Πέμπτο Φυλλάδιο Εργασίας
Στοχαστικές Διαδικασίες Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

(Πρώτο Θέμα) Διπλά στοχαστικός πίνακας ονομάζεται ένας στοχαστικός πίνακας του οποίου το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης είναι η μονάδα. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη και απεριοδική με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) και διπλά στοχαστικό πίνακα μετάβασης P. Αποδείξτε τότε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j = \frac{1}{m}.$$

όπου $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_m)$ η στάσιμη κατανομή.

(Δεύτερο Θέμα) Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Αν υπάρχει υπακολουθία n_k τέτοια ώστε οι ακολουθίες πιθανοτήτων $(P^{n_k})_{ij}$ να συγκλίνουν τότε αποδείξτε ότι

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \quad \text{για κάθε } i \in S$$

όπου $\lim_{n_k\to\infty}(P^{n_k})_{ij} = p_{ij}$. Δηλαδή ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι επίσης στοχαστικός. Αυτό μπορεί να διευκολύνει τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων αφού η τελευταία οριακή πιθανότητα της κάθε γραμμής μπορεί να βρεθεί αφαιρώντας το άθροισμα των υπολοίπων από την μονάδα. Σε αλυσίδες με άπειρες καταστάσεις ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι πάντοτε στοχαστικός; Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

(Τρίτο Θέμα) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένη αλυσίδα δεν έχει μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις. Έτσι, σε κάθε πεπερασμένη και αδιαχώριστη αλυσίδα (ή υποαλυσίδα) όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Δεν συμβαίνει το ίδιο με τις αλυσίδες άπειρων καταστάσεων εν γένει. Δώστε αντιπαράδειγμα.

(Τέταρτο Θέμα) Κατασκευάστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με μια απορροφητική κατάσταση και άπειρες μεταβατικές καταστάσεις έτσι ώστε η πιθανότητα απορρόφησης στο σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων να είναι θετική. Μπορεί αυτό να συμβεί σε μια αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων;

(Πέμπτο Θέμα) Υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες σε όλες τις Μαρκοβιανές αλυσίδες των προηγούμενων φυλλαδίων.