε άλλο απόλυτα συνεχές μέτρο πιθανότητας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 205 (Girsanov) *Έστω W_t μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας P. Έστω η στοχαστική διαδικασία $\hat{W}_t = W_t + mt$. Ορίζουμε το μέτρο Q ως εξής,*

$$\frac{dQ}{dP} = L = e^{-mW_T - \frac{1}{2}m^2 T}.$$

Τότε το Q είναι ισοδύναμο με το P και η $\hat{W}(t)$ είναι Q-κίνηση Brown. Επίσης,

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{L} = e^{m\hat{W}_T - \frac{1}{2}m^2 T}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 206 *Έστω W_t μια P-κίνηση Brown και $H(t)$ τ.ω. $X_t = \int_0^t H(s)dW_s$ να ορίζονται. Ορίζουμε το μέτρο Q ως εξής,*

$$L = \frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}.$$

Τότε τα P, Q είναι ισοδύναμα και η στοχαστική διαδικασία $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s)ds$ είναι Q-κίνηση Brown αν η $Z(t) = e^{-\int_0^t H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)ds}$ είναι martingale.

Μια ικανή συνθήκη για να είναι η $Z(t)$ martingale είναι η επόμενη συνθήκη

$$\boxed{\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}) < \infty \qquad \text{Συνθήκη Novikov}}.$$

Βέβαια, αυτή ικανοποιείται όταν π.χ. η $H(t)$ είναι φραγμένη από μια σταθερά κατά απόλυτη τιμή.

Το τελευταίο θεώρημα είναι το αντίστροφο των προηγούμενων, δηλαδή, αποδεικνύεται ότι όταν εφοδιάσεις το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με το φιλτράρισμα που παράγει η κίνηση Brown (τροποποιημένο έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες) τότε κάθε ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q έχει πυκνότητα της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 207 *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t^W))$ με φίλτρο. Τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας Q ισοδύναμο με το P υπάρχει μια στοχαστική διαδικασία H_t η οποία είναι $(\mathcal{F}_t^W)$-προοδευτικά μετρήσιμη τ.ω.*

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 208 *Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s,$$

με $g(t, x) > 0$, ορισμένη στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ και μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Στόχος μας είναι να αλλάξουμε το μέτρο πιθανότητας Q έτσι ώστε να κατασκευάσουμε μια άλλη κίνηση Brown $\hat{W}_t$ και η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης να ικανοποιεί και την ε-

πόμενη,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s,$$

για μια δοσμένη συνάρτηση $f_2(t, x)$. *Θέτουμε λοιπόν*

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{f_1(t, X_t) - f_2(t, X_t)}{g(t, X_t)}, \\ L(T) &= e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}, \\ \frac{dQ}{dP} &= L(T). \end{aligned}$$

Αν η $L(t)$ *είναι martingale τότε η στοχαστική διαδικασία* $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s)ds$ *είναι* Q*-κίνηση Brown.*

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι

$$\int_0^t g(s, X_s)dW_s = \lim \sum g(t_i, e_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του $\mathcal{M}_c^2$. *Παρόμοια έχουμε,*

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(s,X_s)d\hat{W}_s &= \lim \sum g(t_i,e_i)(\hat{W}_{t_{i+1}} - \hat{W}_{t_i}) \\
&= \int_0^t g(s,X_s)dW_s + \int_0^t g(s,X_s)d(\int_0^s H_r dr) \\
&= \int_0^t g(s,X_s)dW_s + \int_0^t g(s,X_s)H(s)ds.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\int_0^s H_r dr$ *είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^t g(s,X_s)d(\int_0^s H_r dr)$$

είναι κατά Riemann-Stieltjes και άρα

$$\int_0^t g(s,X_s)d(\int_0^s H_r dr) = \int_0^t g(s,X_s)H(s)ds$$

από ιδιότητα του Riemann-Stieltjes ολοκληρώματος. Όμως για να χρησιμοποιήσει κανείς αυτή την ιδιότητα θα πρέπει η συνάρτηση $\int_0^s H_r dr$ *να είναι απόλυτα συνεχής και για να ισχύει αυτό θα πρέπει η* H_t *να είναι*

Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,t]$. Οπότε

$$\begin{aligned} X_t = X_0 &+ \int_0^t H(s)g(s,X_s)ds + \int_0^t f_2(s,X_s)ds \\ &+ \int_0^t g(s,X_s)d\hat{W}_s - \int_0^t H(s)g(s,X_s)ds \end{aligned}$$

δηλαδή η X_t ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s,X_s)ds + \int_0^t g(s,X_s)d\hat{W}_s,$$

Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται συχνά η συμβολική γραφή $d\hat{W}_t = dW_t + H_t dt$ και αντικαθιστώντας στη (συμβολική μορφή πάλι) στοχαστική διαφορική έχουμε το αποτέλεσμα.

Βιβλιογραφία

1. R. Korn - E. Korn, Option Pricing and Portfolio Optimization, AMS, 2000.

2 I. Karatzas - S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991.

3. M. Musiela - M. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer, 2005.

4. A. Pascucci-W. Runggaldier, Financial Mathematics, Springer, 2012.

5. S. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I and II, Springer, 2004.