

Πρώτο Φυλλάδιο Εργασίας Στοχαστικές Διαδικασίες (ΠΜΣ)

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών
Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

- (1) Λύστε την Άσκηση 9 των σημειώσεων.
- (2) Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος και $B \in \mathcal{F}$ με $\mathbb{P}(B) > 0$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $A \rightarrow \mathbb{P}(A|B)$ είναι μέτρο πιθανότητας στο παραπάνω μετρήσιμο χώρο για κάθε $A \in \mathcal{F}$.
- (3) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.
- (4) Έστω (Ω, \mathcal{F}) μετρήσιμος χώρος και $A \subseteq \Omega$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση \mathbb{I}_A είναι τυχαία μεταβλητή στο παραπάνω μετρήσιμο χώρο αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.
- (5) Αποδείξτε το Λήμμα 51 και το θεώρημα 81 των σημειώσεων
- (6) Αποδείξτε την Πρόταση 100 και το Πόρισμα 103 των σημειώσεων.
- (7) Αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ υπολογίστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της με τον παρακάτω τρόπο:

$$\Psi_X(u) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ (εξηγήστε το)}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας κατά μέλη ως προς u καταλήγουμε σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Εξηγήστε γιατί η παράγωγος περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα. Διατυπώστε το κατάλληλο θεώρημα και δώστε την απόδειξή του.

- (8) Υπολογίστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λ .