Το Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

19 Μαΐου 2007

1 Το Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Σε αυτές τις σημειώσεις θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα για το Riemann-Stieltjes ολοκλήρωμα. Θα δώσουμε επίσης και ορισμένα παραδείγματα και λυμένες ασκήσεις.

Έστω ένα διάστημα $I = [a, b]$ και $P_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ένα σύνολο σημείων τ.ω. $x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$. Θα ονομάζουμε το P_n διαμέριση του $[a, b]$. Είναι φανερό ότι το $n \in \mathbb{N}$ είναι το σύνολο των σημείων της διαμερίσεως. Με $|P_n|$ θα συμβολίζουμε το μέγιστο των διαφορών $x_k - x_{k-1}$. Μας ενδιαφέρουν οι κανονικές διαμερίσεις, δηλ. αυτές για τις οποίες ισχύει $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$.

Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$. Κατασκευάζουμε το εξής άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})), \tag{1}$$

με $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ένας τυχαία επιλεγμένος αριθμός και τα x_k είναι σημεία μιας κανονικής διαμέρισης P_n.

Καταρχήν ας συμβολίσουμε με $S(f, g, P_n)$ το παραπάνω άθροισμα το οποίο ονομάζεται και άθροισμα Riemann-Stieltjes. Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα αυτό συγκλίνει στον ίδιο αριθμό λ για κάθε κανονική διαμέριση P_n καθώς το $n \to \infty$. Τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την g και συμβολίζουμε τον μοναδικό αριθμό λ με

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι αν $g(x) = x$ τότε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα Riemann. Επίσης δεν έχουμε κάνει κάποια υπόθεση συνέχειας για τις δύο συναρτήσεις.

Ας δώσουμε ένα θεώρημα.

Θεώρημα 1 *Έστω ότι υπάρχουν τα $\int_a^b fdg_1$, $\int_a^b fdg_2$ και έστω $g = c_1g_1 + c_2g_2$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς g και ισχύει*

$$\int_a^b fdg = c_1\int_a^b fdg_1 + c_2\int_a^b fdg_2. \tag{2}$$

Έστω επίσης ότι τα $\int_a^b f_1dg$, $\int_a^b f_2dg$ υπάρχουν και έστω $f = c_1f_1 + c_2f_2$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς g και ισχύει

$$\int_a^b f dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg. \tag{3}$$

Τέλος, αν f, g είναι ολοκληρώσιμες ως προς h στο I τότε το γινόμενο fg και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ως προς την h.

Θα δούμε ένα παράδειγμα ολοκληρώματος και πως υπολογίζεται με τον ορισμό.

Παράδειγμα 1 *Έστω μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $c \in [a, b]$ και έστω η συνάρτηση $\chi_c(x) = 1$ αν $x = c$ και μηδέν αλλιώς. Θα δείξουμε ότι $\int_a^b f d\chi_c = 0$ αν $c \in (a, b)$, ενώ αν $c = a$ τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $-f(a)$ αλλιώς είναι ίσο με $f(b)$.*

Πράγματι, ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που $c \in (a, b)$. Έστω $P_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Υπάρχουν γενικά δύο περιπτώσεις, η μία είναι κανένα σημείο της διαμέρισης να μην είναι ίσο με το c. Σε αυτή την περίπτωση, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$S(f, \chi_c, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(\chi_c(x_k) - \chi_c(x_{k-1})) = 0.$$

Τώρα στην περίπτωση μιας ακολουθίας διαμερίσεων για τις οποίες $x_k = c$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, σχηματίζουμε το παραπάνω άθροισμα και έχουμε

$$S(f, \chi_c, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(\chi_c(x_k) - \chi_c(x_{k-1})) =$$
$$f(z_k)(\chi_c(x_k) - \chi_c(x_{k-1})) + f(z_{k+1})(\chi_c(x_{k+1}) - \chi_c(x_k)) = f(z_k) - f(z_{k+1}).$$

Λόγω συνέχειας της f στο c έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} S(f, \chi_c, P_n) = 0$. Μπορείτε να δείτε σαν άσκηση τις άλλες δύο περιτπώσεις.

$\square$

Παρακάτω θα δώσουμε ένα θεώρημα το οποίο είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 2 *Εστω ότι οι f, g, g' είναι συνεχείς στο διάστημα I. Τότε το $\int_a^b f(x) dg(x)$ υπάρχει και ισχύει*

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Σημειώστε ότι το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει και την ύπαρξη του ολοκληρώματος κάτω από αυτές τις συνθήκες. Επίσης, είναι πολύ χρήσιμο για υπολογισμούς τέτοιων ολοκληρωμάτων, διότι μπορούμε έτσι να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές ολοκλήρωσης για το ολοκλήρωμα Riemann.

Άλλο ένα χρήσιμο θεώρημα είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 3 *Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς g στο διάστημα I. Έστω $h(t)$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $J = [c, d]$ με $h(c) = a, h(d) = b$. Ορίζουμε $F(t) = f(h(t)), G(t) = g(h(t))$. Τότε η F είναι ολοκληρώσιμη ως προς την G στο J και*

$$\int_c^d F(t) dG(t) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Ακόμη ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 4 *Αν υπάρχει το $\int_a^b fdg$, τότε υπάρχει και το $\int_a^b gdf$ και ισχύει*

$$\int_a^b gdf = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b fdg.$$

Έτσι, αν γνωρίζουμε με κάποιον τρόπο ότι υπάρχει το ένα ολοκλήρωμα τότε γνωρίζουμε από το προηγούμενο θεώρημα ότι υπάρχει και το άλλο. Τέλος, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός, πολύ εύκολα υπολογίζουμε και την τιμή του άλλου.

Πρόταση 1 *Έστω ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b fdg$ υπάρχει και έστω $[c,d] \subseteq [a,b]$. Τότε υπάρχει και το $\int_c^d fdg$. Επίσης, αν $c \in [a,b]$ τότε ισχύει το εξής*

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg.$$

Όμως, αν υπάρχουν τα $\int_a^c fdg, \int_c^b fdg$ δεν σημαίνει ότι υπάρχει και το $\int_a^b fdg$.

Παράδειγμα 2 *Έστω $I = [0,2]$ και $f(x) = 0$ όταν $x \in [0,1]$ και $f(x) = 1$ όταν $x \in (1,2]$. Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση g τ.ω. $g(x) = 0$ όταν $x \in [0,1)$ και $g(x) = 1$ όταν $x \in [1,2]$. Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στο c. Θα δείξουμε ότι τα $\int_0^1 fdg$ και $\int_1^2 fdg$ υπάρχουν αλλά δεν υπάρχει το $\int_0^2 fdg$.*

Ξεκινώντας από το $\int_0^1 fdg$, κατασκευάζουμε μια διαμέριση $P_n = \{x_0, ..., x_n\}$ με $x_0 = 0$, $x_n = 1$. Αφού κατασκευάσουμε το άθροισμα Riemann βλέπουμε πολύ εύκολα ότι είναι ίσο με το μηδέν.

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και για το ολοκλήρωμα $\int_1^2 fdg$ και διαπιστώνουμε επίσης ότι είναι ίσο με το μηδέν.

Ας δούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int_0^2 fdg$. Κατασκευάζουμε μια διαμέριση P_n τ.ω. $1 \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάποιο k. Σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann και έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(g(z_i) - g(z_{i-1})) = f(z_k)(g(x_k - g(x_{k-1})) = f(z_k)g(x_k),$$

όπου το $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ τυχαία επιλεγμένο. Αν επιλέξω το $z_k \leq 1$ τότε $f(z_k) = 0$ και άρα το ίδιο και το άθροισμα. Αν όμως επιλέξω $z_k > 1$ τότε $f(z_k) = 1$ και επομένως το άθροισμα Riemann είναι ίσο με $g(x_k) \to g(1) = 1$ καθώς $n \to \infty$. Άρα για δύο διαφορετικές ακολουθίες διαμερίσεων έχω διαφορετικό αποτέλεσμα. Επομένως το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

□

2 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε ορισμούς και θεωρήματα που αφορούν τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης. Αυτές οι συναρτήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στα ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes.

Έστω, $I = [a,b]$ ένα διάστημα και P_n μια οποιαδήποτε διαμέριση του I. Έστω μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Για κάθε πιθανή διαμέριση ορίζουμε το παρακάτω άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Διαλέγουμε το μέγιστο από αυτά τα αθροίσματα και το συμβολίζουμε με $V_a^b f$. Προφανώς, αυτός ο αριθμός είναι πάντα θετικός ή μηδέν. Αν για κάποια συνάρτηση είναι πεπερασμένος τότε λέμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης.

Παράδειγμα 3 *Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο I. Τότε $V_a^b f = f(b) - f(a)$ και άρα είναι φραγμένης κύμανσης. Το ίδιο ισχύει αν η f είναι φθίνουσα.*

Πράγματι, έστω P_n μια διαμέριση του I. Τότε

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Το απόλυτο φεύγει διότι η ποσότητα μέσα είναι θετική αφού η f είναι αύξουσα. Παρόμοια και στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα. Άρα, κάθε μονότονη συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης. □

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα για τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.

Θεώρημα 5 *Έστω ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης στο I. Τότε υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις g, h στο I τ.ω.*

$$f(x) = g(x) - h(x), \text{ για κάθε } x \in I.$$

Σημειώστε ότι οι συναρτήσεις g, h δεν είναι μοναδικές.

Άλλο ένα θεώρημα το οποίο μας βοηθά όχι μόνο να αποφασίζουμε αν μια f είναι φραγμένης κύμανσης, αλλά να βρίσκουμε και την τιμή της.

Θεώρημα 6 *Έστω ότι f, f' είναι συνεχείς στο I. Τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης και μάλιστα*

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Προφανώς αν η f' είναι φραγμένη τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης. Επίσης ισχύει και ότι αν μια συνάρτηση f είναι φραγμένης κύμανσης τότε αναγκαστικά είναι φραγμένη (δείξτε το).

Όμως, μια συνάρτηση μπορεί να είναι φραγμένης κύμανσης χωρίς να έχει φραγμένη παράγωγο στο I. Για παράδειγμα η $f(x) = x^{2/3}$ στο $[0, 1]$ είναι φραγμένης κύμανσης διότι είναι αύξουσα αλλά δεν έχει φραγμένη παράγωγο εκεί.

Παρόλα αυτά ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7 *Έστω f συνεχής στο I. Τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο αύξουσων συναρτήσεων.*

Παράδειγμα 4 *Έστω $f(x) = \sin^2 x$ στο $[0, \pi]$. Να υπολογισθεί το $V_0^\pi f$.*

θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6. Επομένως έχουμε

$$V_0^\pi f = \int_0^\pi |f'(x)| dx = \int_0^\pi |2 \sin x \cos x| dx =$$
$$\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \sin x \cos x dx = 2.$$

□

Θεώρημα 8 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε η συνάρτηση ολικής κύμανσης της f, δηλαδή η $v_f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $v_f(x) = V_a^x(f)$ είναι αύξουσα καθώς επίσης και η $v_f - f$.*

3 Το ολοκλήρωμα Darboux-Stieltjes

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε ένα παρόμοιο ολοκλήρωμα με το προηγούμενο αλλά θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση g είναι αύξουσα και ότι η f είναι φραγμένη. Έστω λοιπόν δύο τέτοιες συναρτήσεις και $I = [a, b]$ ένα διάστημα. Θεωρούμε μια κανονική ακολουθία διαμερίσεων P_n του I. Συμβολίζουμε με $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Σχηματίζουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux,

$$L(f, g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

$$U(f, g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε πιθανή ακολουθία κανονικών διαμερίσεων P_n τα αθροίσματα Darboux συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό λ. Τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς g και τον αριθμό λ τον ονομάζουμε Darboux-Stieltjes ολοκλήρωμα.

Για το ολοκλήρωμα Darboux-Stieltjes ισχύουν τα ίδια Θεωρήματα με το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes, με την διαφορά ότι οι σταθερές πρέπει να είναι θετικές, αλλά μπορούμε να πούμε και κάτι επιπλέον.

Θεώρημα 9 *Έστω f_1, f_2 ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ως προς την g στο διάστημα $[a, b]$ και έστω $f_1 \le f_2$. Τότε ισχύει ότι*

$$\int_a^b f_1 dg \le \int_a^b f_2 dg,$$

$$|\int_a^b f_1 dg| \le \int_a^b |f_1| dg.$$

Παρατήρηση 1 *Το αντίστοιχο αποτέλεσμα (με το προηγούμενο) για το RS ολοκλήρωμα είναι το εξής,*

$$|\int_a^b f dg| \le \int_a^b |f| dv_f,$$

$$|\int_a^b f dg| \le V_a^b(f) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

όσον αφορά μόνο το δεύτερο σκέλος του προηγούμενου Θεωρήματος.

Θεώρημα 10 *Υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας στο $[a, b]$ και ότι η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f. Τότε το ολοκλήρωμα Darboux-Stieltjes ορίζεται. Όμως αν οι f, g έχουν κοινό σημείο ασυνέχειας, δηλαδή αν και οι δύο είναι από τα αριστερά ασυνεχείς (ή από τα δεξιά) στο ίδιο σημείο, τότε δεν ορίζεται το DS ολοκλήρωμα.*

Θεώρημα 11 *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση, $f : [a, b] \to [m, M]$ φραγμένη συνάρτηση και $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ στο $[a, b]$, τότε η σύνθεση $g(f(x))$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς την ϕ στο $[a, b]$.*

Τα επόμενα δύο Θεωρήματα συγκρίνουν τα δυο ολοκληρώματα.

Θεώρημα 12 *Έστω f φραγμένη στο I και g είναι αύξουσα στο I. Αν το RS $\int_a^b f dg$ υπάρχει τότε υπάρχει και το DS $\int_a^b f dg$ και είναι ίσα.*

Θεώρημα 13 *Έστω f φραγμένη στο I και g αύξουσα εκεί. Αν οι f, g δεν έχουν κοινό σημείο ασυνέχειας, τότε αν υπάρχει το DS $\int_a^b fdg$ υπάρχει και το RS $\int_a^b fdg$ και είναι ίσα.*

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης με το ολοκλήρωμα *Riemann–Stieltjes*.

Θεώρημα 14 *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο I και ότι η g είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε το RS $\int_a^b fdg$ υπάρχει και από το Θεώρημα 4 γνωρίζουμε ότι υπάρχει και το RS $\int_a^b gdf$.*

Παράδειγμα 5 *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 fdg$ όταν $f(x) = x^2$ και $g(x) = [x]$ καθώς και το ολοκλήρωμα $\int_0^2 gdf$.*

Πράγματι, από το προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^2 fdg$ υπάρχει, διότι η f είναι συνεχής και η g είναι φραγμένης κύμανσης στο $[0, 2]$ (υπολογίστε την κύμανση της g και δείξτε έτσι ότι είναι φραγμένης κύμανσης). Άρα υπάρχει και το $\int_0^2 gdf$.

Ας υπολογίσουμε το πρώτο. Από την Πρόταση 1 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν και τα ολοκληρώματα $\int_0^1 fdg$, $\int_1^2 fdg$ και μάλιστα το άθροισμα τους είναι ίσο με το ζητούμενο. Θα υπολογίσουμε λοιπόν το καθένα χωριστά.

Κατασκευάζουμε το άθροισμα Riemann για το πρώτο ολοκλήρωμα.

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)([x_k] - [x_{k-1}]) = f(z_n),$$

με $z_n \in [x_{n-1}, 1]$ (δείξτε το). Άρα, καθώς το $n \to \infty$ έχουμε ότι $f(z_n) \to f(1) = 1$ λόγω συνέχειας της f.

Παρόμοια υπολογίζουμε το $\int_1^2 fdg = 4$. Άρα το $\int_0^2 fdg = 5$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4 έχουμε ότι το $\int_0^2 gdf = 3$ (δείξτε το).

□

Παράδειγμα 6 *Να υπολογισθεί με δύο τρόπους το ολοκλήρωμα $\int_a^b x^2 d(\ln x)$.*

Καταρχήν το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται διότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς (Θεώρημα 10).

Ο πρώτος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2 του οποίου οι προυποθέσεις ικανοποιούνται. Επομένως έχουμε

$$\int_a^b x^2 d(\ln x) = \int_a^b x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Ο δεύτερος τρόπος θα είναι να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3. Σκοπός μας είναι να βρούμε μια $h(t)$ συνεχή και αύξουσα τ.ω. $g(h(t)) = t$ ώστε το ολοκλήρωμα να αναχθεί σε κλασικό Riemann ολοκλήρωμα. Μια τέτοια συνάρτηση βέβαια θα είναι η αντίστροφη της g η οποία είναι η $h(t) = e^t$. Επομένως έχουμε

$$\int_a^b x^2 d(\ln x) = \int_{\ln a}^{\ln b} e^{2t} dt = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Επίσης σε άλλες περιπτώσεις ίσως να βολεύει να διαλέξει κανείς την h να είναι η αντίστροφη της f και να χρειαστεί τότε και το Θεώρημα 4. Δηλαδή ως ολοκληρωτέα ποσότητα θα εμφανιστεί η συνάρτηση $f(h(t)) = t$ και με την χρήση του Θεωρήματος 4 θα αλλάξουν οι ρόλοι και θα έχουμε και πάλι ένα κλασικό Riemann ολοκλήρωμα.

□

Παράδειγμα 7 *Ορίζουμε την συνάρτηση $I(x) = 0$ όταν $x \leq 0$ και ίση με την 1 αλλιώς. Έστω τώρα $s \in (a, b)$ και f συνεχής στο s. Να δειχθεί ότι $\int_a^b f(x)dI(x-s) = f(s)$.*

Η συνάρτηση $I(x-s)$ είναι αύξουσα και ασυνεχής στο s όπου όμως η f είναι συνεχής εκεί. Άρα από τα Θεωρήματα 10 και 113 έχουμε ότι το $\mathrm{RS}\int_a^b f(x)dI(x-s)$ υπάρχει.

Έστω μια διαμέριση $P_n = \{x_0, ..., x_n\}$ με $x_0 = a, x_n = b$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι να έχουμε $x_k \neq s$, όπου x_k είναι τα σημεία της διαμέρισης. Η δεύτερη περίπτωση είναι να υπάρχει κάποιο k τ.ω. $x_k = s$. Θα κάνουμε την πρώτη περίπτωση και η δεύτερη αφήνεται σαν άσκηση.

Κατασκευάζουμε το άθροισμα Riemann. Έστω λοιπόν ότι $s \in (x_{k-1}, x_k)$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(I(x_i - s) - I(x_{i-1} - s)) = f(z_k)(I(x_k - s) - I(x_{k-1} - s)) = f(z_k),$$

με $z_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Επομένως λόγω συνέχειας της f στο s έχουμε ότι $f(z_k) \to f(s)$ καθώς $n \to \infty$.

$\square$

Μπορεί να δειχθεί και το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 15 *Έστω μια ακολουθία $\{c_n\}$ με $c_n \geq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. Έστω μια ακολουθία s_n διακεκριμμένων σημείων του (a, b) και έστω $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$ με $x \in [a, b]$. Τότε αν f συνεχής στο $[a, b]$ ισχύει*

$$\int_a^b f dg = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n).$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 16 *Έστω g φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$ και έστω f ολοκληρώσιμη ως προς g. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f dg,$$

με $x \in [a, b]$. Τότε έχουμε

(ι) F είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$,

(ιι) Κάθε σημείο συνέχειας της g είναι και σημείο συνέχειας της F,

(ιιι) Αν g είναι αύξουσα στο $[a, b]$, τότε υπάρχει η παράγωγος της F σε κάθε σημείο όπου υπάρχει και η παράγωγος της g και ισχύει ότι $F^{'}(x) = f(x)g^{'}(x)$.

Οι περισσότερες αποδείξεις των Θεωρημάτων υπάρχουν στα επόμενα βιβλία, όπου μπορεί κανείς να βρεί και κάποια ακόμη παραδείγματα καθώς και άλυτες ασκήσεις.

Αναφορές

[1] T. Apostol, *Mathematical Analysis*, second edition, Addison-Wesley, 1974.

[2] N. Haaser-J. Sullivan, *Real Analysis*, 1971.

[3] Σ. Νεγρεπόντης - Σ. Γιωτόπουλος - Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός Ι* εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, 1988.

[4] W. Rudin *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Leader Books, 2000.