<u>Ορισμός</u>**:** Η συνάρτηση $X:\Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}$ **– μετρήσιμη** εάν
$\{X \in B\} \in \mathcal{F},\ \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$ όπου $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$.
Μία $\mathcal{F}$ – μετρήσιμη συνάρτηση $X:\Omega \to \mathbb{R}$, ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή**.

<u>Ορισμός</u>**:** Ο **χώρος καταστάσεων** $\mathcal{S}_X$ της τυχαίας μεταβλητής $X:\Omega \to \mathbb{R}$, είναι το πεδίο τιμών της X. Δηλαδή είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}$

$$\mathcal{S}_X = X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}.$$

<u>Ορισμός</u>**:** Η συνάρτηση $X = (X_1, X_2):\Omega \to \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε
$\omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)) = (x_1, x_2)$, είναι $\mathcal{F}$ – μετρήσιμη εάν
$\{X \in B\} \in \mathcal{F},\ \forall\ B = B_1 \times B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2),$ όπου $\{X \in B\}$ είναι το **από κοινού ενδεχόμενο:**

$$\{X \in B\} = \{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in B_1, X_2(\omega) \in B_2\}$$
$$= X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2) = \{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\}.$$

Την συνάρτηση X την ονομάζουμε **δισδιάστατη διανυσματική τυχαία μεταβλητή**.

<u>Ορισμός</u> Ο χώρος καταστάσεων $\mathcal{S}_X = \mathcal{S}_{X_1, X_2}$ της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (X_1, X_2):\Omega \to \mathbb{R}^2$ είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{S}_X = X(\Omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists\, \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) = x_1,\ X_2(\omega) = x_2\}.$$

<u>Ορισμός</u> Το $\sigma-$πεδίο $\sigma(X)$, είναι το $\sigma-$ **πεδίο που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή** X κατά την έννοια:

$$\sigma(X) = \sigma\{\{X \in B\} : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Όταν $X = (X_1, X_2):\Omega \to \mathbb{R}^2$ τότε

$$\sigma(X) = \sigma(X_1, X_2) = \sigma\{\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} : B_1 \times B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)\} \subseteq \mathcal{F}.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε σε $d-$διάστατες τυχαίες μεταβλητές (διανυσματικές τ.μ. ή δ.τ.μ.) $X=(X_1,\ldots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$, $d-$διάστατα από κοινού ενδεχόμενα και $d-$διάστατα παραγόμενα $\sigma-$πεδία.

Για παράδειγμα εάν $X=(X_1,\ldots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε
$\omega\mapsto X(\omega)=\big(X_1(\omega),\ldots,X_d(\omega)\big)=(x_1,\ldots,x_d)$

$$
\begin{aligned}
&\{X\in B\}=\{X_1\in B_1,\ldots,X_d\in B_d\}\\
&=\{\omega\in\Omega:X_1(\omega)\in B_1,\ldots,X_d(\omega)\in B_d\}=X_1^{-1}(B_1)\cap\ldots\cap X_d^{-1}(B_d)\\
&=\{X_1\in B_1\}\cap\ldots\cap\{X_d\in B_d\},
\end{aligned}
$$

ενώ
$$\sigma(X)=\sigma(X_1,\ldots,X_d)=\sigma\left\{\bigcap_{i=1}^{d}\{X_i\in B_i\}:\ B_1\times\cdots\times B_d\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

<u>Ορισμός</u> Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι λέμε ότι **είναι $\mathbb{R}-$μετρήσιμη (συνάρτηση Borel),** εάν

$$\{g\in B\}=\{x\in\mathbb{R}:g(x)\in B\}=g^{-1}(B)\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ \forall B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Έτσι χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Borel, μπορούμε να κατασκευάσουμε τυχαίες μεταβλητές που είναι συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών.

Εάν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Borel τότε έχουμε $\{g(X)\in B\}=\{X\in g^{-1}(B)\}$. Επειδή όμως η g είναι συνάρτηση Borel, έχουμε $g^{-1}(B)\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, από τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής τότε έχουμε:

$$\{g(X)\in B\}=\{X\in g^{-1}(B)\}=X^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\in\sigma(X)\subset\mathcal{F}$$

$$\Omega\xrightarrow{X(\,\cdot\,)}\mathbb{R}\xrightarrow{g(\,\cdot\,)}\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \Omega\xrightarrow{g(X(\,\cdot\,))=g\circ X(\,\cdot\,)}\mathbb{R}.$$

Από τα προηγούμενα γίνεται φανερό ότι $\sigma\big(g(X)\big)\subseteq\sigma(X)$.

<u>Ορισμός</u> Κάθε τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$ **παράγει μέτρο πιθανότητας** $P_X(\,\cdot\,):\mathfrak{B}(\mathbb{R})\to[0,1]$ έτσι ώστε $P_X(B)=P\big(X^{-1}(B)\big)=P\{X\in B\},\ \forall B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R})\xrightarrow{X^{-1}(\,\cdot\,)}\underbrace{\sigma(X)}_{\subseteq\mathcal{F}}\xrightarrow{P(\,\cdot\,)}[0,1]\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B}(\mathbb{R})\xrightarrow{P(X^{-1}(\,\cdot\,))=P_X(\,\cdot\,)}[0,1].$$

<u>Ορισμός</u> Η διανυσματική τυχαία μεταβλητή $X=\left(X_1,\ldots,X_d\right):\Omega\to\mathbb{R}^d$ παράγει το μέτρο πιθανότητας $P_X=P_{X_1,\ldots,X_d}:\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\to\left[0,1\right]$ έτσι ώστε για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, της μορφής $B=B_1\times\cdots\times B_d\in\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ να έχουμε:

$$P_X\left(B\right)=P\left(X^{-1}\left(B\right)\right)=P\left\{X_1\in B_1,\ldots,X_d\in B_d\right\}=P\left(\left\{X_1\in B_1\right\}\cap\ldots\cap\left\{X_d\in B_d\right\}\right).$$

<u>Ορισμός:</u> Λέμε ότι το μέτρο πιθανότητας P_X είναι **συνεχές** όταν ο χώρος καταστάσεων $\mathcal{S}_X=X\left(\Omega\right)$ είναι συνεχής, $\mathcal{S}_X\subseteq\mathbb{R}^d$, και υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $f_X:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_0^+$, η **από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας**, για την οποία ισχύει

$$P\left(\Omega\right)=P\left\{X\in\mathbb{R}^d\right\}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f_X\left(x\right)dx=\int_{x_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_d=-\infty}^{\infty}f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1,\ldots,x_d\right)dx_d\cdots dx_1=1.$$

<u>Ορισμός</u> Λέμε ότι το μέτρο πιθανότητας P_X είναι **διακριτό** όταν ο χώρος καταστάσεων $\mathcal{S}_X=X\left(\Omega\right)$ είναι διακριτός, δηλαδή $\mathcal{S}_X\subseteq\mathbb{Z}^d$, και υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $p_X:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}_0^+$, η **από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας**, για την οποία ισχύει:

$$P\left(\Omega\right)=P\left\{X\in\mathbb{Z}^d\right\}=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}p_X\left(x\right)=\sum_{x_1\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{x_d\in\mathbb{Z}}p_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1,\ldots,x_d\right)=1,$$

όπου $p_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1,\ldots,x_d\right)=P\left\{X_1=x_1,\ldots,X_d=x_d\right\}$.

<u>Μονοδιάστατες πυκνότητες πιθανότητας</u>

Όταν $X:\Omega\to\mathbb{R}$, είναι συνεχής, με το συμβολισμό $P_X\left(dx\right)$ εννοούμε την πιθανότητα που περικλείεται στο απειροστό σύνολο $(x,x+dx]$

$$P_X\left(dx\right)=P\left\{X\in(x,x+dx]\right\}=P\left\{x<X\le x+dx\right\}=P\left\{\omega\in\Omega:x<X\left(\omega\right)\le x+dx\right\}.$$

Εάν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}_0^+$ έχουμε

$$P\left\{x<X\le x+dx\right\}=\int_x^{x+dx}f_X\left(u\right)du.$$

Θεωρώντας ότι το dx είναι μια πολύ μικρή (απειροστή) μεταβολή, δεχόμαστε ότι η τιμή $f_X\left(u\right)$ δεν αλλάζει όταν $u\in(x,x+dx]$ και παραμένει ίση με $f_X\left(x\right)$, με αποτέλεσμα

$$P_X(dx) = P\{x < X \le x+dx\} = \int_x^{x+dx} f_X(u)\,du = f_X(x)\int_x^{x+dx} du = f_X(x)\,dx$$
$$\Rightarrow P_X(dx) = f_X(x)\,dx$$

Έτσι για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο B (δηλαδή Borel υποσύνολο) του $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$P_X(B) = P\{X \in B\} = \int_B P_X(dx) = \int_B f_X(x)\,dx .$$

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά Lebesgue έχουμε

$$P_X(B) = P\{X \in B\} = \int_{\{X \in B\}} P(d\omega) = \int_{\omega \in X^{-1}(B)} P\big((\omega, \omega + d\omega]\big)$$
$$= \int_{X(\omega)=x\in B} P\big(X^{-1}(x, x+dx]\big) = \int_{x\in B} P\{x < X \le x+dx\} = \int_{x\in B} f_X(x)\,dx$$

Η **(αθροιστική) συνάρτηση κατανομής** $F_X(\cdot):\mathbb{R}^1 \to [0,1]$ της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται σαν η πιθανότητα $F_X(x) = P\{X \le x\}$. Όταν υπάρχει η πυκνότητα f_X, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{u=-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{u \le x} f_X(u)\,du .$$

Ισοδύναμα

$$dF_X(x) = F_X(x+dx) - F_X(x) = P\{X \le x+dx\} - P\{X \le x\} = P\{x < X \le x+dx\}$$
$$= P_X(dx) = f_X(x)\,dx .$$

Όταν $X:\Omega \to \mathbb{R}$, είναι διακριτή, με μάζα $p_X:\mathbb{Z}^1 \to \mathbb{R}_0^+$, η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής $F_X(\cdot):\mathbb{R}^1 \to [0,1]$ της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται σαν η πιθανότητα $F_X(x) = P\{X \le x\}$.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \sum_{k \le x} p_X(k) .$$

Πρόταση

Στην μονοδιάστατη περίπτωση η συνάρτηση κατανομής $F_X = P\{X \le x\}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

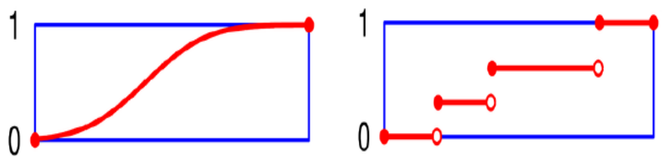
1. Η $F_X(x)$ είναι αύξουσα για $-\infty < x < \infty$.

2. $F_X(x) \to \begin{Bmatrix} 1, & x \to +\infty \\ 0, & x \to -\infty \end{Bmatrix}$.

3. $0 \le F_X(x) \le 1$.

4. $F_X(x) = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{h\to 0} F_X(x+h), & X = \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma, \eta\ F_X\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\nu\tau o\upsilon\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \\ \lim\limits_{h\to 0+} F_X(x+h), & X = \delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\eta, \eta\ F_X\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma\ \mu o\nu o\ \alpha\pi o\ \tau\alpha\ \delta\varepsilon\xi\iota\alpha \end{Bmatrix}$

Στο παρακάτω σχήμα, στα δεξιά η F_X είναι παντού συνεχής. Στο δεξί σχήμα η F_X είναι συνεχής μόνο από τα δεξιά.



1. $x_1 \le x_2 \iff (-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \iff \underbrace{X^{-1}(-\infty, x_1]}_{\{X \le x_1\}} \subseteq \underbrace{X^{-1}(-\infty, x_2]}_{\{X \le x_2\}}$

$\iff P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\} \iff F_X(x_1) \le F_X(x_2)$.

2α. $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P\{X \le x\} = \lim\limits_{x\to\infty} P\{X \in (-\infty, x]\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\{X \in (-\infty, n]\}$

$= P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\{X \in (-\infty, n]\}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \in (-\infty, n]\}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(-\infty, n]\right)$

$= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n]\right)\right) = P\left(X^{-1}(-\infty, \infty)\right) = P\{-\infty < X < \infty\} = P(\Omega) = 1$.

2β. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P\{X \le x\} = \lim\limits_{x\to-\infty} P\{X \in (-\infty, x]\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\{X \in (-\infty, -n]\}$

$= P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\{X \in (-\infty, -n]\}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \in (-\infty, -n]\}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(-\infty, -n]\right)$

$= P\left(X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, -n]\right)\right) = P\left(X^{-1}(\varnothing)\right) = P(\varnothing) = 0$.

3. $0 = \inf F_X(x) \le F_X(x) \le 1 = \sup F_X(x)$

ή ισοδύναμα, εφόσον η $F_X(x)$ είναι το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνάρτησης

$F_X(x) = \int\limits_{u=-\infty}^{x} f_X(u)\,du \ge 0$ και $1 = \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} f_X(u)\,du \ge \int\limits_{u=-\infty}^{x} f_X(u)\,du$.

4. Έστω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ με $x_n \to x+$ (ισοδύναμα $x_n \downarrow x$) τότε

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\left\{X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right\}$$

Επειδή $\left\{X \in \bigcap_{i\in I} B_i\right\} = X^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} X^{-1}(B_i) = \bigcap_{i\in I}\{X \in B_i\}$

$$F_X(x) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \in (-\infty, x_n]\}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \le x_n\}\right)$$

Και επειδή $\{X \le x_n\} \downarrow$ θα έχουμε

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} P\{X \le x_n\} = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x+).$$

Δηλαδή δείξαμε ότι $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ όταν $x_n \downarrow x$. **Με άλλα λόγια η α.σ.κ. είναι πάντα συνεχής από τα δεξιά.**

Άσκηση
Δείξτε ότι:

1. $P\{X < x\} = F_X(x-)$.
2. $P\{X = x\} = F_X(x) - F_X(x-)$.

1. Έστω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$ με $x_n \to x-$ (ισοδύναμα $x_n \uparrow x$) τότε

$$P\{X < x\} = P\{X \in (-\infty, x)\} = P\left\{X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right\}.$$

Επειδή $\left\{X \in \bigcup_{i\in I} B_i\right\} = X^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} X^{-1}(B_i) = \bigcup_{i\in I}\{X \in B_i\}$ η $P\{X < x\}$ γίνεται

$$P\{X < x\} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \in (-\infty, x_n]\}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \le x_n\}\right)$$

Και επειδή $\{X \le x_n\} \uparrow$ θα έχουμε

$$P\{X < x\} = \lim_{n\to\infty} P\{X \le x_n\} = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x-).$$

2. $P\{X = x\} = P(\{X \le x\} \setminus \{X < x\}) = P\{X \le x\} - P\{X < x\} = F_X(x) - F_X(x-)$.

Άσκηση

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και το αντίστοιχο failure rate[1] όταν:

1. $X \sim Ga(3,b)$ για $b > 0$ [2].
2. $X \sim Ca(a,b),\ a > 0, b > 0$ για $b > 0$.
3. $X \sim Exp(\lambda),\ \lambda > 0$
4. $X \sim Wei(\lambda, b),\ \lambda > 0, b > 0$

1. Όταν $x \le 0$, $F_X(x) = 0$.

Για $x > 0$ έχουμε

$$F_X(x) = \int_{u=-\infty}^{x} Ga(u \mid 3,b)\,du = \frac{b^3}{\Gamma(3)} \int_{u=0}^{x} u^2 e^{-bu} 1(u > 0)\,du = \frac{b^3}{2} \int_{u=0}^{x} u^2 e^{-bu}\,du$$
$$= 1 - e^{-bx}\left(\frac{b^2x^2}{2} + bx + 1\right).$$

Συνολικά έχουμε

[1] Το failure rate (ή hazard rate) είναι η συνάρτηση

$$H_X(x) = \frac{d}{dx}\log\left(\frac{1}{S_X(x)}\right) = -\frac{1}{S_X(x)}\frac{dS_X(x)}{dx}$$, όπου $S_X(x) = 1 - F_X(x)$ η συνάρτηση survival. Το **Failure rate** είναι η συχνότητα με την οποία ένα σύστημα (είτε στοιχείο του συστήματος) αποτυγχάνει να λειτουργήσει, και βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία αξιοπιστίας.

[2] Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{x} Ga(u \mid a,b)\,du$ έχει αναλυτική αναπαράσταση μόνο όταν το a είναι θετικός ακέραιος.

$$F_X(x)=\left\{1-e^{-bx}\left(\frac{b^2x^2}{2}+bx+1\right)\right\}1(x>0) \text{ για } -\infty<x<\infty .$$

2. $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} Ca(u\,|\,a,b)\,du=\frac{b}{\pi}\int\limits_{u=-\infty}^{x}\frac{du}{b^2+(u-a)^2}=\frac{1}{b\pi}\int_{u=-\infty}^{x}\frac{du}{1+((u-a)/b)^2}$

$=\frac{1}{\pi}\int_{z=-\infty}^{(x-a)/b}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{\pi}\Big[\arctan(z)\Big]_{-\infty}^{(x-a)/b}=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)-\arctan(-\infty)\right)$

$=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+\frac{\pi}{2}\right), -\infty<x<\infty .$

3. Όταν $x\le 0$, $F_X(x)=0$.

$$F_X(x)=\int\limits_{u=-\infty}^{x} Exp(u|\,\lambda)\,du=\lambda\int\limits_{u=0}^{x}e^{-\lambda u}du=1-e^{-\lambda x}.$$

Έτσι

$F_X(x)=\left\{1-e^{-\lambda x}\right\}1(x>0)$ και $S_X(x)=e^{-\lambda x}1(x>0)$ για $-\infty<x<\infty$

$H_X(x)=\lambda$

4. Όταν $x\le 0$, $F_X(x)=0$.

$$F_X(x)=\int\limits_{u=-\infty}^{x} Wei(u|\,\lambda,b)\,du=\lambda\int\limits_{u=0}^{x}u^{b-1}\exp\left(-\frac{\lambda}{b}u^b\right)du=\int\limits_{z=0}^{\frac{\lambda}{b}x^b}e^{-z}dz=1-\exp\left(-\frac{\lambda}{b}x^b\right).$$

Έτσι

$F_X(x)=\left\{1-\exp\left(-\frac{\lambda}{b}x^{\lambda}\right)\right\}1(x>0)$ και $S_X(x)=\exp\left(-\frac{\lambda}{b}x^{\lambda}\right)1(x>0)$ για $-\infty<x<\infty$,

$H_X(x)=\lambda x^{b-1}$.

<u>Από κοινού πυκνότητες πιθανότητας</u>

Όταν $X=(X_1,\ldots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$ συμβολίζουμε με $P_{X_1,\ldots,X_d}(dx_1,\ldots,dx_d)$ την πιθανότητα του απειροστού συνόλου $(x_1,x_1+dx_1]\times\cdots\times(x_d,x_d+dx_d]$

$$P_{X_1,\ldots,X_d}(dx_1,\ldots,dx_d)=P\left\{(X_1,\ldots,X_d)\in(x_1,x_1+dx_1]\times\cdots\times(x_d,x_d+dx_d]\right\}$$

$$= P\left\{x_1 < X_1 \le x_1 + dx_1, \ldots, x_n < X_n \le x_n + dx_n\right\}.$$

Εάν λοιπόν η τυχαία μεταβλητή $X = \left(X_1, \ldots, X_d\right)$ έχει από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{X_1,\ldots,X_d}$ τότε

$$P\left\{x_1 < X_1 \le x_1 + dx_1, \ldots, x_d < X_d \le x_d + dx_d\right\} = \int_{u_1 = x_1}^{x_1 + dx_1} \cdots \int_{u_d = x_d}^{x_d + dx_d} f_{X_1,\ldots,X_d}\left(u_1, \ldots, u_d\right) du_d \cdots du_1,$$

επειδή το $dx_1 \cdots dx_d$ είναι μια πολύ μικρή μεταβολή δεχόμαστε ότι η συνάρτηση $f_{X_1,\ldots,X_d}\left(u_1, \ldots, u_d\right)$ δεν αλλάζει για $\left(u_1, \ldots, u_d\right) \in (x_1, x_1 + dx_1] \times \cdots \times (x_d, x_d + dx_d]$. Η τιμή της παραμένει σταθερή και ίση με $f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1, \ldots, x_d\right)$, έτσι

$$P_{X_1,\ldots,X_d}\left(dx_1, \ldots, dx_d\right) = f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1, \ldots, x_d\right) \int_{u_1 = x_1}^{x_1 + dx_1} \cdots \int_{u_n = x_d}^{x_d + dx_d} du_d \cdots du_1$$
$$= f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1, \ldots, x_d\right) dx_1 \cdots dx_d.$$

Τότε για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο $B = B_1 \times \cdots \times B_d$ του $\mathbb{R}^d$ θα έχουμε

$$P\left\{X \in B\right\} = P_X\left(B\right) = \int_B P_X\left(dx\right) = \int_B f_X\left(x\right) dx$$
$$= P\left\{X_1 \in B_1, \ldots, X_d \in B_d\right\} = \int_{x_1 \in B_1} \cdots \int_{x_d \in B_d} f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1, \ldots, x_d\right) dx_d \cdots dx_1$$

Η **συνάρτηση κατανομής** $F_{X_1,\ldots,X_n}$ της δ.τ.μ. $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1, \ldots, x_d\right) = P\left\{X_1 \le x_1, \ldots, X_d \le x_d\right\} = \int_{u_1 = -\infty}^{x_1} \cdots \int_{u_d = -\infty}^{x_d} f_{X_1,\ldots,X_d}\left(u_1, \ldots, u_d\right) du_d \cdots du_1$$

<u>Ορισμός</u> Λέμε ότι το μέτρο πιθανότητας $P_X\left(\cdot\right)$ είναι **διακριτό** όταν ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός $\mathcal{S}_X = X\left(\Omega\right) = \left\{\left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right), \ldots, \left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)\right\},\ k \le \infty$, δηλαδή το $\mathcal{S}_X$ είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση (η από κοινού μάζα πιθανότητας) $P_X\left(x\right) = P\left\{X = x\right\}$ τέτοια ώστε

$$P\left(\Omega\right) = P\left\{X \in \mathbb{R}\right\} = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} P\left\{X = x\right\} = \sum_{i=1}^{k} P\left\{X_1 = x_1^i, \ldots, X_n = x_n^i\right\} = 1,$$

και $P\left\{X \in B\right\} = P_X\left(B\right) = \sum_{x \in B} P\left\{X = x\right\}$.

Η **συνάρτηση κατανομής** της διακριτής διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από το άθροισμα

$$F_X(x) = P\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\} = \sum_{k_1 \le x_1} \cdots \sum_{k_n \le x_n} P\{X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n\}$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{x_1} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{x_n} p_{X_1,\dots,X_n}(k_1,\dots,k_n)$$

<u>Πρόταση (οι ιδιότητες της από κοινού αθροιστικής συνάρτησης κατανομής)</u>

Εάν η $F_{X,Y}(x,y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής δισδιάστατης τ.μ. $Z = (\mathrm{X},\mathrm{Y}) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, όπου $\omega \mapsto Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ θα έχουμε

$$F_Z(z) = F_{X,Y}(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du, & X,Y \ \text{διακριτές} \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{x} \sum_{l=-\infty}^{y} p_{X,Y}(k,l), & X,Y \ \text{συνεχές} \end{array} \right\}.$$

Οι ιδιότητες της $F_{X,Y}(x,y)$ είναι οι εξής:

1. $0 \le F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) \le 1$.

2. Εάν $x_1 \le x_2$ και $y_1 \le y_2$ τότε $F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x_1,y_1) \le \left\{ \begin{array}{l} F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x_2,y_1) \\ F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x_1,y_2) \end{array} \right\} \le F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x_2,y_2)$.

3. $\lim\limits_{x,y \to \infty} F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) = 1$.

4. $F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) \to \left\{ \begin{array}{ll} F_{\mathrm{Y}}(y), & x \to \infty \\ F_X(x), & y \to \infty \end{array} \right\}$, όπου $F_X(x)$ και $F_{\mathrm{Y}}(y)$ οι περιθώριες α.σ.κ. των τ.μ. X και Y αντιστοίχως.

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) = 0$

6. $F_{X,Y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0} F_{X,Y}(x+h,y),\ X = \text{συνεχής} \\ \lim\limits_{h \to 0^+} F_{X,Y}(x+h,y),\ X = \text{διακριτή} \end{array} \right\}$,

$$F_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{Bmatrix} \lim\limits_{k\to 0} F_{X,Y}\left(x\acute{\eta}\, y+k\right), Y=\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\ \ \varsigma \\ \lim\limits_{k\to 0^{+}} F_{X,Y}\left(x\acute{\eta}\, y+k\right), Y=\delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau \end{Bmatrix}$$

7. $P\left\{x_1 < X \le x_2, Y \le y\right\} = F_{X,Y}\left(x_2, y\right) - F_{X,Y}\left(x_1, y\right)$

$P\left\{X \le x, y_1 < Y \le y_2\right\} = F_{X,Y}\left(x, y_2\right) - F_{X,Y}\left(x, y_1\right)$

1. Εμφανώς έχουμε ότι $F_{X,Y}\left(x,y\right)=\int\limits_{v=-\infty}^{y}\int\limits_{u=-\infty}^{x} f_{X,Y}\left(u,v\right)dudv \ge 0,$ για κάθε $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$, ενώ

$$F_{X,Y}\left(x,y\right)=\int\limits_{v=-\infty}^{y}\int\limits_{u=-\infty}^{x} f_{X,Y}\left(u,v\right)dudv \le \int\limits_{v=-\infty}^{y}\int\limits_{u=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(u,v\right)dudv$$
$$=\int\limits_{v=-\infty}^{y} f_Y\left(v\right)dv \le \int\limits_{v=-\infty}^{\infty} f_Y\left(v\right)dv = 1.$$

Παρατηρήστε ότι $F_{X,Y}\left(x,y\right)\le F_Y\left(y\right)$ και $F_{X,Y}\left(x,y\right)\le F_X\left(x\right)$.

2. $x_1 \le x_2 \Leftrightarrow (-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \Leftrightarrow X^{-1}(-\infty, x_1] \subseteq X^{-1}(-\infty, x_2]$
$\Rightarrow X^{-1}(-\infty, x_1] \cap Y^{-1}(-\infty, y_1] \subseteq X^{-1}(-\infty, x_2] \cap Y^{-1}(-\infty, y_1]$
$\Leftrightarrow \left\{X \le x_1\right\} \cap \left\{Y \le y_1\right\} \subseteq \left\{X \le x_2\right\} \cap \left\{Y \le y_1\right\} \Leftrightarrow \left\{X \le x_1, Y \le y_1\right\} \subseteq \left\{X \le x_2, Y \le y_1\right\}$
$\Leftrightarrow P\left\{X \le x_1, Y \le y_1\right\} \le P\left\{X \le x_2, Y \le y_1\right\} \Leftrightarrow F_{X,Y}\left(x_1, y_1\right) \le F_{X,Y}\left(x_2, y_1\right)$

Και οι άλλες τρείς ανισότητες αποδεικνύονται παρόμοια.

3. Από τις 1. και 2. έχουμε ότι $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=a<\infty$. Εφόσον το προηγούμενο όριο υπάρχει, θα είναι η κοινή τιμή a των επάλληλων ορίων $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=a=\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)$. Αρκεί λοιπόν, να βρούμε το όριο $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)$.

Έχουμε
$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} F_{\mathrm{X,Y}}\left(m,n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} P\left\{X \le m, Y \le n\right\}$

Θέτουμε $\mathbb{A}^{(n)}=\left\{\left\{X \le m, Y \le n\right\}\right\}_{m=1}^{\infty}=\left\{\left\{X \le m\right\}\cap\left\{Y \le n\right\}\right\}_{m=1}^{\infty}$, προφανώς $\mathbb{A}^{(n)}\uparrow$ για $\forall n \ge 1$, και

$$\lim_{m\to\infty}\left\{X\le m, Y\le n\right\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\le m, Y\le n\right\}=\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\le m\right\}\right)\cap\left\{Y\le n\right\}$$
$$=\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\in\left(-\infty, m\right]\right\}\right)\cap\left\{Y\le n\right\}=\left\{X\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(-\infty, m\right]\right\}\cap\left\{Y\le n\right\}$$
$$=\left\{X\in\left(-\infty,\infty\right)\right\}\cap\left\{Y\le n\right\}=\Omega\cap\left\{Y\le n\right\}=\left\{Y\le n\right\},$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\lim_{m\to\infty}\left\{X\le m, Y\le n\right\}\right)=\lim_{n\to\infty}P\left\{Y\le n\right\}.$$

Θέτουμε $\mathbb{A}=\left\{\left\{Y\le n\right\}\right\}_{m=1}^{\infty}$, προφανώς $\mathbb{A}\uparrow$, έτσι

$$\lim_{n\to\infty}\left\{Y\le n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{Y\in\left(-\infty,n\right]\right\}=\left\{Y\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(-\infty,n\right]\right\}=\left\{Y\in\left(-\infty,\infty\right)\right\}=\Omega$$

που δίνει

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{Y\le n\right\}\right)=P\left(\Omega\right)=1.$$

Η απόδειξη με εναλλαγμένα τα όρια είναι παρόμοια.

4. $\lim_{x\to\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=\lim_{m\to\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(m,y\right)=\lim_{m\to\infty}P\left\{X\le m, Y\le y\right\}$.

Θέτουμε $\mathbb{A}^{(y)}=\left\{\left\{X\le m, Y\le y\right\}\right\}_{m\ge 1}$, προφανώς $\mathbb{A}^{(y)}\uparrow$ για $\forall n\ge 1$, έτσι

$$\lim_{x\to\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=P\left(\lim_{m\to\infty}\left\{X\le m, Y\le y\right\}\right)=P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\le m, Y\le y\right\}\right)$$
$$=P\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\le m\right\}\right)\cap\left\{Y\le y\right\}\right)=P\left(\Omega\cap\left\{Y\le y\right\}\right)=P\left\{Y\le y\right\}=F_{Y}\left(y\right).$$

Παρόμοια είναι και η απόδειξη του $\lim_{y\to\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=F_{X}\left(x\right)$.

5. $\lim_{x\to-\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=\lim_{m\to\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(-m,y\right)=\lim_{m\to\infty}P\left\{X\le -m, Y\le y\right\}$

Θέτουμε $\mathbb{A}_{y}=\left\{\left\{X\le -m, Y\le y\right\}\right\}_{m\ge 1}$, προφανώς $\mathbb{A}_{y}\downarrow$ για $\forall n\ge 1$, έτσι

$$\lim_{x\to-\infty}F_{\mathrm{X,Y}}\left(x,y\right)=P\left(\lim_{m\to\infty}\left\{X\le -m, Y\le y\right\}\right)=P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{X\le -m, Y\le y\right\}\right)$$
$$=P\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{X\le -m\right\}\right)\cap\left\{Y\le y\right\}\right)=P\left(\varnothing\cap\left\{Y\le y\right\}\right)=P\left(\varnothing\right)=0.$$

Παρόμοια είναι και η απόδειξη του $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y)=0$.

6. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη 4. της προηγούμενης πρότασης.

7. $P\{x_1 < X \le x_2, Y \le y\} = P(\{X \le x_2, Y \le y\} \setminus \{X \le x_1, Y \le y\})$
$= P(\{X \le x_2, Y \le y\}) - P(\{X \le x_2, Y \le y\} \cap \{X \le x_1, Y \le y\})$
$= P(\{X \le x_2, Y \le y\}) - P(\{X \le x_1, Y \le y\}) = F_{X,Y}(x_2,y) - F_{X,Y}(x_1,y)$

Παρόμοια είναι και η απόδειξη και για την δεύτερη εξίσωση.

<u>Άσκηση</u>
Εάν $(X,Y)\sim F_{X,Y}$ (οι τ.μ. X,Y είναι από κοινού συνεχείς είτε από κοινού διακριτές) να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

1. $\{X > a, Y > b\}$,
2. $\{X \ge a, Y \ge b\}$,
3. $\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\}$,
4. $\{a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2\}$,

όπου είναι δυνατόν σαν συναρτήσεις των $F_{X,Y}, F_X, F_Y$ και $p_{X,Y}, p_X, p_Y$.

1. $\{X > a, Y > b\}' = (\{X > a\} \cap \{Y > b\})' = \{X \le a\} \cup \{Y \le b\}$
$\Rightarrow P\{X > a, Y > b\} = 1 - P(\{X \le a\} \cup \{Y \le b\})$
$= 1 - P\{X \le a\} - P\{Y \le b\} + P\{X \le a, Y \le b\} = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{X,Y}(a,b)$.

2. $P\{X \ge a, Y \ge b\} = 1 - P(\{X < a\} \cup \{Y < b\})$
$= 1 - P\{X < a\} - P\{Y < b\} + P\{X < a, Y < b\}$
$= 1 - (P\{X \le a\} - P\{X = a\}) - (P\{Y \le b\} - P\{Y = b\})$
$+ (P\{X \le a, Y \le b\} - P\{X = a, Y = b\})$
$= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{X,Y}(a,b) + p_X(a) + p_Y(b) - p_{X,Y}(a,b)$

3. $P\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} = P\{X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} - P\{X \le a_1, b_1 < Y \le b_2\}$
$= P\{X \le a_2, Y \le b_2\} - P\{X \le a_2, Y \le b_1\} - (P\{X \le a_1, Y \le b_2\} - P\{X \le a_1, Y \le b_1\})$
$= F_{X,Y}(a_2,b_2) - F_{X,Y}(a_2,b_1) - F_{X,Y}(a_1,b_2) + F_{X,Y}(a_1,b_1)$

4. $P\{a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2\} = P\{X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} - P\{X < a_1, b_1 < Y \le b_2\}$
$= P\{X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} - \left(P\{X \le a_1, b_1 < Y \le b_2\} - P\{X = a_1, b_1 < Y \le b_2\}\right)$
$= P\{X \le a_2, Y \le b_2\} - P\{X \le a_2, Y \le b_1\} - P\{X \le a_1, Y \le b_2\} + P\{X \le a_1, Y \le b_1\}$
$+P\{X = a_1, Y \le b_2\} - P\{X = a_1, Y \le b_1\}$
$= F_{X,Y}(a_2,b_2) - F_{X,Y}(a_2,b_1) - F_{X,Y}(a_1,b_2) + F_{X,Y}(a_1,b_1)$
$+P\{X = a_1, Y \le b_2\} - P\{X = a_1, Y \le b_1\}$
$= F_{X,Y}(a_2,b_2) - F_{X,Y}(a_2,b_1) - F_{X,Y}(a_1,b_2) + F_{X,Y}(a_1,b_1)$
$+P\{X = a_1\} P\{Y \le b_2 \mid X = a_1\} - P\{X = a_1\} P\{Y \le b_1 \mid X = a_1\}$
$= F_{X,Y}(a_2,b_2) - F_{X,Y}(a_2,b_1) - F_{X,Y}(a_1,b_2) + F_{X,Y}(a_1,b_1)$
$+p_X(a_1) F_{Y|X}(b_2 \mid a_1) - p_X(a_1) F_{Y|X}(b_1 \mid a_1)$

<u>Άσκηση</u>
Εάν $(X,Y,Z) \sim F_{X,Y,Z}$ (οι τ.μ. X,Y,Z είναι από κοινού συνεχείς είτε από κοινού διακριτές) να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

1. $\{X > a, Y > b, Z > c\}$
2. $\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2, c_1 < Z \le c_2\}$

<u>Άσκηση</u>
Εάν $(X,Y) \sim F_{X,Y}$ και οι τ.μ. X,Y είναι συνεχείς, δείξτε ότι:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

Γνωρίζουμε ότι $f_{X,Y}(x,y)dxdy = P\{x < X \le x+dx, y < Y \le y+dy\}$, όμως

$$P\{x < X \le x+dx, y < Y \le y+dy\} = P\{X \le x+dx, y < Y \le y+dy\} - P\{X \le x, y < Y \le y+dy\}$$
$$= P\{X \le x+dx, Y \le y+dy\} - P\{X \le x+dx, Y \le y\} - P\{X \le x, Y \le y+dy\} + P\{X \le x, Y \le y\}$$
$$= F_{X,Y}(x+dx, y+dy) - F_{X,Y}(x+dx, y) - F_{X,Y}(x, y+dy) + F_{X,Y}(x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} F_{X,Y}(x+dx, y)dy - \frac{\partial}{\partial y} F_{X,Y}(x,y)dy = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{X,Y}(x+dx,y) - F_{X,Y}(x,y)\right)dy$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

<u>Άσκηση</u>
Να δειχθεί ότι:

1. Εάν η τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε $P\{X = x\} = 0$ για κάθε $x \in X(\Omega)$.

2. Εάν $(\mathrm{X},\mathrm{Y}):\Omega\to\mathbb{R}^2$ δισδιάστατη τ.μ. και η X είναι συνεχής, τότε $P\{X=x,Y\le y\}=P\{X\le x,Y=y\}=P\{X=x,Y=y\}=0$ για κάθε $(x,y)\in(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\Omega)$.

$$0\le P\{X=x\}\le P\{x-h<X\le x\}=P\{X\le x\}-P\{X\le x-h\}$$
$$=F_X(x)-F_X(x-h)\xrightarrow[h\to 0+]{}F_X(x)-F_X(x-)=0 \Rightarrow P\{X=x\}=0,\ \forall x\in\mathcal{S}_X$$

εφόσον η συνάρτηση κατανομής είναι παντού συνεχής.

Εναλλακτικά $P\{X=x\}=P\{X\le x\}-P\{X<x\}=F_X(x)-F_X(x-)=0$

$$0\le P\{X=x,Y\le y\}\le P\{x-h<X\le x,Y\le y\}$$
$$=P\{X\le x,Y\le y\}-P\{X\le x-h,Y\le y\}$$
$$=F_{X,Y}(x,y)-F_{X,Y}(x-h,y)\xrightarrow[h\to 0+]{}F_{X,Y}(x,y)-F_{X,Y}(x-,y)=0$$
$$\Rightarrow P\{X=x,Y\le y\}=0,\ \forall(x,y)\in\mathcal{S}_{X,Y}.$$

<u>Πρόταση</u>

Εάν $X=(X_1,\dots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ με $(X_1,\dots,X_n)\sim F_{X_1,\dots,X_n}$ οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες εάν $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

Εάν οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ είναι από κοινού συνεχείς, τότε $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$.

Εάν οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ είναι από κοινού διακριτές, τότε $p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=p_{X_1}(x_1)\cdots p_{X_n}(x_n)$.

Πράγματι εάν οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ είναι ανεξάρτητες τότε και τα ενδεχόμενα $\{X_i\le x_i\}$ για $i=1,\dots,n$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και έτσι

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=P\{X_1\le x_1,\dots,X_n\le x_n\}=P(\{X_1\le x_1\}\cap\cdots\cap\{X_n\le x_n\})$$
$$=P\{X_1\le x_1\}\cdots P\{X_n\le x_n\}=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

Εάν οι τ.μ. $X_1,\dots,X_n$ είναι από κοινού συνεχείς, τότε:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=F_{X_1}\left(x_1\right)\cdots F_{X_n}\left(x_n\right)\Rightarrow f_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}\left\{F_{X_1}\left(x_1\right)\cdots F_{X_n}\left(x_n\right)\right\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_1}F_{X_1}\left(x_1\right)\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}F_{X_n}\left(x_n\right)=f_{X_1}\left(x_1\right)\cdots f_{X_n}\left(x_n\right)$$

Ενώ εάν οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ είναι από κοινού διακριτές, τότε τα ενδεχόμενα $\left\{X_i=x_i\right\}$ για $i=1,\ldots,n$ είναι ανεξάρτητα και

$$p_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=P\left\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right\}=P\left\{X_1=x_1\right\}\cdots P\left\{X_n=x_n\right\}$$
$$=p_{X_1}\left(x_1\right)\cdots p_{X_n}\left(x_n\right).$$

<u>Υπό συνθήκη πυκνότητες</u>

Εάν οι τ.μ X και Y είναι από κοινού συνεχείς με $\left(X,Y\right)\sim f_{X,Y}$ τότε υπάρχουν δύο υπό συνθήκη πυκνότητες $f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)$ και $f_{X|Y}\left(x\,|\,y\right)$

$$f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)dy=P\left\{y<Y\le y+dy\,|\,x<X\le x+dx\right\}$$
$$=\frac{P\left(\left\{x<X\le x+dx\right\}\cap\left\{y<Y\le y+dy\right\}\right)}{P\left\{x<X\le x+dx\right\}}=\frac{P\left\{x<X\le x+dx,y<Y\le y+dy\right\}}{P\left\{x<X\le x+dx\right\}}$$
$$=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)dx\,dy}{f_X\left(x\right)dx}=\left(\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_X\left(y\right)}\right)dy\Rightarrow f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_X\left(y\right)}.$$

Παρόμοια έχουμε ότι $f_{X|Y}\left(x\,|\,y\right)=\dfrac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$.

<u>Πρόταση</u> (περιθώριες πυκνότητες)

1. Εάν οι τ.μ X και Y είναι από κοινού συνεχείς με $\left(X,Y\right)\sim f_{X,Y}$ τότε η περιθώριες πυκνότητες των X και Y είναι αντίστοιχα $f_X\left(x\right)=\int\limits_{y=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dy$ και $f_Y\left(y\right)=\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dx$.
2. Εάν οι τ.μ X και Y είναι από κοινού διακριτές με $\left(X,Y\right)\sim p_{X,Y}$ τότε η περιθώριες μάζες των X και Y είναι αντίστοιχα $p_X\left(x\right)=\sum\limits_{y\in\mathbb{Z}}p_{X,Y}\left(x,y\right)$ και $p_Y\left(y\right)=\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}}p_{X,Y}\left(x,y\right)$.

1. $f_X\left(x\right)dx=P\left\{x<X\le x+dx\right\}=P\left(\left\{x<X\le x+dx\right\}\cap\Omega\right)$

$$= P\left(\{x < X \le x+dx\} \cap \{-\infty < Y < \infty\}\right) = P\{x < X \le x+dx, -\infty < Y < \infty\}$$

$$= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{u=x}^{x+dx} f_{X,Y}(u,y)\,du \right\} dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \left\{ \int_{u=x}^{x+dx} du \right\} dy = \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy .$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε και ότι $f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$.

2. $p_X(x) = P\{X = x\} = P\left(\{X = x\} \cap \{Y \in \mathbb{Z}\}\right) = P\left(\{X = x\} \cap \bigcup_{y \in \mathbb{Z}} \{Y = y\} \right)$

$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}} P\{X = x, Y = y\} = \sum_{y \in \mathbb{Z}} p_{X,Y}(x,y).$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε και ότι $p_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p_{X,Y}(x,y)$.

Εναλλακτικά

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υπό συνθήκη πυκνότητες $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ και $f_{X|Y}(x\,|\,y)$. Για παράδειγμα

$$\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_{Y|X}(y\,|\,x)\,dy = f_X(x) \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y\,|\,x)\,dy = f_X(x).$$

Παράρτημα Α

(i). Εάν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τ.μ. και A, B υποσύνολα του Ω (δηλαδή $A, B \in \mathcal{F}$), τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $X(A \cup B) = X(A) \cup X(B)$
2. $X(A \cap B) \subseteq X(A) \cap X(B)$
3. $X(A \setminus B) \supseteq X(A) \setminus X(B)$
4. $A \subseteq B \Rightarrow X(A) \subseteq X(B)$
5. $X^{-1} \circ X(A) \supseteq A$

4. $\omega \in A \subseteq B \Rightarrow (\omega \in A \;\; \omega \in B) \Rightarrow (X(\omega) \in X(A) \;\; X(\omega) \in X(B)) \;\; X(A) \subseteq X(B)$

5. $\omega \in A \Rightarrow X(\omega) = x \in X(A) \Rightarrow \omega \in X^{-1}(x) \subseteq X^{-1} \circ X(A)$

(ii). Εάν C, D μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (δηλαδή $C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $X^{-1}(C \cup D) = X(C)^{-1} \cup X(D)^{-1} \Leftrightarrow \{X \in C \cup D\} = \{X \in C\} \cup \{X \in D\}$
2. $X^{-1}(C \cap D) = X^{-1}(C) \cap X^{-1}(D) \Leftrightarrow \{X \in C \cap D\} = \{X \in C\} \cap \{X \in D\}$
3. $X^{-1}(C \setminus D) = X^{-1}(C) \setminus X^{-1}(D) \quad \Leftrightarrow \{X \in C \setminus D\} = \{X \in C\} \setminus \{X \in D\}$
4. $C \subseteq D \Rightarrow X^{-1}(C) \subseteq \Leftrightarrow X^{-1}(D) \qquad \subseteq C \quad \Rightarrow D \quad \in \{X \quad \subseteq C\} \quad \in \{X \quad D\}$
5. $X \circ X^{-1}(C) \subseteq C \qquad\qquad \Leftrightarrow C \supseteq X(\{X \in C\})$

1. $x \in C \cup D \Leftrightarrow X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C \cup D)$
   $x \in C \cup D \Leftrightarrow (x \in C \vee x \in D) \Leftrightarrow (X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \vee X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(D))$
   $\Leftrightarrow X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \cup X^{-1}(D)$

2. $x \in C \cap D \Leftrightarrow X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C \cap D)$
   $x \in C \cap D \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \in D) \Leftrightarrow (X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \wedge X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(D))$
   $\Leftrightarrow X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \cap X^{-1}(D)$

3. $\omega \in X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C \setminus D) \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin D$
   $\Leftrightarrow (\omega \in X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \wedge \omega \in X^{-1}(x) \not\subseteq X^{-1}(D)) \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(C) \subseteq X^{-1}(D)$

4. $C \subseteq D \Rightarrow (x \in C \Rightarrow x \in D) \Rightarrow (X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(C) \Rightarrow X^{-1}(x) \subseteq X^{-1}(D))$
   $\Rightarrow X^{-1}(C) \subseteq X^{-1}(D)$

5. $x \in X \circ X^{-1}(C) \Leftrightarrow (\exists\, \omega \in X^{-1}(C) : X(\omega) = x \Rightarrow x \in C)$.