ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ – ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ

<u>ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ</u>: 2013 – 2014 (Β Πρόοδος)
<u>ΜΑΘΗΜΑ</u>: Πιθανότητες ΙΙ
<u>ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ</u>: Σπυρίδων Ι. Χατζησπύρος – Χρίστος Μέρκατας

<u>Θέμα 1ο [4.0]</u>

Δίνονται οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}(x,y)$ και με περιθώριες πυκνότητες $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ αντιστοίχως. Εάν T είναι ο μετασχηματισμός

$$T:\begin{Bmatrix} Z = X - Y \\ W = X \end{Bmatrix}$$

1. [1.5] Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. Z και W.
2. [2.5] Εάν X και Y ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες σαν $N(0,1)$, να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. $Z = X - Y$.

1. $T^{-1}:\begin{Bmatrix} X = W \\ Y = W - Z \end{Bmatrix} \Rightarrow f_{W,Z}(w,z) = f_{X,Y}(w,w-z)\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = f_{X,Y}(w,w-z)$.

2. $f_Z(z) = \int_{w=-\infty}^{\infty} N(w\,|\,0,1)\,N(w-z\,|\,0,1)\,dw = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{w=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2w^2-2zw\right)\right\}dw$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{4}}\int_{w=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(w-\frac{z}{2}\right)^2\right\}dw.$$

Επειδή

$$N\left(w\,|\,\frac{z}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(w-\frac{z}{2}\right)^2\right\} \Leftrightarrow \exp\left\{-\left(w-\frac{z}{2}\right)^2\right\} = \sqrt{\pi}N\left(w\,|\,\frac{z}{2},\frac{1}{2}\right)$$

έχουμε ότι

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}\int_{w=-\infty}^{\infty}N\left(w\,|\,\frac{z}{2},\frac{1}{2}\right)dw = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\cdot 2}z^2} = N(z\,|\,0,2).$$

<u>Θέμα 2ο [3.0]</u>

1. [1.5] Να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$ της τ.μ. $X \sim Bin(n,p)$
2. [1.5] Δείξτε ότι εάν οι τ.μ. X_i για $1 \le i \le n$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ακολουθούν την *Bernoulli* με πιθανότητα επιτυχίας p, δηλαδή $X_i \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p)$, τότε ισχύει ότι $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$.

1. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left\{e^{itX}\right\} = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^{it}\right)^x(1-p)^{n-x} = \left(pe^{it}+1-p\right)^n$.

2. $\varphi_{X_i}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{itX_i}\right\} = \sum_{x=0}^{1} e^{itx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1 - p + pe^{it}$

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{itS_n}\right\} = \mathbb{E}\left\{\exp\left(it\sum_{j=1}^{n} X_j\right)\right\} = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left\{e^{itX_j}\right\} = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - p + pe^{it}\right) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$

Επειδή $\varphi_X(t) = \varphi_{S_n}(t)$ οι τ.μ. X και S_n έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $S_n \sim Bin(n, p)$.

<u>Θέμα 3$^{\text{ο}}$ [3.0]</u>

Εάν $X \sim N(0,1)$, να βρεθούν άνω φράγματα της πιθανότητας του ενδεχομένου $\{X \geq 3\}$ με τους εξής τρόπους

1. [1.0] Κάνοντας χρήση ανισότητας Chebyshev.
2. [2.0] Χρησιμοποιώντας ανισότητα Chernoff.

1. Χρησιμοποιώντας απλή Chebyshev έχουμε

$P\{X \geq 3\} \leq P\{|X| \geq 3\} \leq \frac{1}{3^2}$ εφόσον $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$

Χρησιμοποιώντας μονόπλευρη Chebyshev έχουμε

$$P\{X \geq 3\} \leq \frac{1}{1+3^2}$$

2. $P\{X \geq 3\} \leq \min_{t>0}\left[e^{-3t} M_X(t)\right]$

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left\{e^{tX}\right\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2 + tx\right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx + t^2 - t^2\right)\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2\right\} dx$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\} dx$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} \int_{x=-\infty}^{\infty} N(x \mid t, 1)\, dx = \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\}.$$

Έτσι για την δεξιά ανισότητα Chernoff έχουμε:

$$P\{X \geq 3\} \leq \min_{t>0}\left[\exp\left\{-3t + \frac{1}{2}t^2\right\}\right] = \exp\left\{\min_{t>0}\left[-3t + \frac{1}{2}t^2\right]\right\} = \exp\left\{-3 \cdot 3 + \frac{1}{2}3^2\right\}$$

εφόσον $-3t + \frac{1}{2}t^2$ κυρτή με $t^* = 3$.