ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ – Κατεύθυνση 2^{η}

<u>ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ</u>: 2014 – 2015 (Quiz III)
<u>ΜΑΘΗΜΑ</u>: Πιθανότητες ΙΙ
<u>ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ</u>: Σπυρίδων Ι. Χατζησπύρος

<u>Θέμα</u> 1^{ο} [3.0]

Από την εμπειρία του ένας καθηγητής γνωρίζει ότι η μέση του βαθμού φοιτητή στο μάθημα του είναι 75 (σε ποσοστό επί τις εκατό). (i) Να δοθεί άνω φράγμα στην πιθανότητα του ενδεχομένου, ένας φοιτητής να γράψει τουλάχιστον 85 $\left[0.5\right]$. (ii) Ποίο το κάτω φράγμα στην πιθανότητα του ενδεχομένου ένας φοιτητής να γράψει από 65 έως 85, εάν ο καθηγητής γνωρίζει ότι η τυπικά απόκλιση του βαθμού είναι 5 $\left[0.8\right]$. (iii) Πόσοι φοιτητές θα πρέπει να γράψουν στην εξέταση έτσι ώστε να ισχύει ότι με πιθανότητα το λιγότερο 0.99, ο μέσος βαθμός βρίσκεται μεταξύ 70 και 80 $\left[1.7\right]$

Εάν η συνεχής τ.μ. X αντιστοιχεί στον ω φοιτητή τον βαθμό x, δηλαδή $X\left(\omega\right)=x$ και θα έχουμε

(i) $P\left\{X \geq 85\right\} \leq \dfrac{\mathbb{E}\left(X\right)}{85}=\dfrac{15}{17}$ (Markov).

(ii) $P\left\{65 \leq X \leq 85\right\} = P\left\{75-10 \leq X \leq 75+10\right\} = P\left\{-10 \leq X-75 \leq 10\right\}$

$= P\left\{\left|X-75\right| \leq 10\right\} = 1-P\left\{\left|X-75\right| \geq 10\right\} \geq 1-\dfrac{\operatorname{var}\left(X\right)}{10^2}=\dfrac{75}{100}$ (Chebyshev).

(iii) Για τον δειγματικό μέσο $\bar{X}_n$ έχουμε ότι $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)=75$ και $\operatorname{var}\left(\bar{X}_n\right)=\dfrac{25}{n}$

$$P\left\{70 \leq \bar{X}_n \leq 80\right\} \geq 0.99 \Leftrightarrow P\left\{\left|\bar{X}_n-75\right| \leq 5\right\} \geq 0.99 \Leftrightarrow P\left\{\left|\bar{X}_n-75\right| \geq 5\right\} \leq 0.01$$

από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε $P\left\{\left|\bar{X}_n-75\right| \geq 5\right\} \leq \dfrac{\operatorname{var}\left(\bar{X}_n\right)}{25}=\dfrac{1}{n}$. Ζητάμε λοιπόν ωα ισχύει ότι $P\left\{\left|\bar{X}_n-75\right| \geq 5\right\} \leq \dfrac{1}{n} \leq 0.01$ τότε για το n θα πρέπει $n \geq 100$.

<u>Θέμα</u> 2^{ο} [2.5]

Δίνεται ότι $f_{X,Y}\left(x,y\right)=\left\{\begin{matrix} c\, f\left(x\right) f\left(y\right) & x<y \\ 0 & elsewhere \end{matrix}\right\}$, όπου f σ.π.π, με α.σ.κ. F (i) να βρεθεί το c $\left[0.50\right]$, (ii) οι περιθώριες $f_X\left(x\right)$ και $f_Y\left(y\right)$ $\left[1.50\right]$. (iii) Ποία η σχέση μεταξύ των τ.μ. X και Y; $\left[0.50\right]$

(i) $c^{-1} = \iint\limits_{x<y} f(x)\,f(y)\,dxdy = \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\int\limits_{x=-\infty}^{y} f(x)\,dx\right\}dy = \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} f(y)F(y)\,dy$

$= \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} F(y)\,dF(y) = \frac{1}{2}\{F(\infty)-F(-\infty)\} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$

(ii) $f_X(x) = \int\limits_{x<y} 2f(x)\,f(y)\,dy = 2f(x)\int\limits_{y=x}^{\infty} f(y)\,dy = 2f(x)\big(1-F(x)\big)$

$f_Y(y) = \int\limits_{x<y} 2f(x)\,f(y)\,dx = 2f(y)\int\limits_{x=-\infty}^{y} f(x)\,dx = 2f(y)F(y)$.

(iii) Εάν $X_1 \sim f$ και $X_2 \sim f$ ανεξάρτητες τότε $X = \min\{X_1, X_2\}$ και $Y = \max\{X_1, X_2\}$

<u>Θέμα</u> 3ο [3.5]

Εάν $X \sim f_X$ και $Y \sim f_Y$ ανεξάρτητες τ.μ., δείξτε ότι (i) η πυκνότητα της τ.μ. $W = X + Y$ δίνεται από την συνέλιξη $f_W(w) = (f_X * f_Y)(w) = \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\,f_Y(w-z)\,dz$ των δύο πυκνοτήτων f_X και f_Y $[1.5]$. (ii) Επίσης δείξτε ότι η συνέλιξη δύο πυκνοτήτων f_X και f_Y είναι αντιμεταθετική πράξη $[0.5]$. (iii) Εάν $X \sim Exp(1)$ και $Y \sim Exp(2)$ ανεξάρτητες τ.μ. να βρεθεί η πιθανότητα $P\{X+Y<1\}$ $[1.5]$.

(i) Από θεωρία

(ii) Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, δηλαδή $f_X * f_Y = f_Y * f_X$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό $u = w - z$

(iii) $(f_X * f_Y)(w) = \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\,f_Y(w-z)\,dz = -\int\limits_{u=\infty}^{-\infty} f_X(w-u)\,f_Y(u)\,du$

$= \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} f_X(w-z)\,f_Y(z)\,dz = \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} f_Y(z)\,f_X(w-z)\,dz = (f_Y * f_X)(w)$.

$f_W(w) = \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} Exp(z\,|\,1)\,Exp(w-z\,|\,2)\,dz$

$= \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} e^{-z}\mathcal{I}(z>0)\,2e^{-2(w-z)}\mathcal{I}(w-z>0)\,dz = 2e^{-2w}\int\limits_{z=0}^{w} e^{z}dz$

$= 2e^{-2w}\left(e^{w}-1\right) = 2\left(e^{-w}-e^{-2w}\right),\ w>0$

$P\{X+Y<1\} = P\{W<1\} = \int\limits_{0}^{1} 2\left(e^{-w}-e^{-2w}\right) = \frac{3}{2} + e^{-2} - 2e^{-1} \approx 0.8996$

<u>Θέμα</u> 4^o [3.0]

Εάν $X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ για $i=1,2$ και $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $T:\begin{Bmatrix}Y_1=2X_1+X_2\\ Y_2=2X_2\end{Bmatrix}$ να υπολογιστεί η πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος $Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}$ και να δειχθεί ότι υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας Σ, τέτοιος ώστε $Y\sim N_2(\mathcal{O},\Sigma)$.

Έχουμε ότι $Y=T(X)=AX+\mu$ με $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ και $\mu=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ με $|A|=4$. Τότε ο πίνακας συνδιασποράς θα είναι $\Sigma=AA^T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ που είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος εφόσον έχει θετικές ιδιοτιμές (το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $\left|\Sigma-\lambda\mathbb{I}\right|=\lambda^2-9\lambda+16=0$ έχει μόνο θετικές ρίζες).

Η γενική μορφή της $n-$διάστατης normal είναι:

$$f_Y(y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)\right\}.$$

Επειδή $|\Sigma|=16$ και $\Sigma^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\frac{1}{8\pi}\exp\left\{-\frac{1}{32}(y_1,y_2)\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right\}\\ &=\frac{1}{8\pi}\exp\left\{-\frac{1}{32}\left(4y_1^2-4y_1y_2+5y_2^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

<u>Θέμα</u> 5^o [2.0]

(i) Να διατυπωθεί το κεντρικό οριακό θεώρημα κατά Lindeberg – Levy $[0.5]$. (ii) Στη συνέχεια να προσεγγιστεί, με χρήση το Κ.Ο.Θ. η διωνυμική πιθανότητα $P\{X\le 55\}$ όπου $X\sim Bin(100,0.5)$ $[1.5]$. Δίνεται ότι $\Phi(1)\approx 0.8413$.

(i) Από θεωρία

(ii) $P\{S_{100}\le 55\}=P\left\{\frac{S_{100}-50}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}\le\frac{55-50}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right\}=P\{Z_{100}\le 1\}\overset{\text{Κ.Ο.Θ.}}{\approx}\Phi(1)\approx 0.8413$.

<u>Θέμα</u> 6^o [2.0]

Δίνεται η ακολουθία τ.μ. $\{X_i\}_{i\ge 1}$ που είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία των δειγματικών μέσων $\{\overline{X}_n\}_{n\ge 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο μ, δηλαδή ότι $\overline{X}_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}\mu$.

Από θεωρία (Ασθενής νόμος των Μεγάλων Αριθμών).

Γράψτε 4 από τα 6 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες.