Ένας τρόπος υπολογισμού του μέσου χρόνου επαναφοράς m_i μιας κατάστασης i Μαρκοβιανής αλυσίδας

Νικος Χαλιδιας
Μαθηματικό Τμήμα
κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Θεωρημα 1 *Ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης i δίνεται από*

$$m_i = 1 + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i$$

όπου k_j^i είναι οι χρόνοι πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση i ξεκινώντας από την j, αρκεί κάθε κατάσταση j να επικοινωνεί με την i.

Αποδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m_i &= \mathbb{E}(H^i | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}} | X_0 = i) \\ &= \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = i\}} | X_0 = i) + \sum_{j \neq i} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}} | X_0 = i) \\ &= P_{ii} + \sum_{j \neq i} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}} | X_0 = i) \end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τον όρο $\mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}} | X_0 = i)$ όταν $j \neq i$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}} | X_0 = i) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(H^i = n, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P(H^i = n, X_1 = j | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^i = n, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= P_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P(H^i = n | X_1 = j) + P_{ij} \\ &= P_{ij} + P_{ij} k_j^i \end{aligned}$$

Άρα

$$m_i = P_{ii} + \sum_{j \neq i} P_{ij} + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i = 1 + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **2** *Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς της κατάστασης 1 της Μαρκοβιανής αλυσίδας του περιπατητή η οποία έχει πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους πρώτης επίσκεψης στο μονοσύνολο $A = \{1\}$. *Οι εξισώσεις είναι*

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 1 + \frac{1}{2}k_3 \\ k_3 &= 1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_4 \\ k_4 &= 1 + \frac{1}{2}k_3 \end{aligned}$$

και το διάνυσμα λύσεων είναι το $(0, 2, 4, 3)$. *Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 1 ο μέσος χρόνος επαναφοράς είναι*

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_4 = 4$$