Πρώτο Φυλλάδιο Εργασίας
Διαφορικές Εξισώσεις
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Μελετήστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών όσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Εάν υπάρχει μοναδική λύση υπολογίστε τη (με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών). Στην συνέχεια επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας.

(i) $y^{'} = \frac{x}{y^2}, y(0) = 1$

(ii) $y^{'} = y^2x^3, y(1) = 2$

(iii) $y^{'} = \frac{x^2+2}{y}, y(1) = -2.$

Δεύτερο Θέμα

Μελετήστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών όσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Εάν υπάρχει μοναδική λύση υπολογίστε τη (ως γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης). Στην συνέχεια επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας.

(i) $y^{'} - 3y = 6, y(2) = -1$

(ii) $y^{'} + y = \sin x, y(0) = 0,$

(iii) $y' - \frac{3}{x}y = x^4, y(1) = 1$

Τρίτο Θέμα

Μελετήστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών όσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Εάν υπάρχει μοναδική λύση υπολογίστε τη (ως εξισώσεις Bernoulli). Στην συνέχεια επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας.

(i) $y^{'} + xy = xy^2, y(0) = 1,$

(ii) $y^{'} - \frac{3}{x}y = x^4y^{\frac{1}{3}}, y(1) = 2,$

(iii) $y^{'} + xy = 6x\sqrt{y}, y(0) = 0,$

(iv) $y^{'} + \frac{1}{t-2}y = 7(t-2)^2\sqrt{y},\ y(3) = 1$

Σημειώστε ότι μια προφανής λύση της Bernoulli είναι η μηδενική συνάρτηση.

Τέταρτο Θέμα

Μελετήστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών όσον αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Εάν υπάρχει μοναδική λύση υπολογίστε τη (ως εξισώσεις Riccati δοκιμάζοντας ως ειδική λύση την $y_1(x) = ax^b$ για κατάλληλα $a, b \in \mathbb{R}$). Στην συνέχεια επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας.

(i) $y^{'} + 2y^2 = \frac{6}{x^2}, y(1) = 2$

(ii) $y^{'} = 1 + x^2 - 2xy + y^2, y(1) = 1$

(iii) $y^{'} = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, y(1) = 2$

Σημειώστε ότι η ειδική λύση μπορεί να μην περιέχεται στην «γενική λύση» που θα υπολογίσετε, όποια επιλογή της σταθεράς και αν κάνετε. Παρόλα αυτά είναι μια λύση της διαφορικής και ενδέχεται να είναι και η ζητούμενη μοναδική λύση! Συνεπώς το σωστό θα είναι να λέμε ότι όλες οι λύσεις είναι η οικογένεια συναρτήσεων $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}$ και η $y_1(t)$. Η μοναδική λύση θα βρεθεί είτε από την οικογένεια λύσεων (με κατάλληλη επιλογή σταθεράς) είτε θα είναι η ειδική λύση $y_1(t)$. Με ποιο συμπαγή τρόπο μπορούμε να γράψουμε ότι όλες οι λύσεις δίνονται από την οικογένεια συναρτήσεων $y(t) = y_1(t) + \frac{c_1}{z(t)}$ με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς c_1 (σημειώστε ότι και η $z(t)$ θα περιέχει ακόμη μια ελεύθερη παράμετρο).