Ένα **μέτρο πιθανότητας** πάνω στο δειγματικός χώρο Ω [1], είναι μία συνάρτηση P, που αντιστοιχεί σε υποσύνολα του Ω έναν αριθμό στο $[0,1]$ και έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $P(\Omega)=1$.
2. Η πιθανότητα της ένωσης δύο ξένων μεταξύ τους (ασυμβίβαστων) ενδεχομένων είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ <u>το πεδίο ορισμού</u> (που περιέχει υποσύνολα του Ω) της συνάρτησης P. Δηλαδή το μέτρο πιθανότητας

$$P:\mathcal{F}\to[0,1]$$

είναι μία συνολοσυνάρτηση από το $\mathcal{F}$ στο $[0,1]$ τέτοια ώστε για κάθε $A\in\mathcal{F}$ να έχουμε $0\le P(A)\le 1$.

Η δομή του $\mathcal{F}$

Για παράδειγμα εάν $A,B\in\mathcal{F}$, είναι λογικό, εκτός των πιθανοτήτων $P(A)$ και $P(B)$ να θέλουμε να μπορούμε να υπολογίζουμε πιθανότητες της μορφής $P(A')$, $P(B')$ είτε $P(A\cup B)$. Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A')$, $P(B')$ μας αρκεί το γεγονός ότι $A,B\in\mathcal{F}$ εφόσον $P(A')=1-P(A)$ και $P(B')=1-P(B)$. Από την άλλη μεριά αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε και $A',B'\in\mathcal{F}$. Για την πιθανότητα $P(A\cup B)$ έχουμε ότι:

$$P(A\cup B)=P(A'B)+P(AB')+P(AB)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(A'B)$$
$$P(A\cup B)=P(B)+P(AB')$$

Προσθέτοντας κατά μέλη την $2^{η}$ και $3^{η}$ εξίσωση και αφαιρώντας την $1^{η}$ παίρνουμε την γνωστή σχέση $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Είναι εμφανές λοιπόν ότι για να μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A')$, $P(B')$, και $P(A\cup B)$ θα πρέπει να ανήκουν στο $\mathcal{F}$ εκτός από τα A και B, και τα υποσύνολα του Ω

[1] Ο χώρος Ω που καθορίζει το τυχαίο πείραμα ή φαινόμενο.

$$A \cup B, A', B', AB, AB', A'B \in \mathcal{F} .$$

Για πρακτικούς λόγους, θα θέλαμε να μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ δηλαδή θα θέλαμε να έχουμε σαν πεδίο ορισμού της συνάρτησης P το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω, που συμβολίζουμε με 2^{Ω} είτε $\mathcal{P}(\Omega)$. Αυτό όμως μπορεί να γίνει μόνο για διακριτά σύνολα Ω.

Εάν για παράδειγμα το Ω είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το αξίωμα της επιλογής[2] μας λέει ότι εάν θέσουμε σαν μέτρο πιθανότητας $P(A) = \mu(A) / \mu(\Omega)$[3], $\mu(A)$ το μήκος του A, τότε υπάρχουν **παθολογικά υποσύνολα του** Ω στα οποία η έννοια της πιθανότητας δεν μπορεί να οριστεί (για παράδειγμα τα σύνολα τύπου Vitali δεν έχουν μήκος). Δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση, το $\mathcal{F}$ θα είναι μικρότερο από το δυναμοσύνολο του Ω, δηλαδή $\mathcal{F} \subsetneqq 2^{\Omega}$

Έτσι το πεδίο ορισμού $\mathcal{F}$ του μέτρου πιθανότητας, είναι μια **οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του** Ω, που όμως γενικά δεν περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω.

Ορισμός: Ένα $\sigma -$ **πεδίο** ($\sigma -$ field ή $\sigma -$ algebra ή Borel field) πάνω στο δειγματικό χώρο Ω, είναι μια οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.

Στα παρακάτω όταν αναφερόμαστε σε πεδίο του Ω θα εννοούμε $\sigma -$ πεδίο του Ω.

<u>Άσκηση</u> Εάν το Ω είναι δειγματικός χώρος και $\mathcal{F}$ το πεδίο ενδεχομένων του, τότε[4]:

$(\varnothing \in \mathcal{F})$, $\left(\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}\right)$ επίσης $\left(\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}\right)$.

---

[2] Το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι από κάθε οικογένεια συνόλων $\{S_i\}_{i\in I}$ μπορούμε να διαλέξουμε ένα ακριβώς στοιχείο $x_i \in S_i$ από κάθε σύνολο της οικογένειας, δηλαδή δοθέντος της $\{S_i\}_{i\in I}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\{x_i\}_{i\in I}$.

[3] Για παράδειγμα εάν $A = (a,b)$ τότε ορίζουμε σαν $\mu(A) = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|$ τη μονοδιάστατη ευκλείδεια απόσταση.

[4] Ο συμβολισμός $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}$ σημαίνει ότι $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in I$.

Παρατηρήσεις

1. Από τον ορισμό φαίνεται ότι **η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κλειστή κάτω από τις πράξεις** $(\cdot)', \cup, \cap$. Δηλαδή χρησιμοποιώντας τις πράξεις $(\cdot)', \cup, \cap$ πάνω στα στοιχεία του $\mathcal{F}$, το αποτέλεσμα είναι και πάλι στοιχεία που ήδη ανήκουν στο πεδίο $\mathcal{F}$.

2. Κάθε πεδίο $\mathcal{F}$ πάνω στον δειγματικό χώρο Ω βρίσκεται μεταξύ των πεδίων $\{\varnothing, \Omega\}$ (το τετριμμένο πεδίο) και 2^{Ω} (το δυναμοσύνολο του Ω).

Παραδείγματα

1. Εάν οι οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{F}$ είναι ένα πεδίο του Ω, τότε το $\mathcal{F}$ περιέχει και τις αριθμήσιμες τομές των στοιχείων του

$$\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \in \{A_i'\}_{i\in I} \quad \not\Rightarrow \quad \in \bigcup_{i\in I} A_i' \quad \not\Leftrightarrow \quad = \left(\bigcup_{i\in I} A_i'\right)' \quad \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \mathcal{F}.$$

2. Εάν η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$, τότε τα ενδεχόμενα $\liminf_{n\to\infty} A_n$ και $\limsup_{n\to\infty} A_n$ που ορίζονται σαν

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n}$$

ανήκουν στο $\mathcal{F}$.

Παράδειγμα

1. Εάν $\Omega = \left\{F^n, SF^{n-1}, FSF^{n-2}, \ldots, F^{n-1}S, S^2F^{n-2}, \ldots, S^n\right\}$ όπου F και S συμπληρωματικές καταστάσεις[5] με $P(S) = 1 - P(F) = p$ τότε $|\Omega| = 2^n$. Εάν ορίσουμε την συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$X(\omega) =$ ο αριθμός των S στο δειγματικό σημείο ω,

παρατηρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων S της X θα είναι:

$S = X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Θέτοντας $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ έχουμε ότι

[5] Failure, Success

$X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in B\}\equiv\{X\in B\}\in\mathcal{F}$,

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (τότε λέμε ότι η συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή). Για παράδειγμα εάν $B=(1/2,\, 3/2)$ τότε επειδή $1\in B$ θα έχουμε $\{X\in B\}=\{SF^{n-1}, FSF^{n-2},\ldots,F^{n-1}S\}\in\mathcal{F}$

Γνωρίζουμε τότε ότι η κατανομή της τ.μ. X είναι διωνυμική, δηλαδή $X\sim Bin(n,p)$ με

$$p_X(x)\equiv P\{X=x\}=Bin(x\mid n,p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & x\in\{0,1,\ldots,n\}\\ 0, & elsewhere\end{cases}.$$

Για $X^{-1}\{1\}=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=1\}=\{SF^{n-1},FSF^{n-2},\ldots,F^{n-1}S\}\in\mathcal{F}$ και εφόσον $\left|X^{-1}\{1\}\right|=\binom{n}{1}$, παίρνουμε

$$P\left(X^{-1}\{1\}\right)\equiv P\{X=1\}=\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1},$$

ενώ

$$\Omega=X^{-1}\{0,1,\ldots,n\}=X^{-1}\left(\bigcup_{x=0}^{n}\{x\}\right)=\bigcup_{x=0}^{n}X^{-1}\{x\}$$

$$\Rightarrow P(\Omega)=P\left(\bigcup_{x=0}^{n}X^{-1}\{x\}\right)=P\left(\{X=0\}\cup\cdots\cup\{X=n\}\right)=\sum_{x=0}^{n}P\{X=x\}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\left(p+(1-p)\right)^n=1$$

2. Για τον δειγματικό χώρο $\Omega=\{S,FS,\ldots,F^{n-1}S,\ldots\}$ μπορούμε να θέσουμε και πάλι $\mathcal{F}=2^{\Omega}$.

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $X(\omega)=$ο αριθμός των F στο $\omega=$ αριθμός των αποτυχιών έως την πρώτη επιτυχία,

$Y:\Omega\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $Y(\omega)=X(\omega)+1=$ο αριθμός των S και F στο $\omega=$ αριθμός των δοκιμών έως την πρώτη επιτυχία.

Για παράδειγμα

$$P\left(X^{-1}\{x\}\right)=P\{X=x\}=P\left(\left\{F^{x}S\right\}\right)=(1-p)^{x}\,p,\, x\geq 0\,,$$

και γνωρίζουμε ότι η τ.μ. $X\sim Geo(p)$ ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p, παραμετρικοποιημένη ως προς τον αριθμό των αποτυχιών x. Φυσικά και ισχύει ότι

$$P(\Omega)=P\left(\bigcup_{x=0}^{\infty}X^{-1}(\{x\})\right)=\sum_{x=0}^{\infty}p(1-p)^{x}=p\left\{\frac{1}{1-(1-p)}\right\}=1.$$

Ισοδύναμα

$$P\left(Y^{-1}(\{y\})\right)=P\{Y=y\}=P\left(F^{y-1}S\right)=(1-p)^{y-1}\,p,\, y\geq 1,\text{ενώ}$$
$$X=Y-1\sim Geo(p)\Leftrightarrow Y\sim 1+Geo(p).$$

Δηλαδή η τ.μ. $Y\sim 1+Geo(p)$ ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p, παραμετρικοποιημένη όμως, ως προς τον αριθμό των δοκιμών Bernoulli x.

3. Για τον δειγματικό χώρο

$$\Omega=\left\{S^{n},\underbrace{FS^{n},SFS^{n-1},\ldots,S^{n}F}_{n+1},\underbrace{F^{2}S^{n},FS^{n}F,\ldots,S^{n-2}FS}_{n+2},\ldots\right\}$$

έχουμε $\mathcal{F}=2^{\Omega}$ και θέτουμε:

$X(\omega)\;=\;$ ο αριθμός των F στο $\omega\;=\;$ αριθμός των **αποτυχιών** έως την $n^{οστη}$ – επιτυχία,
$S_X\equiv X(\Omega)=\{n,\,n+1,\,n+2,\ldots\}$,

$Y(\omega)\;=\;X(\omega)-n\;=\;$ ο αριθμός των **δοκιμών** έως την $n^{οστη}$ – επιτυχία,
$S_Y\equiv Y(\Omega)=\{0,1,2,\ldots\}$.

$P\{X=x\}$

$= P\{n-1$ επιτυχίες στις πρώτες $x-1$ δοκιμές, επιτυχία στην x δοκιμή$\}$

$= P\{n-1$ επιτυχίες στις πρώτες $x-1$ δοκιμές$\} \cdot P\{$ επιτυχία στην x δοκιμή$\}$

$= Bin(n-1|x-1,\ p)\ Bin(1|1,\ p)$

$$= \binom{x-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(x-1)-(n-1)} \cdot p = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, & x \in \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

και γνωρίζουμε ότι η τ.μ. $X \sim \mathcal{NB}(n, p)$ ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p και αριθμό επιτυχιών n, παραμετρικοποιημένη ως προς τον αριθμό των δοκιμών x έως τις πρώτες n επιτυχίες.

Η παραμετρικοποίηση ως προς τον αριθμό των αποτυχιών έως τις πρώτες n επιτυχίες είναι

$$P\{Y = y\} = P\{Y = x-n\} = \begin{Bmatrix} \binom{y+n-1}{n-1} p^n (1-p)^y, & y \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

Το Ω λοιπόν αποτελείται από τα **στοιχειώδη αποτελέσματα** ενός τυχαίου πειράματος (είναι ο χώρος του πειράματος ή του τυχαίου φαινομένου).

$\Omega = \{$ *δειγματικά σημεία* $\}$

$\Downarrow$

$\mathcal{F} = \{$ *οι δυνατές ερωτήσεις που μπορούμε να απαντήσουμε με τα δεδομένα που έχουμε από το τυχαίο πείραμα* $\}$

Το πεδίο $\mathcal{F}$ λοιπόν **έχει δομή πληροφορίας**. Εάν μάλιστα όσο περνάει ο χρόνος η πληροφορία που διαθέτουμε αυξάνεται, το $\mathcal{F}$ μπορεί να αντικατασταθεί με μία αύξουσα δομή πληροφορίας (αύξουσα ακολουθία πεδίων) $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \cdots$, που συχνά ονομάζεται διήθηση (filtration).

<u>Θεώρημα</u>

Για κάθε οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του δειγματικού χώρου Ω υπάρχει πεδίο $\sigma(\mathcal{A})$, που περιέχει όλα τα σύνολα της $\mathcal{A}$ και είναι το μικρότερο πεδίο με αυτήν την ιδιότητα. Λέμε ότι το $\sigma(\mathcal{A})$ είναι το πεδίο που παράγεται από την οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του Ω.

Παράδειγμα

Εάν A και B ενδεχόμενα του Ω, να βρεθεί σε κάθε περίπτωση το πεδίο $\sigma\{A,B\}$ που παράγεται από την οικογένεια $\{A,B\}$

1. $AB \neq \varnothing$ και $A \cup B \subsetneqq \Omega$.
2. $AB = \varnothing$ και $A \cup B \subsetneqq \Omega$.
3. $AB \neq \varnothing$ και $A \cup B = \Omega$.
4. $AB = \varnothing$ και $A \cup B = \Omega$.

1. Όταν $AB \neq \varnothing$ και $A \cup B \subsetneqq \Omega$, θα έχουμε

$$\mathcal{S}_1 = \{\Omega,\, A,\, B,\, \varnothing,\, A',\, B'\}$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \left\{\begin{matrix} A \cup B, & A \cup B', & A' \cup B, & A' \cup B', \\ AB, & AB', & A'B, & A'B' \end{matrix}\right\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{S}_2$ **δεν είναι ακόμα κλειστή** κάτω από τις πράξεις $(\;)', \cup, \cap$.
Παρατηρούμε ότι τα σύνολα που μπορούμε να παράγουμε με ενώσεις από τις τομές $AB, AB', A'B, A'B'$ είναι:

$$AB \cup AB' = A(B \cup B') = A \in \mathcal{S}_2$$
$$AB \cup A'B = (A \cup A')B = B \in \mathcal{S}_2$$
$$AB' \cup A'B \equiv A \vartriangle B \notin \mathcal{S}_2 \text{ [6]}$$
$$AB \cup A'B' = (A \vartriangle B)' \notin \mathcal{S}_2$$
$$AB' \cup A'B' = (A \cup A')B' = B' \in \mathcal{S}_2$$
$$A'B \cup A'B' = A'(B \cup B') = A' \in \mathcal{S}_2$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε τώρα ότι το σύνολο

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2 \cup \left\{A \vartriangle B, (A \vartriangle B)'\right\}$$

[6] *Η συμμετρική διαφορά $A \vartriangle B$ των A και B, ορίζεται σαν η ένωση των A και B εκτός των κοινών τους σημείων:*

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (AB) = (A \cup B)(AB)' = (A \cup B)(A' \cup B') = (AB') \cup (A'B)$$
$$(A \vartriangle B)' = (A \cup B)' \cup (AB) = (A'B') \cup (AB)$$

είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $(\ )'$, $\cup$, $\cap$, ή ότι:

$$\sigma\{A,B\} = \mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ A \cup B, A \cup B', A' \cup B, A' \cup B', \\ \quad AB, \quad AB', \quad A'B, \quad A'B', \\ (AB') \cup (A'B),\ (A'B') \cup (AB) \end{array} \right\}.$$

2. Στην ειδική περίπτωση που $AB = \varnothing \Leftrightarrow (A \subset B' \Leftrightarrow B \subset A')$ τότε από το (1.) έχουμε:

$$\sigma\{A,B\} = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ A \cup B, \underbrace{A \cup B'}_{B'}, \underbrace{A' \cup B}_{A'}, \quad \underbrace{A' \cup B'}_{AB=\varnothing \Leftrightarrow A' \cup B' = \Omega} \\ \underbrace{AB}_{\varnothing}, \underbrace{AB'}_{A}, \underbrace{A'B}_{B}, A'B', \\ \underbrace{(AB') \cup (A'B)}_{A \cup B}, \underbrace{\left(A'B'\right) \cup (AB)}_{\left(A'B'\right) \cup \varnothing} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ A \cup B, \\ A'B' \end{array} \right\}.$$

3. $A \cup B = \Omega,\ \ AB \neq \varnothing \ \Rightarrow (A' \subset B \Leftrightarrow B' \subset A)$

$$\sigma\{A,B\} = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ \underbrace{A \cup B}_{\Omega}, \underbrace{A \cup B'}_{A}, \underbrace{A' \cup B}_{B}, \underbrace{A' \cup B'}_{A \Delta B} \\ \underbrace{AB}_{(A \Delta B)'}, \underbrace{AB'}_{B'}, \underbrace{A'B}_{A'}, \underbrace{A'B'}_{\varnothing}, \\ A \Delta B, (A \Delta B)' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ A' \cup B', \\ AB \end{array} \right\}$$

4. Όταν $A \cup B = \Omega$ και $AB = \varnothing \ \Rightarrow \ (A = B' \Leftrightarrow A' = B)$

$$\sigma\{A,B\} = \left\{ \begin{array}{l} \varnothing, \Omega, A, B, A', B', \\ \underbrace{A \cup B}_{\Omega}, \underbrace{A'B'}_{A'A=\varnothing} \end{array} \right\} = \{\varnothing, \Omega, A, B\}.$$

Άσκηση

Να βρεθεί το πεδίο $\sigma\{A,B\}$ στις εξής περιπτώσεις:

1. $\Omega=\{a,b,c,d\}$ και $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$ (σε αυτή την περίπτωση δείξτε ότι το πεδίο $\sigma\{A,B\}$ είναι ίσο με το 2^{Ω}).

2. $\Omega=\{a,b,c,d,e\}$ και $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d,e\}$.

1. Σε αυτή την περίπτωση $\left|\sigma\{A,B\}\right|=16$ και γνωρίζουμε ότι $\left|2^{\Omega}\right|=2^{|\Omega|}=16$. Πράγματι

$$\sigma\{A,B\}=\left\{\begin{array}{l}\varnothing,\Omega, A=\{a,b\}, B=\{b,c\}, A'=\{c,d\}, B'=\{a,d\},\\ A\cup B=\{a,b,c\}, A\cup B'=\{a,b,d\}, A'\cup B=\{b,c,d\}, A'\cup B'=\{a,c,d\}\\ AB=\{b\}, AB'=\{a\}, A'B=\{c\}, A'B'=\{d\},\\ A\vartriangle B=\{a,c\}, (A\vartriangle B)'=\{b,d\}\end{array}\right\}=2^{\Omega}$$

2. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ότι $A\cup B=\Omega$ και $AB\neq\varnothing$. Αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση (4.) της προηγούμενης άσκησης

$$\sigma\{A,B\}=\left\{\begin{array}{l}\varnothing,\Omega, A=\{a,b,c\}, B=\{c,d,e\}, A'=\{d,e\}, B'=\{a,b\},\\ A\cup B=\Omega, A\cup B'=A, A'\cup B=B, A'\cup B'=\{a,b,d,e\}=\{c\}'\\ AB=\{c\}, AB'=B', A'B=A', A'B'=\varnothing,\\ A\vartriangle B=\{c\}', (A\vartriangle B)'=\{c\}\end{array}\right\}.$$

Πρόταση

1. Δίνεται ότι τα $\mathcal{F}_i$ για $i\in I$ είναι πεδία πάνω στον Ω, όπου το I είναι ένα πεπερασμένο είτε άπειρο σύνολο δεικτών. Δείξτε ότι και η οικογένεια $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ είναι πεδίο πάνω στον Ω.
2. Δείξτε ότι γενικά η ένωση πεδίων δεν είναι πεδίο.

1. (i) $\Omega\in\mathcal{F}_i,\ \forall i\in I \Leftrightarrow \Omega\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$,

(ii) $A\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i \Leftrightarrow A\in\mathcal{F}_i, \forall i\in I \Leftrightarrow A'\in\mathcal{F}_i, \forall i\in I \Leftrightarrow A'\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$,

(iii) $A_j\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i,\ j\in J \Leftrightarrow A_j\in\mathcal{F}_i, \forall j\in J, \forall i\in I$

$$\Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{F}_i, \forall i \in I \Leftrightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i .$$

2. Δείχνουμε το (2.) με ένα αντιπαράδειγμα. Επειδή $\sigma\{A\} = \{\varnothing, \Omega, A, A'\}$ και $\sigma\{B\} = \{\varnothing, \Omega, B, B'\}$ και παρατηρούμε ότι $\{A, B\} \subset \sigma\{A\} \cup \sigma\{B\} \subset \sigma\{A, B\}$. Επειδή το $\sigma\{A, B\}$ είναι το ελάχιστο πεδίο που περιέχει την οικογένεια $\{A, B\}$, το $\sigma\{A\} \cup \sigma\{B\}$ δεν είναι πεδίο.

□

Παρατήρηση

Εμφανώς $\sigma\left(\sigma\{A\} \cup \sigma\{B\}\right) = \sigma\{A, B\}$. Το πεδίο που παράγεται από την ένωση των πεδίων $\sigma\{A\}$ και $\sigma\{B\}$ το συμβολίζουμε με $\sigma\{A\} \vee \sigma\{B\}$.

Πρόταση

Εάν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ τότε $2^n \le \left|\sigma\{A_1, \ldots, A_n\}\right| \le 2^{2^n}$.

Έστω ότι $E_{ij} = \begin{cases} A_i & j = 1 \\ A_i' & j = 0 \end{cases}$ και $\mathcal{I}_n$ το σύνολο όλων των δυνατών τομών μεταξύ των $A_1, \ldots, A_n$ και των συμπληρωμάτων τους, δηλαδή

$$\mathcal{I}_n = \left\{B \in \mathcal{F} : B = E_{1,j_1} E_{2,j_2} \cdots E_{n,j_n},\ j_k \in \{0,1\},\ 1 \le k \le n\right\}$$

Εάν όλες οι τομές είναι διαφορετικά σύνολα, τότε $\left|\mathcal{I}_n\right| = 2^n$ ενώ εάν τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n$ αποτελούν διαμέριση του Ω ($\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ και $A_i A_j = \varnothing$ για $i \ne j$) τότε θα έχουμε μόνο n διαφορετικά σύνολα, δηλαδή $\left|\mathcal{I}_n\right| = n$. Γενικά λοιπόν εάν $\left|\mathcal{I}_n\right| = k$, τότε χρησιμοποιώντας ενώσεις, μπορούμε να πάρουμε 2^k διαφορετικά σύνολα.

Έτσι έχουμε ότι $\left|\sigma\{A_1, \ldots, A_n\}\right| = 2^{|\mathcal{I}_n|},\ n \le \left|\mathcal{I}_n\right| \le 2^n \ \Rightarrow\ 2^n \le \left|\sigma\{A_1, \ldots, A_n\}\right| \le 2^{2^n}$

□

Ορισμός: Το σύνολο **Borel** $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ του $\mathbb{R}$ είναι το $\sigma-$πεδίο που παράγεται από όλα τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x]$ για $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\},$$

και μπορεί να αποδειχθεί ότι το $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ περιέχει όλα τα μετρήσιμα υποσύνολα (τα Borel υποσύνολα) του $\mathbb{R}$.

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\text{υποσύνολα του } \mathbb{R} \text{ που δεν έχουν μέτρο}\}$$

<u>Ορισμός</u>: Το **μέτρο πιθανότητας** P είναι μια συνάρτηση $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

1. $P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$ (κανονικοποίηση του μέτρου πιθανότητας)
3. $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i),\quad \forall \{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F} : A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$

Ονομάζουμε την τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας.

<u>Ορισμός</u>: Μια ακολουθία ενδεχομένων $\mathbb{A} = \{A_i\}_{i\geq 1}$ λέμε ότι είναι **μονότονη** όταν:

1. Αύξουσα $A_n \uparrow \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$
2. Φθίνουσα $A_n \downarrow \Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

<u>Ορισμός</u>: Το όριο **μονότονης** ακολουθίας ενδεχομένων $\mathbb{A} = \{A_i\}_{i\geq 1}$ ορίζεται με τον εξής τρόπο:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \sup \mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \mathbb{A} \uparrow \\ \inf \mathbb{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \mathbb{A} \downarrow \end{cases}$$

<u>Ορίζουμε</u> την $n^{οστης}$ **τάξης ουρά** (tail) της ακολουθίας $\mathbb{A}$ σαν την ακολουθία ενδεχομένων

$$T_n(\mathbb{A}) = \{A_i\}_{i\geq n}.$$

Επίσης ορίζουμε την τομή και την ένωση των στοιχείων της $n^{οστης}$ τάξης ουράς της ακολουθίας $\mathbb{A}$ σαν

$$M_n(\mathbb{A}) = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{(the meet of the tail } T_n(\mathbb{A})\text{)}$$
$$J_n(\mathbb{A}) = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{(the joint of the tail } T_n(\mathbb{A})\text{).}$$

Πρόταση

Η ακολουθίες τομής $\mathbb{M}=\{M_n\}_{n\geq 1}$ και ένωσης $\mathbb{J}=\{J_n\}_{n\geq 1}$ ενδεχομένων της $n^{οστης}$ τάξης ουράς της ακολουθίας $\mathbb{A}=\{A_i\}_{i\geq 1}$, είναι πάντα μονότονες[7].

$$M_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cap \bigcap_{i=n+1}^{\infty} A_i = A_n \cap M_{n+1} \subseteq M_{n+1} \Rightarrow \mathbb{M}\uparrow$$

$$J_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i = A_n \cup J_{n+1} \supseteq J_{n+1} \Rightarrow \mathbb{J}\downarrow .$$

□

Αυτό που μας λέει η προηγούμενη πρόταση είναι ότι **οι ακολουθίες ενδεχομένων** M_n **και** J_n **έχουν όριο**.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \underline{\mathbb{A}},\quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \overline{\mathbb{A}}}$$

Επειδή $\mathbb{M}\uparrow$ έχουμε:

$$\underline{\mathbb{A}} = \liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k ,$$

και επειδή $\mathbb{J}\downarrow$ έχουμε ότι:

$$\overline{\mathbb{A}} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \inf \mathbb{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Πρόταση

1. Έστω ότι πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $\overline{\mathbb{A}}$, τότε αυτό είναι ισοδύναμο με την πραγματοποίηση άπειρων από τα ενδεχόμενα της ακολουθίας $\mathbb{A}$ [8].

2. Εάν πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $\underline{\mathbb{A}}$, τότε αυτό είναι ισοδύναμο με την πραγματοποίηση όλων των ενδεχομένων της ακολουθίας $\mathbb{A}$ εκτός ίσως από κάποιο αρχικό πεπερασμένο πλήθος[9].

---

[7] Η αρχική ακολουθία $\mathbb{A}$ δεν χρειάζεται να είναι μονότονη.

[8] *Το ενδεχόμενο* $\limsup_{n\to\infty} A_n$ *συμβολίζεται και ως* $\{A_n,\ i.o.\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ \ \textit{για} \quad \textit{πειρα} \ \}$ *δηλαδή* ***τα ενδεχόμενα στην ακολουθία*** $\mathbb{A}$ ***πραγματοποιούνται απείρως συχνά*** *(infinitely often).*

1. Η πραγματοποίηση άπειρων από τα ενδεχόμενα της ακολουθίας $\mathbb{A}$ είναι ισοδύναμη με το εξής:

εάν $\omega \in \overline{\mathbb{A}}$ *τότε υπάρχει υπακολουθία* $\left\{A_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ *τέτοια ώστε* $\omega \in A_{n_i}$, $\forall i \geq 1$.

Πράγματι

$$\omega \in \overline{\mathbb{A}} \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \left(\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ \wedge \ \omega \in \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \ \wedge \ \cdots\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists n_1 : \omega \in A_{n_1} \ \ \kappa\alpha\iota \ \exists n_2 \geq n_1 : \omega \in A_{n_2} \ \ \kappa\alpha\iota \ \cdots\right) \Leftrightarrow \left(\exists \left\{A_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty} : \omega \in A_{n_i}, \ \forall i \geq 1\right)$$
.

2. Εάν $\omega \in \underline{\mathbb{A}}$ τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε για $n \geq N$ να έχουμε $\omega \in A_n$. Πράγματι

$$\omega \in \underline{\mathbb{A}} \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \left(\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \ \vee \ \omega \in \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \ \vee \ \cdots\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists N : \omega \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k \Rightarrow \omega \in A_n, \forall n \geq N\right)$$

□

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται η ακολουθία ενδεχομένων

$$\mathbb{A} = \left\{A_i\right\}_{i \geq 1} = \left\{\{b_1\},\{b_2\},\ldots,\{b_m\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\ldots,\{\alpha\},\{\beta\},\ldots\right\},$$

όπου b_i διαφορετικά μεταξύ τους και διαφορετικά των α και β, τότε

$$M_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \varnothing \Rightarrow \underline{\mathbb{A}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\left(\mathbb{A}\right) = \varnothing,$$

---

[9] *Το ενδεχόμενο* $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *συμβολίζεται και ως* $\left\{A_n, \ a.a.\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ \ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa \ \right\}$ *δηλαδή τα ενδεχόμενα* A_n*, από κάποιο πεπερασμένο* N *και μετά, θα πραγματοποιηθούν όλα. Ισοδύναμα λέμε ότι τα ενδεχόμενα* A_n ***πραγματοποιούνται σχεδόν πάντα*** *(almost always).*

$$J_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \begin{cases} \{b_1, \ldots b_{m-1}, b_m, \alpha, \beta\} & n = 1 \\ \vdots & \\ \{b_m, \alpha, \beta\} & n = m \\ \{\alpha, \beta\} & n > m \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{\alpha, \beta\}$$

- Εύκολα παρατηρούμε ότι εάν ορίσουμε $\mathbb{B} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \ldots, \{\alpha\}, \{\beta\}, \ldots\}$ τότε και πάλι έχουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} B_n = \{\alpha, \beta\}$ δηλαδή **η μη ύπαρξη του πεπερασμένου block $\{b_1\}, \{b_2\}, \ldots, \{b_m\}$ στην ακολουθία $\mathbb{B}$, δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα**. Παρατηρείστε ότι εάν τα $\{b_1\}, \{b_2\}, \ldots, \{b_m\}$ βρίσκονταν σε οποιεσδήποτε θέσεις μέσα στην ακολουθία $\mathbb{A}$, και πάλι θα είχαμε το ίδιο limit superior $\{\alpha, \beta\}$ (αυτό διότι το m είναι πεπερασμένο).

- Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε στοιχείο ω του $\overline{\mathbb{A}} = \{\alpha, \beta\}$ υπάρχει υπακολουθία της $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ που το περιέχει. Για παράδειγμα εάν $\omega = \alpha$ τότε $\omega \in A_{m+2i-1},\ i \geq 1$ και εάν $\omega = \beta$ τότε $\omega \in A_{m+2i},\ i \geq 1$.

<u>Πρόταση</u>

Όταν η ακολουθία $\mathbb{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ **είναι μονότονη** ισχύει ότι:

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n}$$

Εάν $A_n \uparrow$ τότε γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

$$A_n \uparrow \Rightarrow M_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = A_k A_{k+1} A_{k+2} \cdots = A_k$$
$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} A_n = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_1 \subset A_k, A_2 \subset A_k, \ldots, A_{k-1} \subset A_k \ \Rightarrow \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ \Rightarrow$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \inf(\mathbb{J}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

Εάν $A_n \downarrow$ τότε γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

$A_n \downarrow \;\Rightarrow\; A_n' \uparrow \;\Rightarrow\; \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' \;\Rightarrow$

$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \;\Rightarrow\; \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

□

<u>Λήμμα:</u> Ισχύει ότι $\underline{\mathbb{A}} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$.

<u>1^{ος} τρόπος:</u>

Εμφανώς έχουμε ότι $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ για κάθε $n \geq 1$, ή ότι $M_n \subseteq J_n$. Όμως $M_n \uparrow$ και $J_n \downarrow$ παίρνοντας το όριο όταν $n \to \infty$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} M_n \subseteq \lim_{n\to\infty} J_n$ ή ότι $\underline{\mathbb{A}} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$.

<u>2^{ος} τρόπος:</u>

$$\omega \in \underline{\mathbb{A}} \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \left(\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \;\vee\; \omega \in \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \;\vee\; \cdots\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists N \geq 1 : \omega \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow \left(\omega \in A_n, \forall n \geq N\right)$$

$$\Rightarrow \omega \in \left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_k \cup \underbrace{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k}_{\omega}\right)\left(\bigcup_{k=2}^{N-1} A_k \cup \underbrace{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k}_{\omega}\right)$$

$$\cdots\left(A_{N-1} \cup \underbrace{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k}_{\omega}\right)\left(\underbrace{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k}_{\omega}\right)\left(\underbrace{\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k}_{\omega}\right)\cdots$$

□

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθεί, εάν υπάρχει, το όριο των ακολουθιών ενδεχομένων:

1. $A_n = \left\{\begin{array}{ll} B, & n = 2k \\ C, & n = 2k-1 \end{array}\right\}, \; k \geq 1$

2. $A_n = \left[\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], \; n \geq 1$

3. $A_n = \left[1 - 1/2^{n-1}, 1 - 1/2^n\right], \; n \geq 1$

4. $A_n = (-\infty, \; 1/2^n], \; n \geq 1$

1. $J_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B \cup C \;\Rightarrow\; \overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B \cup C$

$M_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = B \cap C \;\Rightarrow\; \underline{\mathbb{A}} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = B \cap C$

Επειδή $\underline{\mathbb{A}} \neq \overline{\mathbb{A}}$ **δεν υπάρχει το όριο της ακολουθίας** A_n. Σε αυτή την περίπτωση ένας **καταχρηστικός** συμβολισμός θα ήταν $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \{B\cap C, B\cup C\}$.

2. $J_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}\left[\frac{1}{k},\, 2+\frac{1}{k}\right] = \left(0, 2+\frac{1}{n}\right]\downarrow$ επειδή $0 \notin A_n, \forall n \geq 1$,

$\overline{\mathbb{A}} = \inf \mathbb{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 2+\frac{1}{n}\right] = (0,2]$, επειδή $2 \in A_n, \forall n \geq 1$.

$$M_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty}\left[\frac{1}{k},\, 2+\frac{1}{k}\right] = \left[\frac{1}{n},\, 2\right]\uparrow,$$

$$\underline{\mathbb{A}} = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},\, 2\right] = (0,2].$$

Ενώ η $\mathbb{A}$ δεν είναι μονότονη, έχει όριο, διότι $\underline{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{A}} = (0,2]$. Το όριο είναι η κοινή τους τιμή $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = (0,2]$.

3. Παρατηρούμε ότι $A_n = \left[1-\frac{1}{2^{n-1}},\, 1-\frac{1}{2^n}\right] = [v_{n-1}, v_n],\ v_{n-1} < v_n,\ n \geq 1,\ v_n \to 1^-,\ n \to \infty$.

$$J_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{k-1}},\, 1-\frac{1}{2^k}\right] = \left[1-\frac{1}{2^{n-1}},\, 1\right)\downarrow$$

$$\overline{\mathbb{A}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}},\, 1\right) = (1,1) = \varnothing$$

$$M_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{k-1}},\, 1-\frac{1}{2^k}\right] = \varnothing$$

$$\underline{\mathbb{A}} = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing$$

Ενώ η $\mathbb{A}$ δεν είναι μονότονη, έχει όριο διότι τα $\underline{\mathbb{A}} = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ και $\overline{\mathbb{A}} = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ταυτίζονται. Το όριο είναι η κοινή τιμή $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$.

4. Η $A_n = (-\infty,\ 1/2^n],\ n \geq 1$ είναι $\downarrow \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}(-\infty,\ 1/2^k] = (-\infty,\ 0$

<u>Άσκηση</u>

Δίνεται η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$, με $A_n = [a_n, b_n]$ και $-\kappa < a_n < \kappa < b_n < \lambda$ για θετικά κ και λ. Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty} A_n$, εάν υπάρχει, στις εξής περιπτώσεις: $\left[a_n \downarrow a,\ b_n \downarrow b\right]$, $\left[a_n \uparrow a,\ b_n \uparrow b\right]$, $\left[a_n \uparrow a,\ b_n \downarrow b\right]$, $\left[a_n \downarrow a,\ b_n \uparrow b\right]$.

1. $\left[a_n \downarrow,\ b_n \downarrow\right]$

$$J_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} [a_k, b_k] = \left(a^+, b_n\right] \Rightarrow \overline{\mathbb{A}} = \inf \mathbb{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a^+, b_n\right] = \left(a^+, b^+\right]$$

$$M_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} [a_k, b_k] = \left[a_n, b^+\right] \Rightarrow \underline{\mathbb{A}} = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a_n, b^+\right] = \left(a^+, b^+\right]$$

$\mathbb{A} \neq$ μονότονη, αλλά το όριο της $\mathbb{A}$ υπάρχει και είναι $\lim_{n\to\infty} A_n = \left(a^+, b^+\right]$.

2. $\left[a_n \uparrow,\ b_n \uparrow\right]$

$$J_n(\mathbb{A}) = \bigcup_{k=n}^{\infty} [a_k, b_k] = \left[a_n, b^-\right) \downarrow \Rightarrow \overline{\mathbb{A}} = \inf \mathbb{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a_n, b^-\right) = \left[a^-, b^-\right)$$

$$M_n(\mathbb{A}) = \bigcap_{k=n}^{\infty} [a_k, b_k] = \left[a^-, b_n\right] \uparrow \Rightarrow \underline{\mathbb{A}} = \sup \mathbb{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a^-, b_n\right] = \left[a^-, b^-\right)$$

$\mathbb{A} \neq$ μονότονη, αλλά το όριο της $\mathbb{A}$ υπάρχει και είναι $\lim_{n\to\infty} A_n = \left[a^-, b^-\right)$.

3. $\left[a_n \uparrow,\ b_n \downarrow\right]$

$$A_n = [a_n, b_n] \downarrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \left[a^-, b^+\right]$$

4. $\left[a_n \downarrow,\ b_n \uparrow\right]$

$$A_n = [a_n, b_n] \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \left(a^+, b^-\right).$$

Άσκηση

Δίνεται ότι $X \sim Exp(\lambda)$ και $\{A_n\}_{n\geq 1}$, με $A_n = \left[\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$. Επαληθεύστε ότι ισχύει η ισότητα $\lim_{n\to\infty} P\{X \in A_n\} = P\left\{X \in \lim_{n\to\infty} A_n\right\}$.

Παράδειγμα

1. Δίνεται ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$. Δείξτε ότι για την ακολουθία ενδεχομένων $\{B_n\}_{n\geq 1}$ με $B_n = \begin{cases} A_1 & n = 1 \\ A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j & n > 1 \end{cases}$, έχουμε $B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j$ και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

2. **Δείξτε την ανισότητα του Boole για άπειρα ενδεχόμενα**, δηλαδή ότι για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ισχύει $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1. Υποθέτουμε $i<j$ και έχουμε ότι

$B_i = A_1' \cdots A_{i-1}' A_i$ και $B_j = A_1' \cdots A_{i-1}' A_i' A_{i+1}' \cdots A_{j-1}' A_j$,

από όπου και $B_i B_j = \varnothing$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i &= A_1 \cup (A_1' A_2) \cup (A_1' A_2' A_3) \cup (A_1' A_2' A_3' A_4) \cup \cdots \\
&= (A_1 \cup A_2) \cup (A_1' A_2' A_3) \cup (A_1' A_2' A_3' A_4) \cup \cdots \\
&= (A_1 \cup A_2) \cup \left((A_1 \cup A_2)' A_3 \right) \cup (A_1' A_2' A_3' A_4) \cup \cdots \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup (A_1' A_2' A_3' A_4) \cup \cdots \\
&= (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \left((A_1 \cup A_2 \cup A_3)' A_4 \right) \cup \cdots \\
&\;\;\vdots \\
&= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i
\end{aligned}$$

2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$ ενώ $B_i \subseteq A_i \Leftrightarrow P(B_i) \leq P(A_i)$

που δίνει $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

$\square$

Παρατήρηση

Εάν $\{A_n\}_{n\geq 1} \uparrow$ τότε $\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j = A_{n-1}$ και $B_n = \begin{cases} A_1 & n=1 \\ A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j & n>1 \end{cases} = \begin{cases} A_1 & n=1 \\ A_n \setminus A_{n-1} & n>1 \end{cases}$.

Παράδειγμα

Δείξτε την ανισότητα του Boole για πεπερασμένα ενδεχόμενα, δηλαδή ότι $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ για κάθε $n \geq 1$

Για $n=2$ ισχύει $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

Δεχόμαστε ότι $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ και αποδεικνύουμε την ανισότητα για $n+1$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1})$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i).$$

<u>Πρόταση</u>

Η πιθανότητα είναι μια συνεχής συνολοσυνάρτηση πάνω σε μονότονες ακολουθίες ενδεχομένων. Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι εάν η $\{A_n\}_{n\ge 1}$ είναι μια μονότονη ακολουθία ενδεχομένων, τότε

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right).$$

Εάν $A_n \uparrow$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\right\}$ και τα ενδεχόμενα $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \ldots$ είναι ξένα μεταξύ τους.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(A_1 \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\right\}\right) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{P(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1} \setminus A_i)\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left(A_1 \cup \left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_{i+1} \setminus A_i)\right\}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(A_1 \cup (A_1'A_2) \cup (A_2'A_3) \cup (A_3'A_4) \cup \cdots \cup (A_{n-1}'A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Εάν $A_n \downarrow$ τότε $A_n' \uparrow$ και από τα προηγούμενα $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n') = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n'\right)$, που δίνει

$$1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \Leftrightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right),$$

□

<u>Εφαρμογή</u>

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Boole για πεπερασμένα ενδεχόμενα δείξτε την ανισότητα του Boole για άπειρα ενδεχόμενα κάνοντας χρήση της συνέχειας του μέτρου πιθανότητας πάνω σε μονότονες ακολουθίες ενδεχομένων,

Από την ανισότητα του Boole για πεπερασμένα ενδεχόμενα, έχουμε ότι

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ για κάθε $n \ge 1$.

Παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

και επειδή $C_n \equiv \bigcup_{i=1}^{n} A_i \uparrow$ έχουμε

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Άσκηση

Δίνεται ακολουθία ενδεχομένων $\mathbb{A} = \{A_n\}_{n\ge 1}$. Εάν $P(A_n) = 1, n \ge 1$ και $M_n = M_n(\mathbb{A})$, δείξτε ότι:

1. $P(M_n) = 1, \forall n \ge 1$.
2. $P(\underline{\mathbb{A}}) = P(\overline{\mathbb{A}}) = 1$.

1. $P(M_n) = P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k'\right) \ge 1 - \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k')}_{0}$.

2. Παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$ στην εξίσωση $P(M_n) = 1$ και επειδή $M_n \uparrow$, έχουμε

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(M_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} M_n\right) = P(\underline{\mathbb{A}}).$$

Το γεγονός ότι $\underline{\mathbb{A}} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$ τελικά μας δίνει $1 = P(\underline{\mathbb{A}}) \le P(\overline{\mathbb{A}})$, ή ότι $P(\overline{\mathbb{A}}) = 1$.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το χώρο πιθανότητας $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ όπου $P_X(A) = P\{X \in A\} = \int_A \mathcal{I}(0 < x < 1)\,dx, \forall A \in \mathcal{F}$, δηλαδή $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Έχουμε ότι:

$A = (0,1),\ B = \{1/n\}_{n\ge 1} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ τότε και

$$P_X(A \setminus B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X\left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{1}{n+1} < X < \frac{1}{n}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots = 1$$

όμως και $P_X(A)=1$ από όπου και $P_X(B)=0$

$$\left.\begin{array}{l} P_X(A\setminus B) = P_X(A) \Leftrightarrow P_X(A) - P_X(AB) = P_X(A) \Leftrightarrow P_X(AB) = 0 \\ P_X(A) = P_X(A\cup B) = P_X(A) + P_X(B) - P_X(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow P_X(B) = 0.$$

Το Λήμμα του Fatou

$$\boxed{P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \quad (*)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(\underline{\mathbb{A}}) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} M_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(M_n) = \sup\limits_{n\ge1} P(M_n) \\ P(M_n) = P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le P(A_k),\ \forall k\ge n \ \Rightarrow\ P(M_n) \le \inf\limits_{k\ge n} P(A_k) \end{array}\right\} \Rightarrow P(\underline{\mathbb{A}}) \le \sup\limits_{n\ge1}\inf\limits_{k\ge n} P(A_k) \\ \\ \left.\begin{array}{l} P(\overline{\mathbb{A}}) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} J_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(J_n) = \inf\limits_{n\ge1} P(J_n) \\ P(J_n) = P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \ge P(A_k),\ \forall k\ge n \ \Rightarrow\ P(J_n) \ge \sup\limits_{k\ge n} P(A_k) \end{array}\right\} \Rightarrow P(\overline{\mathbb{A}}) \ge \inf\limits_{n\ge1}\sup\limits_{k\ge n} P(A_k) \end{array}\right\} (1)$$

$$\inf_{k\ge n} P(A_k) \le \sup_{k\ge n} P(A_k) \overset{\lim\limits_{n\to\infty}(\cdot)}{\Longrightarrow} \sup_{n\ge1}\inf_{k\ge n} P(A_k) \le \inf_{n\ge1}\sup_{k\ge n} P(A_k) \quad (2)$$

Από τις ανισότητες (1) και (2) παίρνουμε την τριπλή ανισότητα $(*)$.

□

Παρατήρηση 1

Εάν $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ και ονομάσουμε την κοινή τους τιμή $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, από την τριπλή ανισότητα $(*)$ έχουμε:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \underbrace{\liminf_{n\to\infty} P(A_n) = \limsup_{n\to\infty} P(A_n)}_{\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)} \Rightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Το λήμμα Fatou μας λέει ότι μπορούμε να έχουμε $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ ακόμα και όταν η ακολουθία $\mathbb{A} = \left\{A_n\right\}_{n\geq 1}$ δεν είναι μονότονη, αρκεί να ισχύει ότι $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Παρατήρηση 2:

Εάν θέσουμε $A_n = \left\{X_n \leq x\right\}$, τότε, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq x\right\}$ και από την ανισότητα $P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ παίρνουμε:

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq x\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} P\left\{X_n \leq x\right\}$$
$$\Leftrightarrow \int_{u=-\infty}^{x} \liminf_{n\to\infty} f_{X_n}\left(u\right)du \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{u=-\infty}^{x} f_{X_n}\left(u\right)du.$$

Πρόταση

1. Εάν για τις ακολουθίες $\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}$ και $\left\{b_n\right\}_{n\geq 1}$ με $a_n > 0$ και $b_n > 0$, ισχύει $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$ όταν $n \to \infty$, τότε και οι δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ή και οι δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν.
2. Εάν $\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}$ με $0 < a_n < 1$ και $a_n \downarrow 0$ τότε:
   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-a_n\right) > 0$ είτε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-a_n\right) = 0$.

1. Επειδή $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$ όταν $n \to \infty$ σημαίνει ότι για $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για $n \geq n_0$ να έχουμε $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(l-\varepsilon\right)b_n < a_n < \left(l+\varepsilon\right)b_n$. Εάν διαλέξουμε $\varepsilon < l$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases} a_n < \left(l+\varepsilon\right)b_n \\ b_n < \left(l-\varepsilon\right)^{-1} a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \left(l+\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \left(l-\varepsilon\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{cases}.$$

2. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}$ με $0 < a_n < 1$ και $\left\{b_n\right\}_{n\geq 1}$ με $b_n \equiv \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)$, τότε $b_n > 0$ (εφόσον $0 < a_n < 1$), ενώ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}=1$$, ή ότι $\frac{a_n}{b_n}\to l>0$ με $l=1$ όταν $n\to\infty$.

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι οι δύο σειρές $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ και $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$, συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Εάν $\sum_{i=1}^{\infty}a_i<\infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{1-a_i}\right)<\infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\log(1-a_i)>-\infty$

$\Leftrightarrow \log\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i)\right)>-\infty \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i)>0$.

Εάν $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{1-a_i}\right)=\infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\log(1-a_i)=-\infty$

$\Leftrightarrow \log\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i)\right)=-\infty \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i)=0$.

□

(**Λήμματα των Borel – Cantelli**) Δίνεται ακολουθία ενδεχομένων $\mathbb{A}=\{A_i\}_{i\geq 1}$.

1. Εάν $\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)<\infty$ τότε $P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=0$.
2. Εάν $\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\infty$ και τα ενδεχόμενα A_i είναι **ανεξάρτητα**, τότε $P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1$.

1. Θέτουμε $s=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)<\infty$, θα έχουμε

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}J_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(J_n)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)-\sum_{k=1}^{n-1}P(A_k)\right\}=s-s=0 \;\Rightarrow\; P\left(\overline{\mathbb{A}}\right)=0.$$

2.

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\infty,\; 0<P(A_n)<1\right)\Rightarrow\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-P(A_k)\right)=0$$
$$\Rightarrow\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-P(A_k)\right)\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-P(A_k)\right)=0,\;\forall n\geq 1,$$

και επειδή $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-P\left(A_k\right)\right)\neq 0$, έχουμε ότι $\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-P\left(A_k\right)\right)=0,\ \forall n\geq 1$, οπότε

$$0=\prod_{k=n}^{\infty}\left(1-P\left(A_k\right)\right)=\prod_{k=n}^{\infty}P\left(A_k'\right)=P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k'\right)=P\left(M_n\left(\mathbb{A}'\right)\right) \text{ και } M_n\left(\mathbb{A}'\right)\uparrow.$$

Παίρνοντας το όριο όταν $n\to\infty$ δίνει

$$0=\lim_{n\to\infty}P\left(M_n\left(\mathbb{A}'\right)\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}M_n\left(\mathbb{A}'\right)\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k'\right)=P\left(\liminf_{n\to\infty}A_n'\right)$$
$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1.$$

□

<u>Παράδειγμα</u>

Σε καλλιέργεια βακτηριδίων (petry dish) κάθε δευτερόλεπτο τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται και πεθαίνουν.

1. Εάν η πιθανότητα τα βακτηρίδια να έχουν πεθάνει όλα έως χρόνο n είναι $1-e^{-f(n)}$, να βρεθεί η πιθανότητα εξάλειψης γ των βακτηριδίων. Για αριθμητική εφαρμογή θέστε $f(n)=\log n,\ \ f(n)=\dfrac{n^2-7}{2n^2+3n+5}$.

2. Εάν η πιθανότητα να έχουν επιζήσει βακτηρίδια την περίοδο n είναι το πολύ n^{-2}, ποία η πιθανότητα εξάλειψης γ των βακτηριδίων.

1. $A_n=\{$έως την $n^{οστή}$ γενιά έχουν πεθάνει όλα τα βακτηρίδια$\}$
$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{$τα βακτηρίδια τελικά πεθαίνουν$\}$

Παρατηρούμε ότι $A_n\uparrow$ από όπου

$$\gamma=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(A_n\right)=1-\exp\left\{\lim_{n\to\infty}f(n)\right\}$$
$$=\begin{cases}1 & f(n)=\log n\\ 1-e^{-1/2} & f(n)=\dfrac{n^2-7}{2n^2+3n+5}\end{cases}$$

2. $B_n=\{$υπάρχουν ζωντανά βακτηρίδια την περίοδο $n\}\Rightarrow P\left(B_n\right)\leq\dfrac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty \overset{BC1}{\Longrightarrow} P\left(\limsup_{n\to\infty} B_n\right) = 0$$

$\Leftrightarrow P\left(\liminf_{n\to\infty} B'_n\right) = 1 \Leftrightarrow$ (με πιθανότητα 1, υπάρχει $N \ge 1$ έτσι ώστε να πραγματοποιείται το B'_n για κάθε $n \ge N$) $\Rightarrow \gamma = 1$.

<u>Παράδειγμα</u>

Ρίχνουμε ένα μεροληπτικό νόμισμα με πιθανότητα επιτυχίας (κεφαλή) p

<u>Παράδειγμα</u>

1. Εάν για $n \ge 1$ οι τ.μ. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι Bernoulli με $P\left\{X_n = 1\right\} = p_n$ και $P\left\{X_n = 0\right\} = 1 - p_n$, δηλαδή

$X_n \sim Bin\left(1, p_n\right)$,

ορίζουμε για $n \ge 1$ την ακολουθία ενδεχομένων

$A_n = \left\{X_n = 1\right\} = \left\{\omega \in \Omega : X_n\left(\omega\right) = 1\right\}$ (τα A_n δεν χρειάζεται να είναι ανεξάρτητα).

Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ (για παράδειγμα $p_n = n^{-2}$ δίνει $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \pi^2/6$), τότε από το 1^{o} Λήμμα των Borel-Cantelli έχουμε:

$$\begin{aligned}
&P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left\{\omega \in \Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\right\} \\
&= P\left\{\omega \in \Omega : X_n\left(\omega\right) = 1 \text{ για άπειρα } n\right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow P\left\{A_n, i.o.\right\} = P\left\{X_n = 1, i.o.\right\} = 0 \\
&\qquad\qquad\Updownarrow \\
&P\left(\liminf_{n\to\infty} A'_n\right) = P\left\{\omega \in \Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε σχεδόν όλα τα } A'_n\right\} \\
&= P\left\{\omega \in \Omega : X_n\left(\omega\right) = 0 \text{ για σχεδόν όλα τα } n\right\} = 1 \\
&\Leftrightarrow P\left\{A'_n, a.a.\right\} = P\left\{X_n = 0, a.a.\right\} = 1
\end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ με πιθανότητα 1, και γράφουμε:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = P\left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\right\} = 1 .$$

<u>Παρατήρηση</u>

$$\boxed{\begin{aligned} & P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left\{\omega\in\Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\right\} = 0 \\ & \Leftrightarrow P\left\{\omega\in\Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε πεπερασμένα } A_n\right\} = P\left\{\omega\in\Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n'\right\} = 1 \end{aligned}}$$

2. Εάν για $n\geq 1$ οι τ.μ. X_n υποθέσουμε τώρα ότι είναι και **ανεξάρτητες** Bernoulli με $P\{X_n = 1\} = p_n$ και $P\{X_n = 0\} = 1 - p_n$, δηλαδή

$$X_n \overset{ind}{\sim} Bin(1, p_n),$$

και θεωρήσουμε και πάλι την ακολουθία ενδεχομένων $A_n = \{X_n = 1\}$ (όλα τα ενδεχόμενα A_n τώρα είναι ανεξάρτητα).

Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ (για παράδειγμα $p_n = n^{-1}$ δίνει $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$), επειδή οι τ.μ. X_n είναι ανεξάρτητες, τα ενδεχόμενα $A_n = \{X_n = 1\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και από το 2^ο Λήμμα των Borel-Cantelli έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} & P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left\{\omega\in\Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\right\} = P\left\{X_n = 1, \ldots\right\} = 1 \\ & \Leftrightarrow P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n'\right) = P\left\{\omega\in\Omega : \text{το } \omega \text{ ανήκει σε σχεδόν όλα τα } A_n'\right\} = P\left\{X_n = 0, \ldots\right\} = 0 \end{aligned}}.$$

Σύγκλιση ακολουθίας τ.μ. με πιθανότητα 1 – ισχυρή σύγκλιση

Λέμε ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει στην τ.μ. X με πιθανότητα 1, ή ότι η X_n **συγκλίνει σχεδόν βεβαίως (almost surely) στην** X και γράφουμε

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

όταν τα ενδεχόμενα για τα οποία η X_n δεν συγκλίνει στην X έχουν μηδενική πιθανότητα, δηλαδή

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n \neq X\right\} = P\left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = 0 ,$$

Η σύγκλιση της ακολουθίας τ.μ X_n στην τ.μ. X με πιθανότητα 1 **ορίζεται ως εξής**: για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n(\varepsilon)\}_{n\geq 1}$ με

$$A_n(\varepsilon) = \left\{\omega \in \Omega : \left|X_n(\omega) - X(\omega)\right| < \varepsilon\right\} = \left\{\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right\},$$

τότε

$$\boxed{\begin{aligned}
&X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P\left\{\left|X_n - X\right| < \varepsilon,\ a.a.\right\} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n'(\varepsilon)\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon,\ i.o.\right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mu\acute{o}\nu o\ \gamma\iota\alpha\ \pi\varepsilon\pi\varepsilon\rho\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\ \alpha\pi\acute{o}\ n\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ \left|X_n - X\right| \geq \varepsilon
\end{aligned}}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι εάν $\mathbb{A} = \{A_n\}_{n\geq 1}$, με $P(A_n) = 1,\ n \geq 1$ έχουμε $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1, \forall n \geq 1$. Έτσι θεωρώντας την ακολουθία ενδεχομένων $\left\{\liminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon_r)\right\}_{r\geq 1}$, όπου $\varepsilon_r \downarrow 0$ όταν $r \to \infty$, τότε $P\left(\bigcap_{r\geq 1} \liminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon_r)\right) = 1$. Έτσι ο ορισμός της σύγκλισης με πιθανότητα 1, **σε πιο συμπαγή μορφή** είναι:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1 \Leftrightarrow P\left(\bigcap_{r\geq 1} \liminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon_r)\right) = P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{\left|X_n - X\right| < \varepsilon_r\right\}\right) = 1.$$

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να θέσουμε $\varepsilon_r = 1/r$.

<u>Πρόταση</u>

Μια ικανή συνθήκη για σύγκλιση της ακολουθίας τ.μ $\{X_n\}_{n\geq 1}$ στην τ.μ. X με πιθανότητα 1 είναι $\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\} < \infty, \forall \varepsilon > 0$.

Θέτουμε $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ και για τα ενδεχόμενα $A_n(m) = \left\{\left|X_n - X\right| \geq \dfrac{1}{m}\right\}$ για $m \geq 1$, έχουμε από υπόθεση, ότι $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n(m)\right) < \infty,\ \forall m \geq 1$.

Από το 1ο Λήμμα των Borel – Cantelli έχουμε $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n(m)\right)=0,\ \forall m\geq 1$.

Θέτουμε $B'_m=\limsup_{n\to\infty} A_n(m)$ για $m\geq 1$ και επειδή $P(B_m)=1$ παίρνουμε

$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right)=1-P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B'_m\right)\geq 1-\sum_{m=1}^{\infty} P(B'_m)=1$, δηλαδή $P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right)=1$ ή ισοδύναμα

$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{|X_n-X|<\frac{1}{m}\right\}\right)=1$ από όπου και $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

□

Παράδειγμα

(**Πιθανότητα ενδεχομένων σε πεπερασμένο και άπειρο χρονικό ορίζοντα**).
Κάποια, καθημερινά, ρίχνει $m=5$ νομίσματα του ενός ευρώ και εκείνα που προσγειώνονται κεφαλή τα κάνει δωρεά. Την πρώτη φορά όμως που όλα τα νομίσματα προσγειωθούν γράμματα, σταματάει οποιαδήποτε δωρεά για πάντα.

Έστω $\{X_n\}_{n\geq 1}$ η ακολουθία του αριθμού των κεφαλών, δηλαδή

$X_n=\#$ των κεφαλών την $n^{οστη}$ ημέρα.

Τότε, τουλάχιστον διαισθητικά, είμαστε σίγουροι ότι κάποια μέρα το ποσό δωρεάς θα μηδενιστεί, δηλαδή ότι υπάρχει n για το οποίο $X_n=0$. Όμως, εάν θεωρήσουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο ορίζοντα ημερών, ας πούμε n, η πιθανότητα του ενδεχομένου

$A_n=\{$ την $n^{οστη}$ ημέρα έγινε δωρεά $\}=\{X_n>0\}$,

θα παραμένει θετική για κάθε $n\geq 1$. Για να το δούμε αυτό πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα A_n δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα

$P\{X_n>0\}=P\{X_n>0,\ X_{n-1}=0\}+P\{X_n>0,\ X_{n-1}>0\}$,

επειδή $P\{X_n>0,\ X_{n-1}=0\}=0$, έχουμε

$P\{X_n>0\}=P\{X_n>0,\ X_{n-1}>0\}$,

και επαγωγικά $P\{X_n>0\}=P\{X_n>0,\ X_{n-1}>0,\dots,X_1>0\}$.

Επειδή $P\{X_n>0,\ X_{n-1}>0\}=P\{X_{n-1}>0\}P\{X_n>0\mid X_{n-1}>0\}$, με $P\left\{X_n>0 \mid X_{n-1}>0\right\}=1-P\left\{X_n=0 \mid X_{n-1}>0\right\}=1-2^{-m}$,

όπου m ο αριθμός των νομισμάτων και παρατηρούμε ότι $\left(X_n=x \mid X_{n-1}>0\right) \sim Bin\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Τότε η πιθανότητα $P\left\{X_n>0\right\}$ γίνεται

$$P\left\{X_n>0\right\}=\left(1-2^{-m}\right) P\left\{X_{n-1}>0\right\}.$$

Ανακυκλώνοντας την προηγούμενη σχέση παίρνουμε τελικά

$$P\left\{X_n>0\right\}=\left(1-2^{-m}\right)^{n-1} P\left\{X_1>0\right\}$$
$$=\left(1-2^{-m}\right)^{n-1}\left(1-P\left\{X_1=0\right\}\right)=\left(1-2^{-m}\right)^n>0,\ \forall n \geq 1.$$

Δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου $A_n=\{$την $n^{οστη}$ ημέρα έγινε μη μηδενική δωρεά$\}=\left\{X_n>0\right\}$ είναι θετική για κάθε $n \geq 1$.

Όταν όμως το ζητούμενο είναι ο άπειρος χρονικός ορίζοντας (δηλαδή θέλουμε να απαντήσουμε στην ερώτηση: «το πείραμα μπορεί να πραγματοποιείται για πάντα;») θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το 1^{ο} Λήμμα των Borel – Cantelli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X_n>0\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2^{-m}\right)^n=2^m-1<\infty$$
$$\Rightarrow P\left(\overline{\mathbb{A}}\right)=0 \Leftrightarrow P\left(\underline{\mathbb{A}}'\right)=P\left\{A_n', a.a.\right\}=P\left\{X_n=0, a.a.\right\}=1 \Leftrightarrow P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n=0\right\}=1,$$

δηλαδή ο αριθμός των $\omega \in \Omega$ για τα οποία $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq 0$ είναι **πεπερασμένα**.
Έτσι είμαστε σίγουροι με πιθανότητα 1**,** ότι **κάποια μέρα** (για πεπερασμένο n) το ποσό δωρεάς θα γίνει 0 (και θα παραμείνει 0 **για πάντα)**.

<u>Άσκηση (Θεωρητική)</u>
Η σύγκλιση ακολουθίας τ.μ. ως προς πιθανότητα $X_n \xrightarrow{P} X$ όταν $n \rightarrow \infty$ (*convergence in probability*) ορίζεται με τον εξής τρόπο:

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|X_n-X\right| \geq \varepsilon\right\}=0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|X_n-X\right|<\varepsilon\right\}=1,\ \forall \varepsilon>0.$$

Να δειχθεί ότι $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n=X\right\}=1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|X_k - X\right| \geq \varepsilon\right\}\right)$$

$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\}\right)$, επειδή $\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\}\uparrow$

$= P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon,\ i.o.\right\},\ \forall\, \varepsilon > 0$.

Επειδή $P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1 \Leftrightarrow P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon,\ i.o.\right\} = 0,\ \forall\, \varepsilon > 0$

από όπου και $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,\ \forall\, \varepsilon > 0$.

□

<u>Άσκηση (Θεωρητική)</u>

Να δειχθεί ότι εάν $X_n \xrightarrow{P} X$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{n_k\}_{k\geq 1}$ τέτοια ώστε $P\left\{\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X\right\} = 1$, δηλαδή υπάρχει υπακολουθία $\left\{X_{n_k}\right\}_{k\geq 1}$ της $\{X_n\}_{n\geq 1}$ που συγκλίνει ισχυρά στην τ.μ. X .

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,\ \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \{n_k\}_{k\geq 1} : P\left\{\left|X_{n_k} - X\right| \geq 2^{-k}\right\} \leq 2^{-k} \Leftrightarrow \exists\, \{n_k\}_{k\geq 1} : \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\left|X_{n_k} - X\right| \geq 2^{-k}\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$$

$$\Rightarrow P\left\{\left|X_{n_k} - X\right| < 2^{-k}, a.a.\right\} = 1,\ \forall k \geq 1 \Rightarrow P\left\{\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X\right\} = 1.$$

□

<u>Παράρτημα Α</u>

$\liminf$ και $\limsup$ για ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Έστω $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε

$\inf \mathcal{A} = \inf_{n\geq 1} a_n =$ το μεγαλύτερο κάτω φράγμα της $\mathcal{A}$ (greatest lower bound),

$\sup \mathcal{A} = \sup_{n\geq 1} a_n =$ το μικρότερο άνω φράγμα της $\mathcal{A}$ (lowest upper bound).

$\inf\limits_{n\geq1} a_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$ το $\mathcal{A}$ έχει μικρότερο στοιχείο $\Leftrightarrow \min\limits_{n\geq1} a_n = \inf\limits_{n\geq1} a_n$

$\sup\limits_{n\geq1} a_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$ το $\mathcal{A}$ έχει μεγαλύτερο στοιχείο $\Leftrightarrow \max\limits_{n\geq1} a_n = \sup\limits_{n\geq1} a_n$

$\inf(\mathcal{A}) = -\sup(-\mathcal{A})$

Παραδείγματα

$$\inf\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\} = \inf\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\} = 0$$

$$\sup\left\{x\in\mathbb{Q}: x^2<2\right\} = \sup\left\{x\in\mathbb{Q}: -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2},\ \inf\left\{x\in\mathbb{Q}: x^2<2\right\} = -\sqrt{2}$$

$$\inf\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n\geq1\right\} = -1,\ \sup\left\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n\geq1\right\} = 1$$

Ορίζουμε τις ακολουθίες $z_n = \inf\limits_{k\geq n} a_k$ και $Z_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$ για $n\geq1$. Έχουμε ότι:

$$z_n \uparrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \sup_{n\geq1}\inf_{k\geq n} a_k = \sup\left\{\inf\{a_k : k\geq n\} : n\geq1\right\} = \liminf_{n\to\infty} a_n\ ,$$

$$Z_n \downarrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \inf_{n\geq1}\sup_{k\geq n} a_k = \inf\left\{\sup\{a_k : k\geq n\} : n\geq1\right\} = \limsup_{n\to\infty} a_n\ .$$

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$
3. $\inf\limits_{n\geq1} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \sup\limits_{n\geq1} a_n$.

Για να δείξουμε την τελευταία ανισότητα παρατηρούμε ότι:

$$\inf_{n\geq1} a_n \leq \inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{n\geq1}\inf_{k\geq n} a_k$$

$$\sup_{n\geq1} a_n \geq \sup_{k\geq n} a_k \geq \inf_{n\geq1}\sup_{k\geq n} a_k$$

$$\inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \Leftrightarrow \sup_{n\geq1}\inf_{k\geq n} a_k \leq \inf_{n\geq1}\sup_{k\geq n} a_k$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\mathcal{L} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\mathcal{L} \end{cases}$

και εάν $\inf\mathcal{L} = \sup\mathcal{L}$ τότε $\mathcal{L} = \{a\}$ και το όριο της a_n υπάρχει, δηλαδή $a_n \to a$.

2. Το σύνολο $\mathcal{L}$ αποτελείται από τα όρια όλων των συγκλινουσών υπακολουθιών a_{n_k} στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Παράδειγμα Α.1

$$\mathcal{A} = \{a_n\}_{n\geq 1} = \left\{(-1)^n\right\}_{n\geq 1} = \{-1,1,-1,1,\ldots\} \Rightarrow \mathcal{L} = \{-1,1\} = \left\{\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}, \lim_{n\to\infty} a_{2n}\right\}$$

από όπου $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{L} = -1$ και $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{L} = 1$.

Παράδειγμα Α.2

$$\{a_n\}_{n\geq 1} = \left\{n^{\sin(n\pi/2)}\right\}_{n\geq 1} = \left\{a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 1, a_5 = 5, a_6 = 1, a_7 = \frac{1}{7}, a_8 = 1, a_9 = 9, \ldots\right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_{4n-3} = \lim_{n\to\infty} n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} a_{4n-2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \\ \lim_{n\to\infty} a_{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} = \{0,1,\infty\},$$

από όπου $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{L} = 0, \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{L} = \infty$.

Παράδειγμα Α.3

Θέτουμε $\mathcal{A} = \{a_n\}_{n\geq 1}$ με $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n = odd \\ \dfrac{1}{n+1}, & n = even \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} \to 1,\ a_{2k} = \frac{1}{2k+1} \to 0\right) \Rightarrow \mathcal{L} = \{0,1\},$$

από όπου $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{L} = 0, \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{L} = 1$.

Παράδειγμα Α.4

$$\mathcal{A}=\left\{a_n\right\}_{n\geq 1}=\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right\}_{n\geq 1}$$

$$=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right),\ldots\right\}$$

$$=\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0}\underbrace{,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0}\underbrace{,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0}\underbrace{,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0},\ldots\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n=\inf\mathcal{L}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \limsup_{n\to\infty} a_n=\sup\mathcal{L}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$