Τέταρτο Φυλλάδιο Εργασίας
Διαφορικές Εξισώσεις
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Θέμα 1*****

Δώστε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης $f(t)$. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τι σημαίνει η ιδιότητα αυτή για την συνάρτηση f σε σχέση με τον μετασχηματισμό της κατά Fourier; Έστω μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$. Μετασχηματίζεται η f κατά Fourier και γιατί; Μπορείτε να δικαιολογήσετε (χρησιμοποιώντας εργαλεία γραμμικής άλγεβρας) το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφός του είναι επίσης γραμμικός μετασχηματισμός;

Θέμα 2*****

Μετασχηματίστε κατά Fourier τις παρακάτω συναρτήσεις

(i) $f(t) = e^{-a|t|}$, για $a > 0$,

(ii) $f(t) = e^{-at^2}$, για $a > 0$,

(iii) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$, για $\sigma > 0$,

(iv) $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$

Για την δεύτερη συνάρτηση χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ (δείτε άσκηση 413 του βιβλίου). Για την τρίτη συνάρτηση χρησιμοποιήστε κατάλληλα το αποτέλεσμα της δεύτερης.

Ο πίνακας 3.1 στην σελίδα 523 του βιβλίου περιέχει 6 συναρτήσεις και τους μετασχηματισμούς τους. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 788 μπορείτε να διπλασιάσετε τον πίνακα αυτό;

Θέμα 3*****

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διακύμανση σ^2. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier $F(s)$ της συνάρτησης πυκνότητας. Στην συνέχεια μελετήστε την παρατήρηση 774 του βιβλίου. Διαπιστώστε ότι

$$F^{(k)}(s) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) e^{-ist} dt$$

όπου $F^{(k)}(s)$ είναι η k παράγωγος της $F(s)$. Επομένως

$$F^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) dt$$

Με βάση τα παραπάνω, πως μπορεί κανείς να υπολογίσει ροπές της X (δηλαδή τις $\mathbb{E}(X^k)$;) Υπολογίστε με τον παραπάνω τρόπο την $\mathbb{E}(X)$ και $var(X)$.

Θέμα 4****

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{array}{lcllll} u_t & = & ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, & k > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), & x \in \mathbb{R} & & \\ u(x,t) \text{ φραγμένη και } u_x(x,t) & \to & 0 & \text{καθώς} & |x| \to \infty & \end{array}$$

Αποδείξτε ότι έχει μοναδική λύση (ύπαρξη και μοναδικότητα).

Θέμα 5***

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{array}{lcll} u_{tt} & = & c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & g(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι f, g είναι αρκετά ομαλές. Θεωρείστε την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x - ct$ και $\phi = x + ct$ επομένως $x = \frac{\xi+\phi}{2}, t = \frac{\phi-\xi}{2c}$, οπότε $u(x,t) = u\left(\frac{\xi+\phi}{2}, \frac{\phi-\xi}{2c}\right)$. Αποδείξτε ότι $u_{\xi\phi} = 0$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας (δείτε θεώρημα 405 του βιβλίου). Στην συνέχεια αποδείξτε ότι η λύση της εξίσωσης $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ έχει την μορφή

$$u(x,t) = K(x+ct) + L(x-ct)$$

όπου $K(\cdot)$ και $L(\cdot)$ αυθαίρετες συναρτήσεις. Τέλος αποδείξτε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση η οποία είναι η

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(r)dr, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Θέμα 6**

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{array}{llll} u_{xx} + u_{yy} & = & 0, & x \in \mathbb{R}, \qquad y > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(x,y) & \to 0 & u_x(x,y), u_y(x,y) \text{ φραγμένες} & \text{καθώς } |x|, |y| \to \infty \end{array}$$

Αποδείξτε ότι έχει μοναδική λύση (ύπαρξη και μοναδικότητα).

Θέμα 7***

Έστω η εξίσωση Black-Scholes

$$V_t(t,S) + rSV_s(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{ss}(t,S) - rV(t,S) = 0, \; t \in [0,T], \; S > 0 \tag{1}$$

Δώστε τους κατάλληλους μετασχηματισμούς έτσι ώστε να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας.

Θέμα 8***

Δώστε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι εκθετικής τάξης $a > 0$; Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^k$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι είναι εκθετικής τάξης $a > 0$ για οποιοδήποτε $a > 0$ και οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^k}{e^{ax}}$ και αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο $x_0 \geq 0$ τ.ω. η g να είναι φθίνουσα για όλα τα $x \geq x_0$ και μάλιστα συγκλίνει στο μηδέν καθώς $x \to \infty$. Ως συνεχής συνάρτηση η g λαμβάνει μέγιστο στο διάστημα $[0, x_0]$ και επειδή είναι φθίνουσα «τελικά» (δηλαδή για μεγάλα x) έπεται ότι είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$). Τέλος υπολογίστε (ίσως χρειαστεί επαγωγή) τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = t^k$.

Θέμα 9**

Πως ορίζεται η συνάρτηση Γ και πως η συνάρτηση B; Ποια είναι η ιδιότητα της συνάρτησης Γ σε σχέση με το $n!$ και τέλος αποδείξτε την σχέση $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Θέμα 10**

Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, μη ομογενής και με μη σταθερούς συντελεστές,

$$y^{''} + ty^{'} - 2y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y^{'}(0) = 0$$

Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό Laplace για να υπολογίσετε την λύση του προβλήματος. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα.

Θέμα 11**

Αποδείξτε (χρησιμοποιώντας εργαλεία Απειροστικού Λογισμού) ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Στην συνέχεια υπολογίστε το όριο της σειράς χρησιμοποιώντας σειρές Fourier. Τέλος αποδείξτε ότι

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \qquad \text{(Γινόμενο Wallis)}$$

Θέμα 12*

Επιλύστε το παρακάτω παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{array}{rcll} u_t(0,t) & = & 1.14u_{xx}, & x \in [0,1], \quad t > 0 \\ u(0,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u_x(1,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(x,0) & = & -x^2 + 2x, & x \in [0,1] \end{array}$$

Θέμα 13*

Υπολογίστε την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης $y^{'} + \frac{1}{t-2} y = 7(t-2)^2 \sqrt{y}$, $y(3) = 1$. Στην συνέχεια εφαρμόστε την μέθοδο του Euler για να προσεγγίσετε την λύση στο διάστημα $[0, 1]$. Εφαρμόστε την μέθοδο του Euler με βήμα $h = \frac{1}{4}$ και $h = \frac{1}{8}$. Συγκρίνετε τα προσεγγιστικά αποτελέσματα με την πραγματική τιμή της λύσης στο σημείο $x = 1$.

Θέμα 14*

Επιλύστε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$ku_x + lu_t + mu = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

όπου $u(x,t)$ η άγνωστη συνάρτηση και $k, l, m \in \mathbb{R}$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί.