Περιοδικότητα Μαρκοβιανών αλυσίδων και Εφαρμογές της

Πρώτη Εφαρμογή της εύρεσης της περιόδου.

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το S και πίνακα μετάβασης τον P. Η εύρεση της περιόδου της αλυσίδας έχει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων της αλυσίδας πρέπει (και αρκεί) να υπολογίσει κανείς την περίοδο των επαναληπτικών καταστάσεων. Ο υπολογισμός της περιόδου των μεταβατικών καταστάσεων δεν χρειάζεται για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και ότι έχει περίοδο $d = 2$ αφού το σύνολο καταστάσεων μπορεί να χωρισθεί στα εξής σύνολα κυκλικής μετάβασης

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1,3\} \\ C_1 &= \{2\} \end{aligned}$$

με βάση την κατάσταση 1. Δηλαδή, η αλυσίδα υποχρεωτικά πραγματοποιεί την εξής κίνηση $\cdots C_0 \to C_1 \to C_0 \cdots$.

Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες θα πρέπει να εργαστούμε στην αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον P^d, δηλαδή τον P^2 στην προκειμένη περίπτωση. Εδώ, είναι βολικό να αναδιατάξουμε την σειρά των καταστάσεων και να φέρουμε δίπλα - δίπλα τις καταστάσεις που βρίσκονται στο ίδιο σύνολο κυκλικής μετάβασης. Δηλαδή, να φέρουμε την κατάσταση 3 δίπλα στην 1. Έτσι ο πίνακας μετάβασης P θα γίνει

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

και ο P^2, δηλαδή ο πίνακας μετάβασης της Y_n είναι ο

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια μελετούμε την αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον $B = P^2$ και ας ονομάσουμε (για ευκολία) τις καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$. Δηλαδή, η τωρινή κατάσταση 2 είναι η κατάσταση 3 στην αρχική αλυσίδα. Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 1 και 2 συνεπικοινωνούν και ότι η κατάσταση 3 είναι απορροφητική. Όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές και μάλιστα θετικά επαναληπτικές. Οι 1 και 2 δημιουργούν ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο θετικά επαναληπτικών καταστάσεων. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες B^n_{i1} και B^n_{i2} για $i = 1, 2$ θα χρειαστούμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς των καταστάσεων 1 και 2. Για τον λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την μοναδική στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας που δημιουργούν οι καταστάσεις 1 και 2. Παρατηρούμε ότι $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$ και άρα οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_1 = m_2 = 2$. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε το θεώρημα 1213 του βιβλίου και συμπεραίνουμε ότι οι οριακές πιθανότητες είναι $\lim_{n\to\infty} B^n_{i1} = \lim_{n\to\infty} B^n_{i2} = 1/2$. Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν παρατηρούσαμε ότι η υποαλυσίδα της Y_n των καταστάσεων 1 και 2 είναι διπλά στοχαστική.

Η οριακή πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} B_{33}^n = 1$ διότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς μιας απορροφητικής κατάστασης είναι 1. Μένει να βρούμε τις οριακές πιθανότητες $\lim_{n\to\infty} B_{31}^n$ και $\lim_{n\to\infty} B_{32}^n$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1213 ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} B_{31}^n = \frac{f_{31}}{m_1} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} B_{32}^n = \frac{f_{32}}{m_2} = 0$$

καθότι $f_{31} = f_{32} = 0$ αφού η κατάσταση 3 είναι απορροφητική. Παρόμοια, επειδή το σύνολο $\{1,2\}$ είναι κλειστό έπεται ότι $f_{13} = f_{23} = 0$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} B_{13}^n = \frac{f_{13}}{m_3} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} B_{23}^n = \frac{f_{23}}{m_3} = 0$$

Τελικά, οι οριακές πιθανότητες της Y_n δίνονται από τον πίνακα $B^\infty = B$ (τυχαίνει στο συγκεκριμένο παράδειγμα να συμπίπτει με τον αρχικό πίνακα).

Οι οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας είναι ως εξής

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = \lim_{n\to\infty} B^n = B$$
$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P^{2n}P = BP = P$$

Δηλαδή η ακολουθία πινάκων P^n έχει δυο συγκλίνουσες υπακολουθίες οι οποίες δημιουργούνται λόγω της περιόδου της αλυσίδας. Αν η αλυσίδα είχε περίοδο 3 θα εμφανίζονταν 3 συγκλίνουσες υπακολουθίες κ.τ.λ.

Δεύτερη Εφαρμογή της εύρεσης της περιόδου.

Όταν $n = ad + b$ θα γράφουμε $n \equiv b \mod d$ όπου $a, d, b \in \mathbb{N}$. Το Θεώρημα 1181 του βιβλίου μπορεί να διατυπωθεί γενικότερα ως εξής.

Θεώρημα 1 *Έστω $i \leftrightarrow j$ δυο περιοδικές καταστάσεις περιόδου d μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n > 0\}$ έχει την μορφή $n \equiv b \mod d$ όπου το b εξαρτάται μονάχα από τις καταστάσεις i, j και όχι από το n.*

Παρόμοια, το θεώρημα 1183 του βιβλίου μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 2 *Έστω C αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων και $i, k, j \in C$. Έστω $C_0, C_1, \cdots$, τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση i. Αν $k \in C_t$ και $P_{kj} > 0$ τότε αναγκαστικά $j \in C_{t+1}$ όπου $C_d = C_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρεθεί στο σύνολο C_t τότε για όσο χρονικό διάστημα παραμείνει στο σύνολο C θα ακολουθεί την πορεία $C_t \to C_{t+1} \to C_{t+2} \cdots$. Στην περίπτωση όπου το C έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων m ισχύει ότι $d \le m$.*

Έστω ότι η κατάσταση i είναι περιοδική με περίοδο d. Συνδυάζοντας το θεώρημα 1 μαζί με το λήμμα 1211 του βιβλίου προκύπτει ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ αποτελείται από όλους τους ακέραιους (και μόνον) της μορφής kd για k αρκετά μεγάλο. Δηλαδή, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από την i τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην i μόνο μετά από ακέραιο πολλαπλάσιο του d πλήθος βημάτων. Το συμπέρασμα αυτό είναι κάτι που διαισθητικά περιμέναμε. Παρόμοια, αν $i \leftrightarrow j$, το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n > 0\}$ περιέχει όλους τους ακέραιους της μορφής $n = kd + b$ για όλα τα $k \ge k_0$ και μόνον αυτούς. Δηλαδή οι μεταβάσεις από την i στην j έχουν θετική πιθανότητα μόνον σε συγκεκριμένο πλήθος βημάτων.

Επιπλέον, αν οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε οι μη μηδενικές αυτές πιθανότητες συγκλίνουν στο μηδέν.

Ως παράδειγμα, ας δούμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική (άρα απεριοδική) ενώ οι καταστάσεις 2 και 3 μεταβατικές και περιοδικές με περίοδο 2. Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε μόνο σε άρτιο πλήθος βημάτων υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην 2. Παρόμοια, αν βρεθεί στην κατάσταση 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μόνο σε περιττό πλήθος βημάτων. Πράγματι, εφόσον $P_{23}^1 = 1/2 > 0$, έχουμε ότι $1 = kd + b$ και αναγκαστικά $b = 1$. Άρα, αν βρεθεί στην 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μονάχα όταν το πλήθος βημάτων έχει την μορφή $n = 2k + 1$. Επιπλέον, επειδή οι καταστάσεις 2 και 3 είναι μεταβατικές, οι πιθανότητες P_{i2}^n και P_{i3}^n συγκλίνουν στο μηδέν (όταν δεν είναι ήδη μηδέν) για $i = 1, 2, 3$.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα συμπεράσματα αυτά υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα η οποία είναι

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι πράγματι, οι P_{i2}^n και P_{i3}^n για $i = 1, 2, 3$ συγκλίνουν στο μηδέν. Επίσης, η P_{22}^n είναι θετική μονάχα όταν το n είναι άρτιο και επιπλέον η P_{23}^n είναι θετική μονάχα όταν το n είναι περιττό.

Άλλο ένα παράδειγμα είναι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές. Επιπλέον, το σύνολο $C = \{2, 3, 4, 5\}$ είναι αδιαχώριστο (αλλά όχι κλειστό). Μπορούμε το σύνολο αυτό να το χωρίσουμε σε σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 ως εξής

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2\} \\ C_1 &= \{3\} \\ C_2 &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

Δηλαδή για όσο παραμένει η αλυσίδα στο σύνολο C θα ακολουθεί υποχρεωτικά μια συγκεκριμένη πορεία $\cdots C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_0 \cdots$. Με αυτό τον τρόπο γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων $\{n \in \mathbb{N} : P_{22}^n > 0\}$ περιέχει μονάχα πολλαπλάσια του 3. Επειδή όμως $P_{22}^3 > 0$ $(2 \to 3 \to 4 \to 2)$ έπεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι το 3. Άρα η κοινή περίοδος των καταστάσεων $\{2, 3, 4, 5\}$ είναι ο $d = 3$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα αυτό σημαίνει ότι αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την

4 σε πλήθος βημάτων της μορφής $n = 3k + b$. Μένει να υπολογίσουμε το b. Παρατηρούμε ότι $P_{24}^2 > 0$ $(2 \to 3 \to 4)$ και επομένως ο αριθμός 2 θα έχει την μορφή $2 = 3k + b$. Αυτό συμβαίνει μονάχα όταν $k = 0$ και $b = 2$. Άρα λοιπόν υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την 2 στην 4 μονάχα σε $n = 3k + 2$ πλήθος βημάτων, δηλαδή $P_{24}^{3k+2} > 0$ για κάθε k αρκετά μεγάλο ενώ $P_{24}^n = 0$ όταν $n \neq 3k + 2$.