Ο συμβολισμός $f_X(x) \propto g(x)\cdot 1(x\in S)$ σημαίνει ότι η πυκνότητα f_X είναι ανάλογη με την μη αρνητική συνάρτηση $g(x)$ όταν $x\in S$, ενώ όταν $x\in S'$ η f_X είναι μηδέν. Δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά $C>0$, **η σταθερά κανονικοποίησης**[1], τέτοια ώστε:

$$f_X(x) = C\cdot g(x)\cdot 1(x\in S) = \begin{Bmatrix} C\cdot g(x) & x\in S \\ 0 & x\in S' \end{Bmatrix}.$$

Το σύνολο S όπου $f_X(x)>0$ ονομάζεται **στήριγμα (support) της κατανομής**. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης παίρνουμε

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} C g(x)1(x\in S)\,dx=C\int_S g(x)\,dx\ ,$$

που δίνει

$$C^{-1}=\int_S g(x)\,dx\,.$$

Στην διακριτή περίπτωση έχουμε $p_X(x) \propto g(x)\cdot 1(x\in S)$ όπου τώρα το στήριγμα της κατανομής είναι ένα διακριτό σύνολο S πεπερασμένο είτε άπειρο. Για ευκολία υποθέτουμε ότι $S\subseteq \mathbb{Z}$.

$$1=\sum_{x\in\mathbb{Z}} p_X(x)=\sum_{x\in\mathbb{Z}} Cg(x)1(x\in S)=C\sum_{x\in S} g(x)$$

που δίνει

$$C^{-1}=\sum_{x\in S} g(x)\,.$$

<u>Άσκηση</u>

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες της gamma συνάρτησης.

1. $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1),\ t>1$
2. $\Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in\mathbb{N}$
3. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

---

[1] Normalization constant

1. $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx=-\left[x^{t-1}e^{-x}\right]_0^\infty+(t-1)\int_0^\infty x^{t-2}e^{-x}dx=(t-1)\Gamma(t-1)$

2. Με επαγωγή αρχίζοντας από $\Gamma(1)=0!=1$.

3. $\Gamma(1/2)=\int_{x=0}^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx=\int_{t=0}^\infty t^{-1}e^{-t^2}2tdt=2\int_{t=0}^\infty e^{-t^2}dt,\ t=x^{1/2}$,

$\Gamma(1/2)^2=4\int_{s=0}^\infty e^{-s^2}ds\int_{t=0}^\infty e^{-t^2}dt=4\int_{s=0}^\infty\int_{t=0}^\infty e^{-\left(t^2+s^2\right)}dtds=4\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^\infty \rho e^{-\rho^2}d\rho d\vartheta=4\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}=\pi$.

<u>Παράδειγμα</u>
Να βρεθούν οι σταθερές κανονικοποίησης C στις εξής περιπτώσεις:

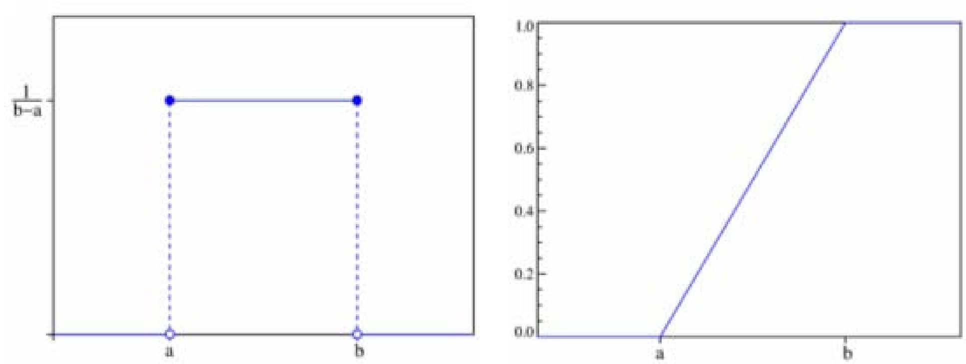
1. $f_X(x)\propto 1(a<x<b),\ X\sim\mathcal{U}(a,b)$ ομοιόμορφη στο (a,b).

2. $f_X(x)\propto e^{-\lambda x}\cdot 1(x>0),\ X\sim Exp(\lambda)$ εκθετική με μέση τιμή $1/\lambda$.

3. $f_X(x)\propto x^{a-1}e^{-bx}\cdot 1(x>0),\ X\sim Ga(a,b)$ gamma με $\text{shape}=a>0$, $\text{rate}=\text{scale}^{-1}=\text{b>0}$.

1. $C^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}1(a<x<b)dx=\int_a^b dx=b-a$

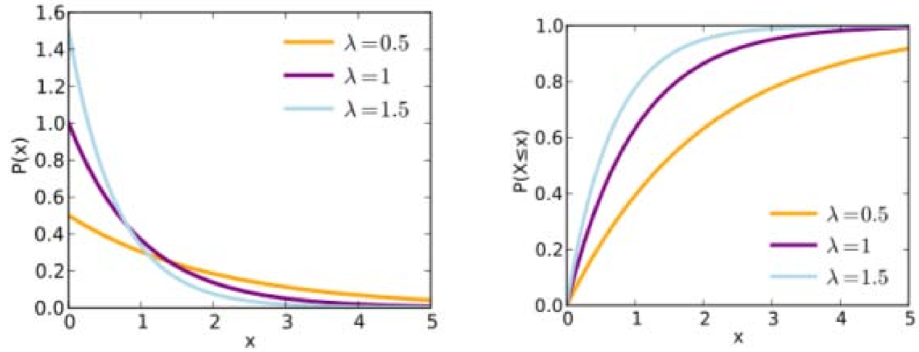
$$f_X(x)=\mathcal{U}(x\,|\,a,b)=\frac{1}{b-a}1(a<x<b)=\begin{cases}1 & a<x<b\\ 0 & elsewhere\end{cases}.$$



<u>Σχήμα</u>: Η πυκνότητα $p(x)=\mathcal{U}(x\,|\,a,b)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)=\frac{x-a}{b-1}\cdot 1(a<x<b)+1(x\geq b)$ της ομοιόμορφης κατανομής.

2. $C^{-1}=\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x}\cdot 1(x>0)dx=\int_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\lambda^{-1}$

$f_X(x) = Exp(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} 1(x>0)$,



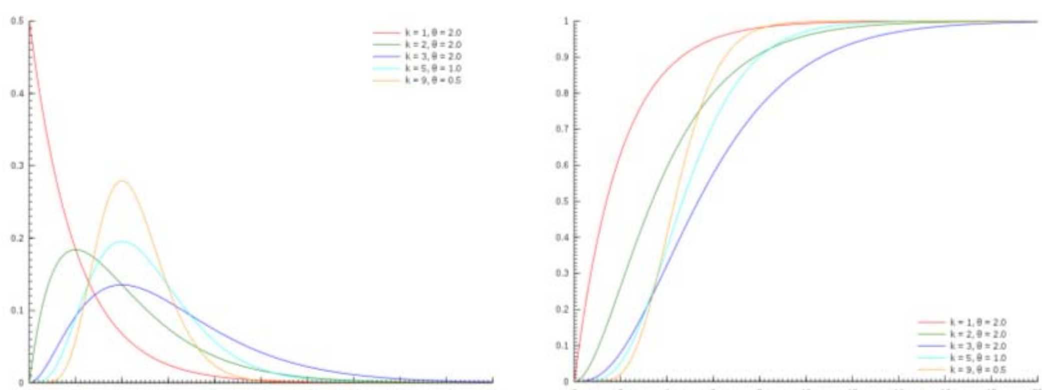
<u>Σχήμα</u>: Η πυκνότητα $f_X(x) = Exp(x \mid \lambda)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ της εκθετικής κατανομής.

(3) $C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{a-1} e^{-bx} \cdot 1(x>0)\, dx = \frac{1}{b^a} \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(a)}{b^a},\ y = bx$

Έτσι

$f_X(x) = Ga(x \mid a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} 1(x>0)$,

είναι η gamma πυκνότητα με παραμέτρους $a = shape > 0$ και $b = rate > 0$.



<u>Σχήμα</u>: Η πυκνότητα $f_X(x) = Ga(x \mid \kappa, \vartheta)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = \int_{u=-\infty}^{x} Ga(u \mid \kappa, \vartheta)\, du = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{u=0}^{x} u^{a-1} e^{-bu} du$.

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθούν οι σταθερές κανονικοποίησης στις εξής περιπτώσεις

1. $f_X(x) \propto x^{b-1}\exp\left[-\frac{a}{b}x^b\right],\ x>0,\ a>0,\ b>0$ Weibull.

2. $f_X(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right],\ -\infty<x<\infty$ Normal.

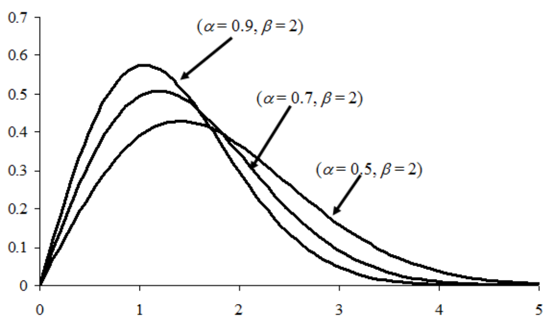
3. $f_X(x) \propto \frac{1}{b^2+(x-a)^2},\ -\infty<x<\infty$ Cauchy – Lorentz.

4. $f_X(x) \propto e^{-\lambda x}\cdot 1(a<x<b),\ a\geq 0,$ Truncated Exponential.

5. $f_X(x) \propto (1+|x|)\cdot 1(|x|<1)$

1. $C^{-1} = \int\limits_{x=0}^{\infty} x^{b-1}\exp\left\{-\frac{a}{b}x^b\right\}dx = \frac{1}{a}\int\limits_{u=0}^{\infty} e^{-u}du = \frac{1}{a},\ u=\frac{a}{b}x^b$

$$Wei(x\,|\,a,b) = ax^{b-1}\exp\left\{-\frac{a}{b}x^b\right\},\ x>0$$



2. Επειδή $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ έχουμε $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}=\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$. Θέτοντας $t=\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ παίρνουμε $C^{-1}=\int_{t=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}dt=\sigma\sqrt{2\pi}$

3. $C^{-1}=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{dx}{b^2+(x-a)^2}=\frac{1}{b^2}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}=\frac{1}{b}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{b}\left[\arctan(u)\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{b}$

$$Ca(x\,|\,a,b)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2+(x-a)^2}$$

4. $C^{-1} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} 1(a < x < b) dx = \int_{x=a}^{b} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda}$.

5. $C^{-1} = \int_{x=-\infty}^{\infty} (1+|x|) \cdot 1(|x| < 1) dx = \int_{x=-1}^{1} (1+|x|) dx = 2 - \int_{x=-1}^{0} x dx + \int_{x=0}^{1} x dx = 3$.

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθούν οι σταθερές κανονικοποίησης και να αναγνωρισθούν οι κατανομές στις εξής περιπτώσεις

1. $f_X(x) \propto e^{x(1-x)}, \ -\infty < x < \infty$
2. $p_X(x) \propto \frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0,1,2,\ldots$
3. $p_X(x) \propto (1-p)^{x-1}, \ x = 1,2,\ldots$
4. $p_X(x) \propto \frac{1}{x!(n-x)!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x, \ x = 0,1,2,\ldots,n.$
5. $p_X(x) \propto \frac{(x-1)!}{(x-n)!}(1-p)^x, \ x = n, n+1,\ldots$

1. $C^{-1} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{x(1-x)} dx = e^{1/4} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x-1/2)^2} dx$.

Γνωρίζουμε ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$, έτσι $C^{-1} = e^{1/4}\sqrt{\pi}$ και

$$f_X(x) = \frac{1}{e^{1/4}\sqrt{\pi}} e^{x(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1/2)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1/2)}(x-1/2)^2\right\} = N(x \,|\, 1/2, 1/2)$$

2. $C^{-1} = \sum_{x \in S} g(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

$$p_X(x) = Po(x\,|\,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x = 0,1,2,\dots$$

3. $C^{-1} = \sum_{x\in S} g(x) = \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$

$$p_X(x) = Geo(x\,|\,p) = p(1-p)^{x-1},\ x = 1,2,\dots$$

4. $C^{-1} = \sum_{x\in S} g(x) = \sum_{x=0}^{n}\frac{1}{x!(n-x)!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x = \frac{1}{n!}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x$

$$= \frac{1}{n!}\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^n = \frac{1}{n!(1-p)^n}$$

$$p_X(x) = Bin(x\,|\,n,p) = n!(1-p)^n\frac{1}{x!(n-x)!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x$$

$$= \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\dots,n.$$

5. $C^{-1} = \sum_{x\in S} g(x) = \sum_{x=n}^{\infty}\frac{(x-1)!}{(x-n)!}(1-p)^x = (n-1)!\sum_{x=n}^{\infty}\binom{x-1}{n-1}(1-p)^x$

$$= (n-1)!(1-p)^n\sum_{x=0}^{\infty}\binom{x+n-1}{n-1}(1-p)^x$$

Επειδή $\binom{x+n-1}{n-1} = (-1)^x\binom{-n}{x}$ έχουμε

$$C^{-1} = (n-1)!(1-p)^n\sum_{x=0}^{\infty}(-1)^x\binom{-n}{x}(1-p)^x = (n-1)!(1-p)^n\sum_{x=0}^{\infty}\binom{-n}{x}\left(-(1-p)\right)^x$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}z^k, |z|<1$, έχουμε

$$C^{-1} = (n-1)!(1-p)^n\left(1-(1-p)\right)^{-n} = (n-1)!(1-p)^n p^{-n}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{p^n}{(n-1)!}(1-p)^{-n}$$

Έτσι $p_X\left(x\right)=\dfrac{p^n}{\left(n-1\right)!}\left(1-p\right)^{-n}\dfrac{\left(x-1\right)!}{\left(x-n\right)!}\left(1-p\right)^x=\binom{x-1}{n-1}p^n\left(1-p\right)^{x-n}$, για $x=n,n+1,\ldots$

δηλαδή $p_X\left(x\right)=NB\left(x\,|\,n,p\right)$ η αρνητική διωνυμική κατανομή με n επιτυχίες και πιθανότητα επιτυχίας p.