Τρίτο Φυλλάδιο Εργασίας
Διαφορικές Εξισώσεις
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους πίνακες e^{tA} και A^n. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί, εν γένει, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το ελάχιστο πολυώνυμο αντί του χαρακτηριστικού για τον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα ή για τον υπολογισμό του e^{tA}; Μπορείτε να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο χωρίς να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο;

Δεύτερο Θέμα

Έστω οι ακολουθίες $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$ οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= y_1(n) \\ y_2(n+1) &= 0.6y_1(n) + 0.4y_2(n) \\ y_3(n+1) &= 0.6y_2(n) + 0.4y_3(n) \end{aligned}$$

καθώς και τις αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_3(0) = 0$. Να υπολογισθούν οι ακολουθίες $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$.

Τρίτο Θέμα

Υπολογίστε την ακολουθία $y(n)$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$
$$y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = -1$$

Τέταρτο Θέμα

Έστω $p, q > 0$ και τέτοια ώστε $p + q = 1$. Θεωρείστε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$h_i = ph_{i+1} + qh_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

όπου h_i μια ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι η γενική λύση (δηλαδή χωρίς αρχικές συνθήκες) της εξίσωσης διαφορών όταν $p \neq q$ είναι η $h_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$, για $i = 0, 1, 2, \cdots$. Ενώ όταν $p = q$ η γενική λύση είναι η $h_i = A + Bi$, για $i = 0, 1, 2, \cdots$, όπου $A, B \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές. (Υπόδειξη: Η παραπάνω εξίσωση διαφορών γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$h_{i+2} - \frac{1}{p}h_{i+1} + \frac{q}{p}h_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτής της εξίσωσης διαφορών, όταν $p \neq q$, έχει τις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \frac{q}{p}$ ως ρίζες. Στην περίπτωση $p = q$ έχει την $\lambda = 1$ ως ρίζα πολλαπλότητας δυο).