Νικος Χαλιδιας
Μαθηματικό Τμήμα
κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστημιο Αιγαιου

Θεωρημα 1 *Έστω $s \in S$ μια οποιαδήποτε κατάσταση μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε η αλυσίδα είναι μεταβατική* **αν και μόνο αν** *υπάρχει μια μη μηδενική λύση $\{y_i : i \neq s\}$ του συστήματος*

$$y_i = \sum_{j \neq s} P_{ij} y_j, \quad i \neq s$$

τέτοια ώστε $|y_j| \leq 1$ για κάθε $j \neq s$.

Αποδειξη. Διαλέγουμε μια κατάσταση $s \in S$. Τότε η αλυσίδα θα είναι μεταβατική αν και μόνο αν η s είναι μεταβατική.

Έστω ότι η s είναι μεταβατική. Ορίζουμε τις πιθανότητες

$$\tau_i(n) = P(X_m \neq s,\ 1 \leq m \leq n | X_0 = i)$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tau_i(n) = \sum_{j \neq s} P_{ij}, \quad \tau_i(n+1) = \sum_{j \neq s} P_{ij} \tau_j(n)$$

και επίσης $\tau_i(n) \geq \tau_i(n+1)$. Άρα

$$\tau_i = \lim_{n \to \infty} \tau_i(n) = P(X_m \neq s,\ 1 \leq m \leq \infty | X_0 = i) = 1 - f_{is}$$

Από την σχέση

$$\tau_i(n+1) = \sum_{j \neq s} P_{ij} \tau_j(n)$$

λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ έχουμε ότι

$$\tau_i = \sum_{j \neq s} P_{ij} \tau_j, \quad i \neq s$$

Πράγματι, αν $F \subseteq$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του S που δεν περιέχει το s τότε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\neq s}P_{ij}\tau_j(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in F}P_{ij}\tau_j(n)+\lim_{n\to\infty}\sum_{j\notin F}P_{ij}\tau_j(n)$$

Όμως

$$0\leq\sum_{j\notin F}P_{ij}\tau_j(n)\leq\sum_{j\notin F}P_{ij}\to 0 \text{ καθώς } F\uparrow S$$

Άρα το σύστημα εξισώσεων έχει μια λύση τέτοια ώστε $\tau_i \leq 1$ και μένει να αποδείξουμε ότι είναι μη μηδενική. Πράγματι, $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$ αλλιώς $f_{is} = 1$ για κάθε $i \neq s$ και συνεπώς

$$f_{ss}=P_{ss}+\sum_{j\neq s}P_{si}f_{is}=\sum_{i\in S}P_{si}=1$$

το οποίο σημαίνει ότι η s είναι επαναληπτική. Αυτό είναι άτοπο άρα $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$ και επομένως η λύση αυτή του συστήματος θα είναι μη μηδενική.

Αντίστροφα, αν y_i είναι μια μη μηδενική λύση του συστήματος τέτοια ώστε $|y_i| \leq 1$ τότε

$$\begin{aligned}
|y_i| &\leq \sum_{j\neq s}P_{ij}|y_j|\leq\sum_{j\neq s}P_{ij}=\tau_i(1)\\
&\vdots\\
|y_i| &\leq \sum_{j\neq s}P_{ij}\tau_j(n)=\tau_i(2)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Δηλαδή $|y_i| \leq \tau_i(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το οποίο σημαίνει ότι $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι η s είναι μεταβατική αφού η υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την s, να επισκεφθεί την i και έπειτα να μην επιστρέψει ποτέ στην s. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Αν το σύστημα*

$$\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}y_j\leq y_i, \qquad \textit{για } i>0$$

έχει μια λύση y_i *τέτοια ώστε* $y_i \to \infty$ *καθώς* $i \to \infty$ *τότε η αλυσίδα είναι επαναληπτική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν τα y_i ικανοποιούν το σύστημα αυτό τότε και τα $z_i = y_i + b$ όπου $b > 0$ επίσης ικανοποιούν το ίδιο σύστημα συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι $y_i \geq b > 0$ για κάθε $i \geq 1$.

Εφόσον τα y_i ικανοποιούν το σύστημα αυτό τότε και

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^m y_j \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Διαλέγουμε ένα $M > 0$ και γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{ij}^m y_j + \sum_{j=M}^{\infty} P_{ij}^m y_j \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Αφού $y_i \geq b > 0$ τότε

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{ij}^m y_j + \min_{r \geq M}\{y_r\} \sum_{j=M}^{\infty} P_{ij}^m \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Ξεχωρίζουμε δυο περιπτώσεις. Η μια περίπτωση είναι όταν $P_{i0} = 1$ για κάθε $i > 0$. Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική διότι αν ήταν μεταβατική τότε θα έπρεπε να υπήρχε μη μηδενική λύση (δες Θεώρημα 1) για το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j = y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Η μοναδική λύση του συστήματος αυτού όμως είναι η μηδενική συνεπώς η αλυσίδα είναι επαναληπτική.

Η άλλη περίπτωση είναι όταν υπάρχει $i^* > 0$ τέτοιο ώστε $P_{i^*0} < 1$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{i^*j}^m y_j + \min_{r \geq M}\{y_r\} \left(1 - P_{i^*0} - \sum_{j=1}^{M-1} P_{i^*j}^m\right) \leq y_{i^*} \tag{1}$$

Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{m\to\infty} P_{ij}^m = 0 \quad (\text{δες Θεώρημα } \mathbf{;;})$$

Λαμβάνουμε το όριο στην 1 καθώς $m \to \infty$ και έχουμε

$$\min_{r\geq M}\{y_r\}(1 - P_{i^*0}) \leq y_{i^*}$$

δηλαδή

$$\min_{r\geq M}\{y_r\} \leq \frac{y_{i^*}}{1 - P_{i^*0}} \tag{2}$$

Εφόσον $y_i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ τότε

$$\min_{r\geq M}\{y_r\} \to \infty \quad \text{καθώς } M \to \infty$$

το οποίο είναι άτοπο διότι το δεξί μέλος της 2 είναι ανεξάρτητο του M. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική. □

Παράδειγμα 3 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$ και $X_0 = i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω. $P_{i,i-1} = q$, $P_{i,i+1} = p$ για $i \geq 1$ ενώ $P_{00} = q$ και $P_{01} = p$ με $p + q = 1$ και $pq \neq 0$.*

Διαλέγουμε $s = 0$ και σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$y_i = \sum_{j\neq 0} P_{ij} y_j, \quad i \neq 0$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned} y_1 &= p y_2 \\ y_i &= p y_{i+1} + q y_{i-1}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών

$$y_i = p y_{i+1} + q y_{i-1}, \quad i \geq 2$$

έχει ως γενική λύση (δηλαδή όλες οι πιθανές λύσεις είναι αυτής της μορφής) την

$$y_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad i \geq 2$$

όταν $p \neq q$. *Στην προκειμένη περίπτωση η λύση είναι*

$$y_n = py_1 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{p - q}$$

Όταν $p = q$ *τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι* $y_n = ny_1$.

$\cdot$ *Αν* $q < p$ *διαλέγουμε το* y_1 *κατάλληλα έτσι ώστε* $|y_n| \leq 1$ *για* $n \geq 1$. *Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι μεταβατική.*

$\cdot$ *Αν* $q > p$ *είναι προφανές ότι η μοναδική φραγμένη λύση της εξίσωσης διαφορών είναι επιλέγοντας* $y_1 = 0$ *δηλαδή η μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι η αλυσίδα δεν είναι μεταβατική (άρα είναι επαναληπτική) διότι αλλιώς θα μπορούσαμε να βρούμε φραγμένη μη μηδενική λύση της εξίσωσης διαφορών.*

$\cdot$ *Αν* $p = q$ *τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η* $y_n = ny_1$. *Συνεπώς δεν υπάρχει μη μηδενική και φραγμένη λύση της εξίσωσης διαφορών άρα η αλυσίδα είναι επαναληπτική.*

Στις περιπτώσεις $q > p$ *και* $q = p$ *μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης το θεώρημα 2 για να βγάλουμε το ίδιο συμπέρασμα.*