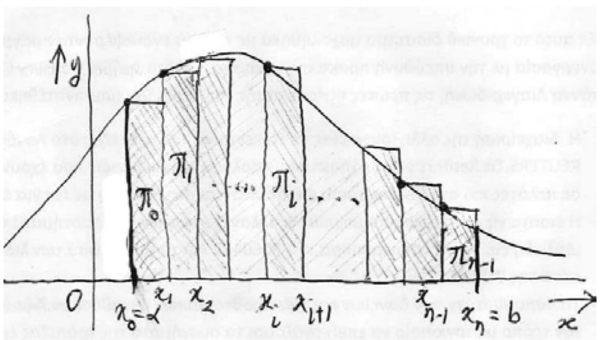
Έστω διάστημα $B=(a,b)\subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$, όπου D_f το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$, και διαμέριση[1] $\mathcal{P}_n(B)=\{\, t_i, 0\le i\le n :\, t_r<t_{r+1}, 0\le r\le n-1, t_0=a, t_n=b\}$. Τότε θα έχουμε

$$(a,b]=\bigcup_{i=0}^{n-1}(x_i, x_{i+1}].$$

Το ολοκλήρωμα της $y=f(x)$[2] στο B θα είναι περίπου ίσο, για μεγάλο n, με το άθροισμα του εμβαδού $\mathcal{A}(\Pi_i)$ των n παραλληλογράμμων Π_i, για $0\le i\le n-1$,με ύψος $f(x_i)$ και μήκος βάσης $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$



$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}(\Pi_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i .$$

Τα σημεία A_i για $0\le i\le n-1$ με συντεταγμένες$(x_i, f(x_i))$ ανήκουν στην καμπύλη $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in D_f, y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ και καθορίζουν τα ύψη των παραλληλογράμμων Π_i.

Όταν πάρουμε το όριο για $n\to\infty$ του παραπάνω αθροίσματος (τότε $\Delta x=\sup_i \Delta x_i \to 0$) ζητάμε το όριο $\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i)\Delta x_i = l$ να είναι ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός, ανεξάρτητος του τρόπου που έγινε η διαμέριση $\mathcal{P}_n(B)$ του B. Τότε το ολοκλήρωμα κατά Riemann της $y=f(x)$ στο B θα είναι

$$\int_B f(x)\,dx \approx \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = l .$$

[1] Partition

[2] Υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο B.

$2-$**διάστατη γενίκευση του ολοκληρώματος κατά Riemann**: Έστω παραλληλόγραμμο $\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b, c<y<d\right\}\subseteq D_f\subseteq\mathbb{R}^2$ και διαμέριση του $\mathcal{R}$

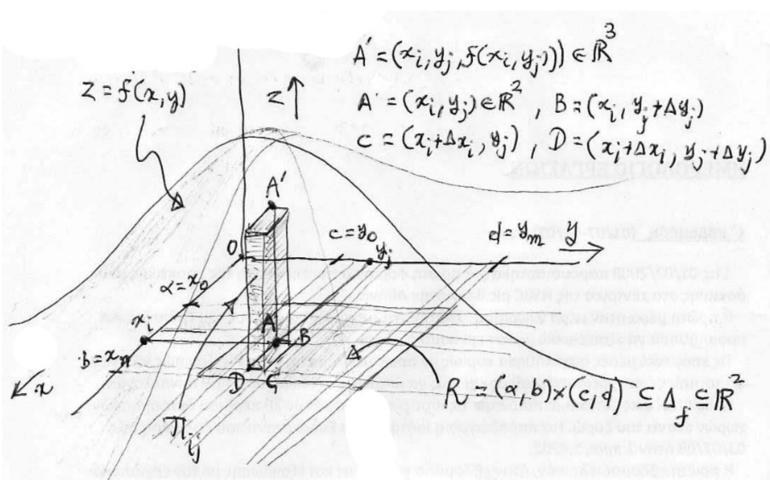
$$\mathcal{P}_{n,m}\left(\mathcal{R}\right)=\mathcal{P}_n\left(B^{(x)}\right)\times\mathcal{P}_m\left(B^{(y)}\right),$$

όπου $B^{(x)}=\left(a,b\right)$ και $B^{(y)}=\left(c,d\right)$ και η $\mathcal{P}_{n,m}\left(\mathcal{R}\right)$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των διαμερίσεων των $B^{(x)}$ και $B^{(y)}$. Τότε θα έχουμε

$$\left(a,b\right]\times\left(c,d\right]=\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup_{j=0}^{m-1}\left(x_i,x_{i+1}\right]\times\left(y_j,y_{j+1}\right].$$

Το διπλό ολοκλήρωμα της $z=f\left(x,y\right)$ στο παραλληλόγραμμο $\mathcal{R}$, που έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, θα είναι περίπου ίσο, για μεγάλα n και m, με το άθροισμα του όγκου $Vol\left(\Pi_{ij}\right)$ των nm πρισμάτων Π_{ij}, για $0\le i\le n-1$ και $0\le j\le m-1$, με ύψος $f\left(x_i,y_j\right)$ και εμβαδόν βάσης $\Delta x_i\Delta y_j=\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(y_{j+1}-x_j\right)$

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d}f\left(x,y\right)dydx\cong\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}Vol\left(\Pi_{ij}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}f\left(x_i,y_j\right)\Delta y_j\Delta x_i$$



Τα σημεία A'_{ij} για $0\le i\le n-1$ και $0\le j\le m-1$ με συντεταγμένες $\left(x_i,y_j,f\left(x_i,y_j\right)\right)$ ανήκουν στην επιφάνεια $\mathcal{S}=\left\{\left(x,y,x\right)\in\mathbb{R}^3:\left(x,y\right)\in D_f, y=f\left(x,y\right)\right\}\subset\mathbb{R}^3$ και είναι τα ύψη των πρισμάτων Π_{ij}.

Όταν πάρουμε το όριο για $n,m \to \infty$ (τότε $\Delta x = \sup_i \Delta x_i \to 0$ και $\Delta y = \sup_j \Delta y_j \to 0$) του παραπάνω διπλού αθροίσματος, ζητάμε το όριο $\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(x_i, y_j\right) \Delta y_j \Delta x_i$ να είναι ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός, ανεξάρτητος του τρόπου που έγινε η διαμέριση $\mathcal{P}_{n,m}(\mathcal{R})$ του $\mathcal{R}$. Τότε το ολοκλήρωμα κατά Riemann της $z = f(x,y)$ στο $\mathcal{R}$ θα είναι

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dydx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(x_i, y_j\right) \Delta y_j \Delta x_i = \lambda .$$

Επειδή $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} Vol\left(\Pi_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} Vol\left(\Pi_{ij}\right)$, δηλαδή ο τρόπος που αθροίζουμε τους όγκους $Vol\left(\Pi_{ij}\right)$, δεν παίζει ρόλο στον υπολογισμό του λ, θα έχουμε ότι

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dydx = \lambda = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dxdy .$$

Το ίδιο θα ισχύει εάν το παραλληλόγραμμο $\mathcal{R}$ έχει άπειρο εμβαδό, δηλαδή κάποιο από τα a ή c (ή και τα δύο) τείνει στο $-\infty$ ή (ή και ταυτόχρονα) κάποιο από τα b ή d (ή και τα δύο) τείνει στο $+\infty$.

Για παράδειγμα εάν η $f(x,y)$ είναι πυκνότητα και $F(x,y)$ η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής, είναι εμφανές από τα παραπάνω ότι θα έχουμε:

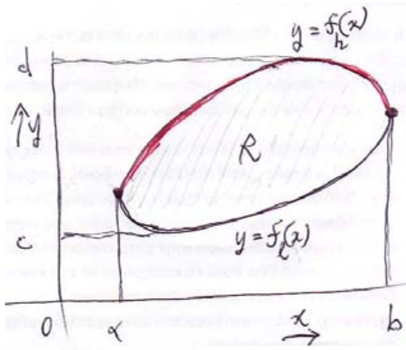
1. $\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$.

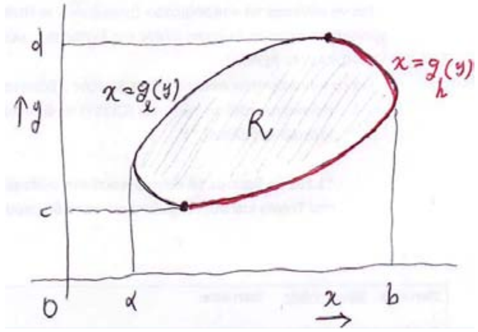
2. $\int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,dvdu = \int_{v=-\infty}^{y} \int_{u=-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv = F(x,y),\ \forall\, x \le \infty,\, y \le \infty$.

Τα ίδια ισχύουν και για οποιαδήποτε $d-$διάστατη $(d \ge 2)$ γενίκευση του ολοκληρώματος κατά Riemann. Παρατηρήστε **ότι τότε υπάρχουν** $d!$ **τρόποι εναλλαγής της ολοκλήρωσης**, που όλοι όμως, εφόσον το πεδίο ολοκλήρωσης $\mathcal{R}$ είναι της μορφής $\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$, οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Έστω τώρα ότι το πεδίο ολοκλήρωσης $\mathcal{R}$ είναι γενικά καμπυλόγραμμο, δηλαδή για $d = 2$

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ f_l(x) < y < f_h(x)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d,\ g_l(y) < x < g_h(y)\}$$





Τότε θα έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dydx$ (είτε το $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$ που σημαίνει το ίδιο πράγμα) θα είναι η κοινή τιμή των ολοκληρωμάτων

$$\int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=f_l(x)}^{f_h(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int_{x=g_l(y)}^{g_h(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy\,.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της $z = f(x,y)$ στο χωρίο $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 4\}$ (η ολοκλήρωση να γίνει και με τους δύο τρόπους, εξωτερικά ως προς x και εξωτερικά ως προς y).

2. Να βρεθεί η πυκνότητα $f_{X,Y}(x,y)$, με στήριγμα το $\mathcal{B}$, που αντιστοιχεί στην $f(x,y)$, δηλαδή η $f_{X,Y}(x,y)$ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε
$f_{X,Y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} C\, f(x,y), & (x,y) \in \mathcal{B} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{array} \right\}$ για σταθερό $C > 0$.

3. Να βρεθεί η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}(x,y)$. Χρησιμοποιώντας την $F_{X,Y}(x,y)$ βρείτε τις περιθώριες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$ και $F_Y(y)$.

1. Το ολοκλήρωμα της $z = f(x,y)$ στο χωρίο $\mathcal{B}$ θα είναι:

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dydx = \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=1}^{4}\left(x^2+y^2\right)dy\right\}dx = \int_{x=1}^{2}\left(3x^2+\frac{63}{3}\right)dx = 7+\frac{63}{3} = 28,$$

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dxdy = \int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=1}^{2}\left(x^2+y^2\right)dx\right\}dy = \int_{x=1}^{4}\left(\frac{7}{3}+y^2\right)dy = 7+\frac{63}{3} = 28.$$

2. Θέλουμε $f_{X,Y}(x,y) = \begin{Bmatrix} C\left(x^2+y^2\right), (x,y)\in\mathcal{R} \\ 0, \quad elsewhere \end{Bmatrix}$.

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης στο $\mathbb{R}^2$ παίρνουμε

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = C\iint_{\mathcal{B}}\left(x^2+y^2\right)dydx = 28C \Rightarrow C = \frac{1}{28},$$

και η ζητούμενη πυκνότητα είναι: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{28}\left(x^2+y^2\right), (x,y)\in\mathcal{B} \\ 0, \quad elsewhere \end{Bmatrix}$.

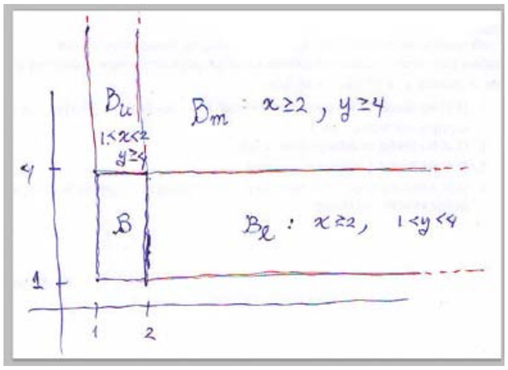
3. Θα δείξουμε ότι η $F_{X,Y}(x,y)$ έχει διαφορετική αναπαράσταση στα χωρία

$\mathcal{B} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2, 1<y<4\right\}$ που είναι το στήριγμα της $f_{X,Y}(x,y)$,

$\mathcal{B}_l = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 2, 1<y<4\right\}$

$\mathcal{B}_u = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2, y\geq 4\right\}$

$\mathcal{B}_m = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 2, y\geq 4\right\}$



$$F_{X,Y}(x,y)\big|_{\mathcal{B}} = \int_{u=1}^{x}\int_{v=1}^{y}\frac{1}{28}\left(u^2+v^2\right)dvdu ,$$

$$= \int_{u=1}^{x}\frac{1}{28}\left(u^2(y-1)+\frac{1}{3}\left(y^3-1\right)\right)du = \underbrace{\frac{1}{28}\left(\frac{1}{3}\left(x^3-1\right)(y-1)+\frac{1}{3}(x-1)\left(y^3-1\right)\right)}_{\varphi(x,y)}$$

$$F_{X,Y}(x,y)\big|_{\mathcal{B}_l} = \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{y}\frac{1}{28}\left(u^2+v^2\right)dvdu = \underbrace{\frac{1}{28}\left(\frac{7}{3}(y-1)+\frac{1}{3}\left(y^3-1\right)\right)}_{\varphi(2,y)}$$

$$F_{X,Y}(x,y)\big|_{\mathcal{B}_u} = \int_{u=1}^{x}\int_{v=1}^{4}\frac{1}{28}\left(u^2+v^2\right)dvdu = \underbrace{\frac{1}{28}\left(\left(x^3-1\right)+\frac{63}{3}(x-1)\right)}_{\varphi(x,4)}$$

$$F_{X,Y}(x,y)\big|_{\mathcal{B}_m} = \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{4}\frac{1}{28}\left(u^2+v^2\right)dvdu = \underbrace{\frac{1}{28}\left(\frac{63}{3}+7\right)}_{\varphi(2,4)} = 1$$

έτσι παίρνουμε:

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{28}\left(\frac{1}{3}\left(x^3-1\right)\left(y-1\right)+\frac{1}{3}\left(x-1\right)\left(y^3-1\right)\right) & (x,y)\in\mathcal{B}\\ \frac{1}{28}\left(\frac{7}{3}\left(y-1\right)+\frac{1}{3}\left(y^3-1\right)\right) & (x,y)\in\mathcal{B}_l\\ \frac{1}{28}\left(\left(x^3-1\right)+\frac{63}{3}\left(x-1\right)\right) & (x,y)\in\mathcal{B}_u\\ 1 & (x,y)\in\mathcal{B}_m\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_X(x)=\int_{y=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{y=1}^{4}\frac{1}{28}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{1}{28}\left(3x^2+\frac{63}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{28}\left(3x^2+\frac{63}{3}\right) & 1<x<2\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$F_X(x)=\int_{u=1}^{x}f_X(u)\,du=\int_{u=1}^{x}\frac{1}{28}\left(3u^2+\frac{63}{3}\right)du=\frac{1}{28}\left(\left(x^3-1\right)+\frac{63}{3}\left(x-1\right)\right)=F_{X,Y}(x,y)\Big|_{\mathcal{B}_u},$$

οπότε και

$$\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{28}\left(\left(x^3-1\right)+\frac{63}{3}\left(x-1\right)\right) & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}.$$

Επίσης έχουμε ότι

$$f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{x=1}^{2}\frac{1}{28}\left(x^2+y^2\right)dx=\frac{1}{28}\left(\frac{7}{3}+y^2\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{28}\left(\frac{7}{3}+y^2\right) & 1<y<4\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\int_{v=1}^{y}f_Y(v)\,dv=\int_{v=1}^{y}\frac{1}{28}\left(\frac{7}{3}+v^2\right)dv=\frac{1}{28}\left(\left(y-1\right)+\frac{1}{3}\left(y^3-1\right)\right)=F_{X,Y}(x,y)\Big|_{\mathcal{B}_l},$$

από όπου

$$\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{28}\left((y-1)+\frac{1}{3}\left(y^3-1\right)\right) & 1<y<4 \\ 1 & y\geq 4 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{Bmatrix}.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ για $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα της $z = f(x,y)$ στο **καμπυλόγραμμο χωρίο** $\mathcal{B} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2, 1<y<x^2\right\}$ (η ολοκλήρωση να γίνει και με τους δύο τρόπους).
2. Να βρεθεί η αντίστοιχη, πυκνότητα $f_{X,Y}(x,y)$ με στήριγμα στο $\mathcal{B}$.
3. Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

1. Το ολοκλήρωμα της $z = f(x,y)$ στο χωρίο $\mathcal{B} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2, 1<y<x^2\right\}$ θα είναι:

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dydx = \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=1}^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy\right\}dx = \int_{x=1}^{2}\left(x^2\left(x^2-1\right)+\frac{1}{3}\left(x^6-1\right)\right)dx,$$

$$= \int_{x=1}^{2}\left(\frac{1}{3}x^6+x^4-x^2-\frac{1}{3}\right)dx = \frac{1006}{105}$$

Επειδή $\mathcal{B} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x<2, 1<y<x^2\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{y}<x<2, 1<y<4\right\}$ θα έχουμε

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dxdy = \int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=\sqrt{y}}^{2}\left(x^2+y^2\right)dx\right\}dy = \int_{y=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\left(7-y^{3/2}\right)+y^2\left(2-y^{1/2}\right)\right)dx.$$

$$\int_{y=1}^{4}\left(-y^{5/2}+2y^2-\frac{1}{3}y^{3/2}+\frac{7}{3}\right)dx = \frac{1006}{105}$$

2. Θέλουμε $f_{X,Y}(x,y) = \begin{Bmatrix} C\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\in\mathcal{B} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$,

ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης στο $\mathbb{R}^2$ παίρνουμε

$$1=\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}\left(x,y\right)=C\iint_{\mathcal{B}}\left(x^2+y^2\right)dydx=\frac{1006}{105}C\Rightarrow C=\frac{105}{1006},$$

και η ζητούμενη πυκνότητα είναι $f_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{Bmatrix}\dfrac{105}{1006}\left(x^2+y^2\right), & \left(x,y\right)\in\mathcal{B}\\ 0, & elsewhere\end{Bmatrix}.$

3. Για την $f_X\left(x\right)$ έχουμε

$$f_X\left(x\right)=\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)dy=\int_{y=1}^{x^2}\frac{105}{1006}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{105}{1006}\left(\frac{1}{3}x^6+x^4-x^2-\frac{1}{3}\right),$$

ή ότι

$$f_X\left(x\right)=\begin{Bmatrix}\dfrac{105}{1006}\left(\dfrac{1}{3}x^6+x^4-x^2-\dfrac{1}{3}\right), 1<x<2\\ 0, \qquad elsewhere\end{Bmatrix}.$$

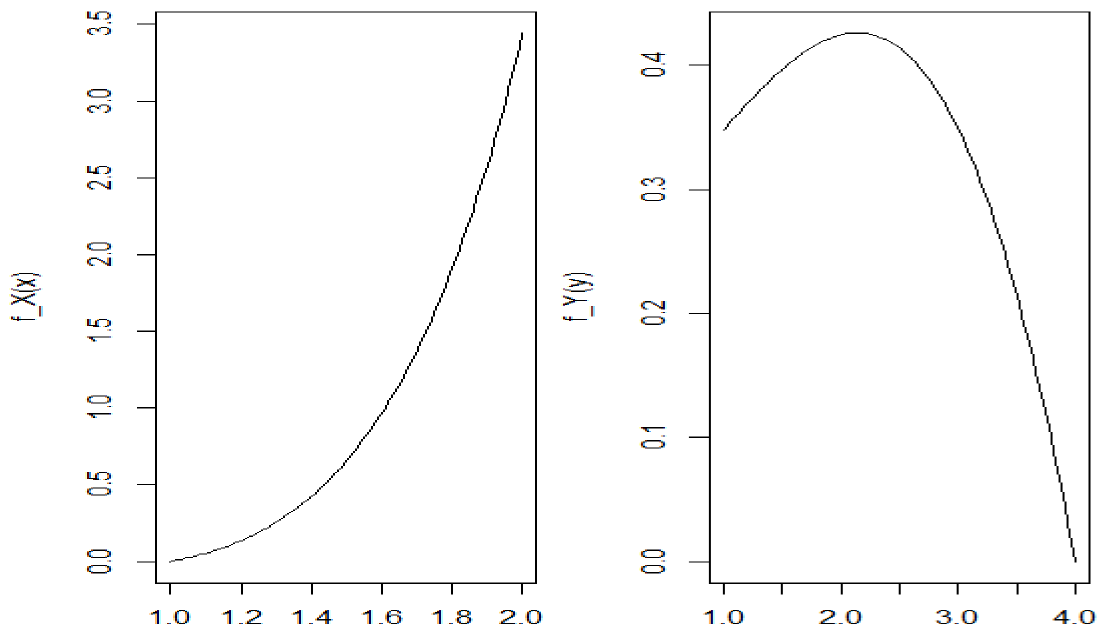
Για την $f_Y\left(y\right)$ έχουμε

$$f_Y\left(y\right)=\int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)dx=\int_{x=\sqrt{y}}^{2}\frac{105}{1006}\left(x^2+y^2\right)dx=\frac{105}{1006}\left(\frac{1}{3}x^6+x^4-x^2-\frac{1}{3}\right),$$

ή ότι

$$f_Y\left(y\right)=\begin{Bmatrix}\dfrac{105}{1006}\left(-y^{5/2}+2y^2-\dfrac{1}{3}y^{3/2}+\dfrac{7}{3}\right), 1<y<4\\ 0, \qquad elsewhere\end{Bmatrix}.$$

Οι περιθώριες πυκνότητες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



<u>Άσκηση</u>
Δίνεται η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής για $a>0$ και $b>0$

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix}\left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right), & (x,y)\in\mathbb{R}_+^2\\ 0, & elsewhere\end{Bmatrix}.$$

1. Να βρεθεί η από κοινού σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, καθώς και η πιθανότητα $P\{X+Y<1\}$.
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P\{X\le 1, Y\le 1\}, P\{X<1, Y<1\}$ και $P\{X>1, Y>1\}$ καθώς και οι πιθανότητες $P\{X\le 1\}$ και $P\{X>1\}$.

1. $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}=abe^{-(ax+by)}$ για $x,y>0$

$P\{X+Y<1\}=\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dydx$ όπου $\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y<1, 0<x<1, 0<y<1\right\}$

Για $a\ne b$ και εσωτερική ολοκλήρωση ως προς y, έχουμε

$$P\{X+Y<1\}=\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1-x} abe^{-ax}e^{-by}dy\right\}dx$$

$$=a\int_{x=0}^{1} e^{-ax}\left[-e^{-by}\right]_{y=0}^{1-x}dx=a\int_{x=0}^{1} e^{-ax}\left(1-e^{-b(1-x)}\right)dx$$

$$= a\int_{x=0}^{1} e^{-ax}dx - ae^{-b}\int_{x=0}^{1} e^{(b-a)x}dx = 1-e^{-a}-ae^{-b}\frac{e^{b-a}-1}{b-a} = 1-\frac{be^{-a}-ae^{-b}}{b-a}.$$

<u>Εναλλακτικά</u> για $a \neq b$, αλλά με εσωτερική ολοκλήρωση ως προς x θα έχουμε

$$P\{X+Y<1\} = \int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=0}^{1-y} abe^{-ax}e^{-by}dy\right\}dx$$

$$= b\int_{y=0}^{1} e^{-by}\left[-e^{-ax}\right]_{x=0}^{1-y}dy = b\int_{y=0}^{1} e^{-by}\left(1-e^{-a(1-y)}\right)dx$$

$$= b\int_{y=0}^{1} e^{-by}dx - be^{-a}\int_{y=0}^{1} e^{(a-b)x}dx = 1-e^{-b}-be^{-a}\frac{e^{a-b}-1}{a-b} = 1-\frac{be^{-a}-ae^{-b}}{b-a}$$

Για $a=b$ παίρνοντας το όριο για $b\to a$, έχουμε

$$P\{X+Y<1\} = 1-\lim_{b\to a}\frac{be^{-a}-ae^{-b}}{b-a} = 1-\lim_{b\to a}\left(e^{-a}+ae^{-b}\right)$$

$$= 1-\left(e^{-a}+ae^{-a}\right) = 1-(1+a)e^{-a}$$

Παρατήρηση: Εμφανώς ισχύει $0<1-(1+a)e^{-a}<1$ εφόσον είναι γνωστό ότι $e^{a}>1+a$ για κάθε $a>0$.

Η εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P_1(a_1,b_1,c_1),\ P_2(a_2,b_2,c_2)$ και $P_3(a_3,b_3,c_3)$ του $\mathbb{R}^3$.

Υποθέτουμε ότι τα σημεία P_1, P_2 και P_3 δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, δηλαδή ορίζουν ένα επίπεδο $(\mathcal{P})$ στον $\mathbb{R}^3$. Έστω r_1, r_2 και r_3 τα διανύσματα θέσης των σημείων P_1, P_2 και P_3, δηλαδή $r_s = a_s i + b_s j + c_s k$ για $s=1,2,3$. Εάν $P(x,y,z)\in(\mathcal{P})$ με διάνυσμα θέσης r, θα έχουμε ότι ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα τρία διανύσματα $P_1P = r-r_1,\ P_1P_2 = r_2-r_1$ και $P_1P_3 = r_3-r_1$ θα είναι

$$V = P_1P\cdot P_1P_2\times P_1P_3 = (r-r_1)\cdot(r_2-r_1)\times(r_3-r_1) = \begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}.$$

Επειδή όμως τα σημεία P_1, P_2 και P_3 ορίζουν ένα επίπεδο $\mathcal{P}$ στον $\mathbb{R}^3$ θα έχουμε $V=0$, και η εξίσωση του επιπέδου $(\mathcal{P})$ που περνάει από τα σημεία P_1, P_2 και P_3 θα είναι:

$$(\mathcal{P}):\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $(\mathcal{P})$ που περνάει από τα σημεία $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$ και $P_3(0,0,c)$.

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-a)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$bc(x-a)+acy+abz=0 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Έτσι έχουμε ότι $(\mathcal{P})=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\right\}$.

Η εξίσωση της ευθείας $(\mathcal{L})$ που περνάει από τα σημεία $P_1(a_1,b_1,0)$, $P_2(a_2,b_2,0)$ του $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^3$. Έστω r_1, r_2 τα διανύσματα θέσης των σημείων P_1, P_2 δηλαδή $r_s=a_s i+b_s j$ για $s=1,2$. Εάν $P(x,y,0)\in(\mathcal{L})$ με διάνυσμα θέσης r, θα έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x-a_1 & y-b_1 & 0 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow k\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{a_2-a_1}-\frac{y}{b_2-b_1}=\frac{a_1}{a_2-a_1}-\frac{b_1}{b_2-b_1}.$$

Έτσι έχουμε ότι $(\mathcal{L})=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x}{a_2-a_1}-\frac{y}{b_2-b_1}=\frac{a_1}{a_2-a_1}-\frac{b_1}{b_2-b_1}\right\}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $(\mathcal{L})$ που περνάει από τα σημεία $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$

θέτοντας $\begin{Bmatrix} a_1 = 0, \ b_1 = b \\ a_2 = a, \ b_2 = 0 \end{Bmatrix}$ η προηγούμενη εξίσωση δίνει $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθούν οι ομοιόμορφες κατανομές στα παρακάτω χωρία:

1. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d \right\}$
2. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < x^2 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} < x < 2, 1 < y < 4 \right\}$
3. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < a \right\}$
4. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z < a \right\}$
5. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < a, x + y < a \right\}$
6. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a, x + y + z < a \right\}$
7. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1 \right\}$
8. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} < 1 \right\}$
9. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 \right\}$
10. $\mathcal{R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \right\}$

Σε όλες τις περιπτώσεις ζητάμε $C > 0$ τέτοιο ώστε στις δύο διαστάσεις να έχουμε $f_{X,Y}(x, y) = \begin{Bmatrix} C, & (x, y) \in \mathcal{R} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$ με $C^{-1} = \iint_{\mathcal{R}} dA$ και $dA = dx\,dy$, ενώ στις τρείς διαστάσεις $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} C, & (x, y, z) \in \mathcal{R} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$ με $C^{-1} = \iiint_{\mathcal{R}} dV$ και $dV = dx\,dy\,dz$.

1. $C^{-1} = \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} dy\,dx = \int_{x=a}^{b} (d - c)\,dx = (b - a)(d - c)$

έτσι έχουμε ότι

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & a < x < b, c < y < d \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(b-a)(d-c)} 1(a < x < b) 1(c < y < d).$$

Οι περιθώριες πυκνότητες είναι:

$$f_X(x) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} 1(a<x<b) \int_{y=-\infty}^{\infty} 1(c<y<d)\, dy = \frac{1}{b-a} 1(a<x<b) = \mathcal{U}(x \mid a,b)$$

Προφανώς και $f_Y(y) = \frac{1}{d-c} 1(c<y<d) = \mathcal{U}(y \mid c,d)$, και παρατηρούμε ότι ισχύει $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$, δηλαδή οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.

2. $C^{-1} = \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{x^2} dy\, dx = \int_{x=1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx = \frac{4}{3}$

ή ισοδύναμα $C^{-1} = \int_{y=1}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{2} dx\, dy = \int_{x=0}^{4} \left(2 - \sqrt{y}\right) dy = \frac{4}{3}$, έτσι έχουμε

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}, & 1<x<2, 1<y<x^2 \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

Οι περιθώριες πυκνότητες είναι:

$f_X(x) = \int_{y=1}^{x^2} \frac{3}{4} dy = \frac{3}{4}\left(x^2 - 1\right),\ 1<x<2$ και $f_Y(y) = \int_{x=\sqrt{y}}^{2} \frac{3}{4} dx = \frac{3}{4}\left(2 - \sqrt{y}\right),\ 1<y<4$.

Εμφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$ και οι τ.μ. X και Y είναι εξαρτημένες.

3. $C^{-1} = \iint_{\mathcal{R}} dA = \int_{x=0}^{a} \int_{y=x}^{a} dy\, dx = \int_{x=0}^{a} (a-x)\, dx = \frac{a^2}{2}$,

ισοδύναμα $C^{-1} = \int_{y=0}^{a} \int_{x=0}^{y} dx\, dy = \int_{x=0}^{a} y dy = \frac{a^2}{2}$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{Bmatrix} \frac{2}{a^2}, & 0<x<y<a \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

4. $C^{-1} = \iiint_{\mathcal{R}} dV = \int_{x=0}^{a} \int_{y=x}^{a} \int_{z=y}^{a} dz\, dy\, dx = \int_{x=0}^{a} \int_{y=x}^{a} (a-y)\, dy\, dx = \frac{a^3}{6}$,

ισοδύναμα $C^{-1} = \int_{z=0}^{a} \int_{y=0}^{z} \int_{x=0}^{y} dz\, dy\, dx = \frac{a^3}{6}$.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \frac{6}{a^3}, & 0<x<y<z<a \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

5. $C^{-1}=\iint\limits_{\mathcal{R}} dA=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{a-x} dy\,dx=\int\limits_{x=0}^{a}(a-x)\,dx=\frac{a^2}{2}$.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix} \frac{2}{a^2}, & x+y<a,\,0<x<a,\,0<y<a \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

6. $C^{-1}=\iiint\limits_{\mathcal{R}} dV=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{a-x}\int\limits_{z=0}^{a-x-y} dz\,dy\,dx=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{a-x}\left((a-x)-y\right)dy\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{a}(a-x)^2\,dx=\frac{a^3}{6}$

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{Bmatrix} \frac{6}{a^3}, & x+y+z<a,\,0<x<a,\,0<y<a,\,0<z<a \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$$

7. $C^{-1}=\iint\limits_{\mathcal{R}} dA=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\,dx=b\int\limits_{x=0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{ab}{2}$.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix} \frac{2}{ab}, & \frac{x}{a}+\frac{y}{b}<1,\,0<x<a,\,0<y<b \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

8. $C^{-1}=\iiint\limits_{\mathcal{R}} dV=\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\int\limits_{z=0}^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\,dy\,dx=c\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{y}{b}\right)dy\,dx$

$=c\int\limits_{x=0}^{a}\left\{b\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{1}{2b}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right\}dx=\frac{bc}{2}\int\limits_{x=0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{abc}{6}$.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{Bmatrix} \frac{6}{abc}, & \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}<1,\,0<x<a,\,0<y<b,\,0<z<c \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}$$

9. $C^{-1}=\iint\limits_{\mathcal{R}} dA=4\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\,dx=4\int\limits_{x=0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

θέτοντας $x=R\sin(\vartheta)$, έχουμε ότι $\sqrt{R^2-x^2}=R\cos(\vartheta)$ και $dx=R\cos(\vartheta)$ που δίνει $C^{-1}=4R^2\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta)\,d\vartheta$. Επειδή $\cos(2\vartheta)=\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)=2\cos^2(\vartheta)-1$, έχουμε $C^{-1}=2R^2\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}\left(1+\cos(2\vartheta)\right)d\vartheta=\pi R^2$ και

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2<R^2 \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

10. $C^{-1}=\iiint\limits_{\mathcal{R}} dV = 8\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = 8\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$,

θέτοντας $y=\sqrt{R^2-x^2}\sin(\vartheta)$, έχουμε ότι

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1-\sin^2(\vartheta)}=\sqrt{R^2-x^2}\cos(\vartheta)$ και $dy=\sqrt{R^2-x^2}\cos(\vartheta)$

που δίνει

$C^{-1}=8\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}\left(R^2-x^2\right)\cos^2(\vartheta)\,d\vartheta\,dx=8\int\limits_{x=0}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}\cos^2(\vartheta)\,d\vartheta=\frac{4}{3}\pi R^3$ και

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{Bmatrix} \dfrac{3}{4\pi R^3}, & x^2+y^2+z^2<R^2 \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

Συνδιασπορά (covariance) και συντελεστής συσχέτισης (correlation coefficient)

Η συνδιασπορά είναι ένα μέτρο της από κοινού μεταβολής δύο τυχαίων μεταβλητών, και ορίζεται σαν

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right\}$$

- Εάν $Cov(X,Y)=0$ λέμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι (γραμμικά) ασυσχέτιστες.
- Εάν $Y=X$ τότε $Cov(X,X)=\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right\}=Var(X)$, που είναι η μέση τιμή της τετραγωνικής απόκλισης της X από τον μέσο όρο της.

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι

<u>Πρόταση</u> Εάν X και Y από κοινού συνεχείς, $(X,Y)\sim f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$, είτε από κοινού διακριτές $(X,Y)\sim p_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ έχουμε ότι:

1. $Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
2. Εάν X και Y ανεξάρτητες τ.μ. $Cov(X,Y)=0$ (το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει).

1. $\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right\}=\mathbb{E}\left\{XY-\mathbb{E}(Y)X-\mathbb{E}(X)Y+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right\}$
$=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

2. Για κάθε συνάρτηση g των τ.μ. X και Y ισχύει ότι

$$(X,Y)\sim f_{X,Y}(\cdot,\cdot)\Rightarrow \mathbb{E}\left\{g(X,Y)\right\}=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx,$$

$$(X,Y)\sim p_{X,Y}(\cdot,\cdot)\Rightarrow \mathbb{E}\left\{g(X,Y)\right\}=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}} g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y).$$

Έτσι για παράδειγμα έχουμε ότι στη από κοινού συνεχή περίπτωση

$$\mathbb{E}\{X\}=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_{x=-\infty}^{\infty} x\left\{\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right\}dx=\int_{x=-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx,$$

και στην από κοινού διακριτή περίπτωση

$$\mathbb{E}\{X\}=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}} x\, p_{X,Y}(x,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\left\{\sum_{y\in\mathbb{Z}} p_{X,Y}(x,y)\right\}=\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\, p_X(x).$$

Εάν X και Y ανεξάρτητες τ.μ θα έχουμε

$$\mathbb{E}\{XY\}=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\,dydx$$

$$=\int_{x=-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx\int_{y=-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy=\mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}\Rightarrow Cov(X,Y)=0.$$

Παρομοίως στην από κοινού διακριτή περίπτωση

$$\mathbb{E}\{XY\}=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}} xy\, p_{X,Y}(x,y)=\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\, p_X(x)\sum_{y\in\mathbb{Z}} y\, p_Y(y)$$
$$=\mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}\Rightarrow Cov(X,Y)=0.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Για τις παρακάτω διακριτές συναρτήσεις να υπολογιστεί το $C>0$, έτσι ώστε να είναι συναρτήσεις μάζας πιθανότητας

1. $$p_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix} C, & (x,y)\in\left\{(0,1),(1,0),(2,1)\right\} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix},$$

2. $$p_{X,Y}(x,y)=\begin{Bmatrix} C, & (x,y)\in\{0,1,2\}\times\{0,1\} \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί και στις δύο περιπτώσεις το covariance των X και Y. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

1. Υπολογίζουμε εύκολα ότι $C=1/3$. Οι περιθώριες κατανομές είναι

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ και $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(X)=1,\ \mathbb{E}(Y)=2/3,\ \mathbb{E}(XY)=2/3 \Rightarrow Cov(X,Y)=0$,

ενώ οι τ.μ. X και Y είναι εξαρτημένες, εφόσον υπάρχει τουλάχιστον ένα (x,y) για το οποίο $p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x)\,p_Y(y)$, για παράδειγμα

$$p_{X,Y}(0,0)=0 \neq p_X(0)\,p_Y(0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}.$$

2. Υπολογίζουμε εύκολα ότι $C=1/6$. Οι περιθώριες κατανομές είναι

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ και $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$p_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=p_X(x)\,p_Y(y)$, για κάθε $(x,y)\in\{0,1,2\}\times\{0,1\}$, δηλαδή οι X και Y είναι ανεξάρτητες, από όπου και $Cov(X,Y)=0$.

Ορίζουμε τον συντελεστή συσχέτισης σαν

$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ ή συντομογραφικά $\rho_{X,Y}=\dfrac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$

<u>Πρόταση</u>

1. Ανισότητα Cauchy – Schwartz: $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
2. Ισχύει ότι $|\rho(X,Y)| \leq 1$

1. Ορίζουμε τη μη αρνητική συνάρτηση $g(a)=\mathbb{E}\{(X-aY)^2\}\geq 0$ ότι

$$g(a)=\mathbb{E}(Y^2)a^2-2\mathbb{E}(XY)a+\mathbb{E}(X^2)\geq 0$$

$g'(a^*)=0 \Rightarrow a^*=\dfrac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}$ ενώ

$$g''(a^*)=2\mathbb{E}(Y^2)>0 \Rightarrow \min_{a\in\mathbb{R}} g(a)=g(a^*)=\mathbb{E}(X^2)-\frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(Y^2)}\geq 0$$

από όπου και $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι $g(a) \geq 0 \Leftrightarrow Disc = 4\mathbb{E}(XY)^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0$, από όπου και πάλι $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

2. Θέτουμε $\begin{Bmatrix} U = X - \mathbb{E}(X) \\ V = Y - \mathbb{E}(Y) \end{Bmatrix}$,

τότε από Cauchy – Schwartz για τις τ.μ. U και V έχουμε

$$\mathbb{E}(UV)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(Y^2) \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right\}^2 \leq \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2\right\}\mathbb{E}\left\{(Y - \mathbb{E}(Y))^2\right\} \Leftrightarrow$$

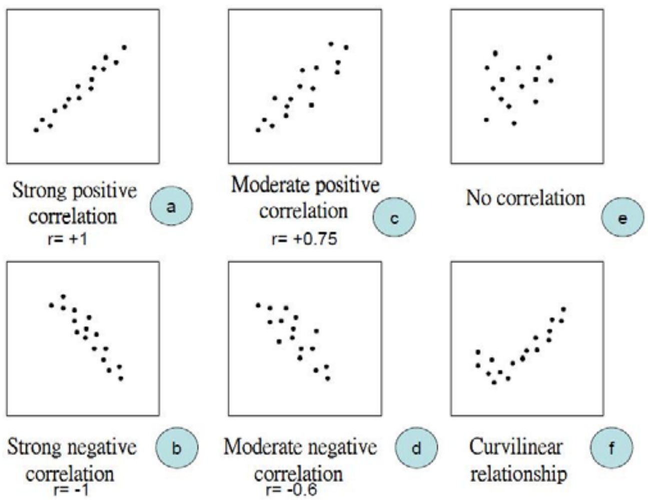
$$Cov(X,Y)^2 \leq Var(X)Var(Y) \Leftrightarrow \left\{\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\right\}^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1.$$

Correlation is expressed on a range from +1 to -1, known as the correlation coefficient. In a perfect positive correlation, expressed as +1, an increase or decrease in one variable always predicts the same directional change for the second variable. If two variables sometimes but not always change in tandem, the correlation is expressed as greater than zero but less than +1. Values below zero express negative correlation: As the value of one variable increases, the other decreases. Zero indicates a lack of correlation: There is no tendency for the variables to fluctuate in tandem either positively or negatively.

Examples of positively correlated variables include:

1. Hours spent studying and grade point averages.
2. Education and income levels.
3. Poverty and crime levels.
4. Evaluated stress levels and blood pressure readings.
5. Smoking and lung disease.

There’s a common tendency to think that correlation between variables means that one causes or influences the change in the other one. However, correlation does not imply causation. There may be an unknown factor that influences both variables similarly.



Για παράδειγμα εάν οι τ.μ. X και Y είναι θετικές, δηλαδή $P\{X>0\}=1$ και $P\{Y>0\}=1$ και παρατηρήσουμε $\log(Y)=a\log(X)+b \Leftrightarrow Y=e^b X^a$

<u>Παράδειγμα</u>
Δείξτε ότι εάν $Y=aX+b$ τότε $Cov(X,Y)=aVar(X)$ και $\rho(X,Y)=\operatorname{sgn}(a)$, όπου

$$\operatorname{sgn}(a)=\begin{Bmatrix} 1, & a>0 \\ 0, & a>0 \\ -1, & a<0 \end{Bmatrix}.$$

$$Cov(X,Y)=Cov(X,aX+b)=\mathbb{E}\left(X\left(aX+b\right)\right)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(aX+b)$$
$$=a\mathbb{E}\left(X^2\right)+b\mathbb{E}(X)-a\mathbb{E}(X)^2-b\mathbb{E}(X)=aVar(X)$$

$$\rho(X,Y)=\frac{aVar(X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{a^2Var(X)}}=\frac{a}{|a|}=\operatorname{sgn}(a).$$

<u>Πρόταση</u>
Εάν ο μετασχηματισμός $y=T(x)$ είναι ένα – προς – ένα για $x\in B$ έχουμε:

$$\int_{x\in B} f(x)\,dx=\int_{y\in T(B)} f\left(T^{-1}(y)\right)\left|dT^{-1}(y)\right|=\int_{y\in T(B)} f\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|dy,$$

όπου το διάστημα $T(B)$ είναι προσανατολισμένο, κατά την έννοια ότι εάν $B=(a,b)$ και $T\uparrow$ τότε $T(B)=(T(a),T(b))$ ενώ εάν $T\downarrow$, τότε $T(B)=(T(b),T(a))$

Πράγματι εάν $B=(a,b)$

$$\int_B f(x)dx=\int_{x=a}^{b} f(x)dx=\int_{y=T(a)}^{T(b)} f\left(T^{-1}(y)\right)\frac{dT^{-1}(y)}{dy}dy$$

Εάν $T\uparrow \Leftrightarrow \dfrac{dT^{-1}(y)}{dy}=\left|\dfrac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|$ και $T(a)<T(b)$ που δίνει

$$\int_B f(x)dx=\int_{T(B)} f\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|dy \text{ με } T(B)=(T(a),T(b))$$

Εάν $T\downarrow \Leftrightarrow \dfrac{dT^{-1}(y)}{dy}=-\left|\dfrac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|$ και $T(a)>T(b)$ που δίνει

$$\int_B f(x)dx=\int_{x=a}^{b} f(x)dx=\int_{y=T(a)}^{T(b)} f\left(T^{-1}(y)\right)\frac{dT^{-1}(y)}{dy}dy$$
$$=-\int_{y=T(b)}^{T(a)} f\left(T^{-1}(y)\right)\frac{dT^{-1}(y)}{dy}dy=\int_{T(B)} f\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{dT^{-1}(y)}{dy}\right|dy,$$

όπου $T(B)=(T(b),T(a))$.

<u>Μετασχηματισμοί πυκνοτήτων</u>

Εάν X είναι συνεχής τ.μ. έτσι ώστε $X \sim f_X(\cdot)$ και **ο μετασχηματισμός $Y=T(X)$ είναι αντιστρέψιμος[3] στο χώρο καταστάσεων $X(\Omega)$ της τ.μ. X,** τότε ορίζουμε την πυκνότητα της τ.μ. Y με τον εξής τρόπο:

$$f_Y(y)=f_X\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right|,$$

και ο χώρος καταστάσεων της τ.μ. Y είναι $Y(\Omega)=T(X(\Omega))$.

[3] Δηλαδή το T^{-1} είναι συνάρτηση.

Πράγματι

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{T(X) \le y\}$$

$$= \begin{Bmatrix} P\{X \le T^{-1}(y)\}, \; T\uparrow \\ P\{X \ge T^{-1}(y)\}, \; T\downarrow \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X\left(T^{-1}(y)\right), \quad T\uparrow \\ 1-F_X\left(T^{-1}(y)\right), \; T\downarrow \end{Bmatrix}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε:

$$f_Y(y) = \begin{Bmatrix} f_X\left(T^{-1}(y)\right) dT^{-1}(y)/dy, \qquad T\nearrow \\ f_X\left(T^{-1}(y)\right)\left[-dT^{-1}(y)/dy\right], \; T\swarrow \end{Bmatrix}$$

$$= f_X\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right|, \; y \in Y(\Omega) = T\left(X(\Omega)\right).$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή

$$T\left(T^{-1}(y)\right) = y \Rightarrow T'\left(T^{-1}(y)\right)\left(T^{-1}\right)'(y) = 1$$

$$\Rightarrow \left(T^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{T'\left(T^{-1}(y)\right)},$$

που σημαίνει ότι T' και $\left(T^{-1}\right)'$ έχουν το ίδιο πρόσημο, άρα T και T^{-1} έχουν την ίδια μονοτονία. Την τελευταία εξίσωση, χρησιμοποιώντας διαφορικά μπορούμε να την γράψουμε και ως $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.

<u>Πρόταση</u>

Εάν η τ.μ. Z έχει συνάρτηση κατανομής F_Z που αντιστρέφεται τότε έχουμε τα παρακάτω:

1. Έστω ότι $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$, τότε η τ.μ. $X = F_Z^{-1}(Y)$ έχει την ίδια κατανομή με την τ.μ. Z, συμβολικά $F_Z^{-1}(Y) \overset{d}{=} Z$.
2. Αντίστροφα, η τ.μ. $Y = F_Z(Z)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, συμβολικά $F_Z(Z) \overset{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$.

$(\Rightarrow)$: Για να δείξουμε ότι $X \overset{d}{=} Z$ αρκεί να δείξουμε ότι $F_X(x) = F_Z(x)$:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\left\{F_Z^{-1}(Y) \le x\right\},$$

και επειδή F_Z ↑ παίρνουμε $F_X(x) = P\{Y \le F_Z(x)\} = \int_{-\infty}^{F_Z(x)} f_Y(y)\,dy$.

Όμως $Y \sim \mathcal{U}(0,1) \Leftrightarrow f_Y(y) = 1(0 < y < 1)$, και $0 \le F_Z(x) \le 1$ που δίνει

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{F_Z(x)} 1(0 < y < 1)\,dy = \int_{0}^{F_Z(x)} dy = F_Z(x).$$

$(\Leftarrow)$: Για να δείξουμε ότι $Y = F_Z(Z) \overset{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$ αρκεί να δείξουμε ότι $f_Y(y) = 1$, για $0 < y < 1$. Πράγματι

$$f_Y(y) = f_Z\left(F_Z^{-1}(y)\right)\left|\left(F_Z^{-1}\right)'(y)\right| = f_Z\left(F_Z^{-1}(y)\right)\left|\left(F_Z\right)'\left(F_Z^{-1}(y)\right)\right|^{-1}$$

$$= \frac{f_Z\left(F_Z^{-1}(y)\right)}{\left|f_Z\left(F_Z^{-1}(y)\right)\right|} = 1$$

εφόσον $f_Z > 0$ και $F_Z : \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ είναι ένα – προς – ένα. Έτσι παίρνουμε ότι $f_Y(y) = 1(0 < y < 1)$.

Εάν ο μετασχηματισμός T δεν είναι αντιστρέψιμος στο χώρο καταστάσεων $X(\Omega)$ της τ.μ. X , τότε θα πρέπει να αθροίσουμε τον μετασχηματισμό της πυκνότητας πάνω σε κάθε κλάδο $x = T_i^{-1}(y)$ της αντίστροφης στο $X(\Omega)$, δηλαδή αν η $T^{-1}(y)$ έχει s κλάδους στο $X(\Omega)$, θα έχουμε

$$f_Y(y) = \sum_{y = T(x)} \frac{f_X(x)}{|T'(x)|} = \sum_{i=1}^{s} \frac{f_X\left(T_i^{-1}(y)\right)}{\left|T_i'\left(T_i^{-1}(y)\right)\right|} = \sum_{i=1}^{s} f_X\left(T_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T_i^{-1}(y)\right|,$$

όπου $x \in \left\{T_1^{-1}(y), \ldots, T_s^{-1}(y)\right\}$ οι κλάδοι[4] (προεικόνες) του x, που έχουν την ιδιότητα $T\left(T_j^{-1}(y)\right) = x$ για $j = 1, \ldots, s$.

<u>Άσκηση</u>
Εάν η τ.μ. X έχει πυκνότητα f_X και στήριγμα το $\mathbb{R}$, να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. $Y = T(X)$ στις εξής περιπτώσεις:

[4] Branches ή pre – images.

1. $T(X) = aX + b$, όπου $a \neq 0$ και b πραγματικοί αριθμοί.

2. $T(X) = X^k$.

3. $T(X) = |X|$.

1. $Y = T(X) \Rightarrow X = T^{-1}(Y) = \frac{Y-b}{a} \Rightarrow \left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right| = \frac{1}{|a|}$

$$f_Y(y) = f_X\left(T^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right| = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{Y-b}{a}\right)$$

2. $Y = T(X) \Rightarrow \begin{Bmatrix} X = Y^{1/k}, & k = 2\rho+1 \\ X \in \left\{\pm Y^{1/k}\right\}, & k = 2\rho \end{Bmatrix} \Rightarrow \left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right| = \frac{1}{k} y^{-\frac{k+1}{k}}$

$k = 2\rho + 1$

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} y^{-\frac{k+1}{k}} f_X\left(y^{1/k}\right), \; -\infty < y < \infty ,$$

$k = 2\rho$

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} y^{-\frac{k+1}{k}} f_X\left(-y^{1/k}\right) + \frac{1}{k} y^{-\frac{k+1}{k}} f_X\left(y^{1/k}\right) = \frac{1}{k} y^{-\frac{k+1}{k}} \left\{ f_X\left(-y^{1/k}\right) + f_X\left(y^{1/k}\right)\right\}, \; y > 0 .$$

3. Επειδή σε αυτή την περίπτωση η $T(x) = |X|$ δεν είναι αντιστρέψιμη θα έχουμε

$$Y = T(X) \Rightarrow X = T^{-1}(Y) \in \{\pm Y\} \Rightarrow \left|\frac{d}{dy}T^{-1}(y)\right| = 1$$

$$f_Y(y) = f_X(-y) + f_X(y), \; y > 0$$

Αλλιώς

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} = P\{-y \le X \le y\} = P\{X \le y\} - P\{X < -y\}$$

Επειδή $P\{X < -y\} = F_X\left(-y^-\right)$, αλλά F_X παντού συνεχής, έχουμε ότι $P\{X < -y\} = F_X(-y)$, και έτσι $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$. Παραγωγίζοντας την προηγούμενη εξίσωση ως προς y έχουμε:

$$f_Y(y) = f_X(-y) + f_X(y).$$

<u>Παράδειγμα</u>

1. Εάν $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ και $Y = T(X) = aX + b$, δείξτε ότι
   $$f_Y(y) = \begin{Bmatrix} \mathcal{U}(y \mid b, a+b), \ a > 0 \\ \mathcal{U}(y \mid a+b, b), \ a < 0 \end{Bmatrix}.$$
   Επίσης να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Y όταν $Y = T(X) = e^X$

2. Εάν $X \sim N(0,1)$ και $Y = T(X) = X^2$, δείξτε ότι $f_Y(y) = Ga(y \mid 1/2,\ 1/2)$.

3. Εάν $X \sim N(0,1)$ και $Y = T(X) = |X|$, δείξτε ότι
   $f_Y(y) = HN(y \mid 0,1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}, \ y > 0$ (όπου το HN σημαίνει half normal).

1. Επειδή $y = T(x) = ax + b$ έχουμε $x = T^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$ που δίνει

$$f_Y(y) = \mathcal{U}\left(\frac{y-b}{a} \mid 0,1\right)\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right| = \frac{1}{|a|} 1\left(0 < \frac{y-b}{a} < 1\right)$$

$$= \frac{1}{|a|}\begin{Bmatrix} 1(b < y < a+b), \ a > 0 \\ 1(a+b < y < b), \ a < 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{U}(y \mid b, a+b), \ a > 0 \\ \mathcal{U}(y \mid a+b, b), \ a < 0 \end{Bmatrix}.$$

Όταν $y = T(x) = e^x$ έχουμε $x = T^{-1}(y) = \log(y)$, τότε

$$f_Y(y) = \mathcal{U}(\log(y) \mid 0,1)\left|\frac{d\log(y)}{dy}\right| = \frac{1}{y} 1(0 < \log(y) < 1) = \frac{1}{y} 1(1 < y < e).$$

2. Επειδή $y = T(x) = x^2$ έχουμε $x = T^{-1}(y) \in \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ με αποτέλεσμα

$$f_Y(y) = N(\sqrt{y} \mid 0,1)\left|\frac{d}{dy}(\sqrt{y})\right| + N(-\sqrt{y} \mid 0,1)\left|\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})\right|$$

$$= N(\sqrt{y} \mid 0,1)\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \ y > 0.$$

Επίσης επειδή $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ και $Ga(y|a,b)=\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}y^{a-1}e^{-by},\ y>0$ παίρνουμε

$$f_Y(y)=\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}y^{1/2-1}e^{-y/2}=Ga(y|1/2,\ 1/2).$$

Παρατήρηση: Η πυκνότητα $f_Y(y)=Ga(y|1/2,\ 1/2)$ είναι ειδική περίπτωση της οικογένειας κατανομών χι – τετράγωνο[5] με n βαθμούς ελευθερίας $\chi_n^2(y)=Ga(y|n/2,\ 1/2)$. Εδώ έχουμε $f_Y(y)=\chi_1^2(y)$.

3. $f_Y(y)=f_X(-y)+f_X(y)=N(-y|0,1)+N(y|0,1)$

$$=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-y^2/2},\ y>0$$

<u>Άσκηση</u>

1. Εάν $X\sim N(0,1)$ και $Y=T(X)=\sigma X+\mu$, δείξτε ότι $f_Y(y)=N(y|\mu,\sigma^2)$.
2. Εάν $X\sim N(0,1)$ και $Y=T(X)=\sigma|X|+\mu$, δείξτε ότι
$$f_Y(y)=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\},\ y>\mu\\ 0,\qquad otherwise\end{Bmatrix}.$$
Επίσης δείξτε ότι σε αυτή περίπτωση έχουμε $f_Y(y)\propto N(y|\mu,\sigma^2)1(y>\mu)$. Δηλαδή η τ.μ. Y είναι η περικομμένη (truncated) κανονική κατανομή στο διάστημα (μ,∞).
3. Εάν $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ και $Y=T(X)=e^X$, να βρεθεί η κατανομή της Y.

1. Επειδή $y=T(x)=\sigma x+\mu$ έχουμε $x=T^{-1}(y)=\dfrac{y-\mu}{\sigma}$ που δίνει

$$f_Y(y)=N\left(\frac{y-\mu}{\sigma}|0,1\right)\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right|.$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}=N(y|\mu,\sigma^2),\ y\in\mathbb{R}.$$

[5] Chi – squared with one degree of freedom.

2. Επειδή, $y = T(x) = \sigma|x| + \mu$, έχουμε $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x_+ = T_+^{-1}(y) = \dfrac{y-\mu}{\sigma} \\ x < 0 \Rightarrow x_- = T_-^{-1}(y) = -\dfrac{y-\mu}{\sigma} \end{array} \right\}$, και $y = \sigma|x| + \mu > \mu$, έτσι παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(T_+^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T_+^{-1}(y)\right| + f_X\left(T_-^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}T_-^{-1}(y)\right| \\
&= \frac{1}{\sigma}N\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\,|\,0,1\right) + \frac{1}{\sigma}N\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\,|\,0,1\right) \\
&= \frac{2}{\sigma}N\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\,|\,0,1\right) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\},\ y > \mu \\ 0, \qquad otherwise \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Έστω ότι $f_Y(y) \propto N\left(y\,|\,\mu,\sigma^2\right)1(y > \mu)$, τότε υπάρχει $C > 0$, τέτοιο ώστε $f_Y(y) = C\cdot N\left(y\,|\,\mu,\sigma^2\right)1(y > \mu)$. Ολοκληρώνοντας στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(y)\,dy = C\cdot\int_{\mathbb{R}} N\left(y\,|\,\mu,\sigma^2\right)1(y > \mu)\,dy \\
&= C\int_{y=\mu}^{\infty} N\left(y\,|\,\mu,\sigma^2\right)dy = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2, \text{ από όπου}
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = 2\cdot N\left(y\,|\,\mu,\sigma^2\right)1(y > \mu) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\},\ y > \mu \\ 0, \qquad otherwise \end{array} \right\}.
$$

3. Όταν $y = T(x) = e^x$ έχουμε $x = T^{-1}(y) = \log(y)$, τότε

$$
f_Y(y) = N\left(\log(y)\,|\,\mu,\sigma^2\right)\left|\frac{d\log(y)}{dy}\right| = \frac{1}{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},\ y > 0 .
$$

Η προηγούμενη πυκνότητα, είναι η πυκνότητα της λογαριθμοκανονικής (lognormal) κατανομής και συμβολίζεται με $Y \sim LN\left(\mu,\sigma^2\right)$.

<u>Άσκηση</u>
Δείξτε ότι

1. εάν $X \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $Y = T_1\left(X\right) = \tan\left(X\right) \sim Ca\left(0,1\right)$. Ποίος είναι ο μετασχηματισμός T για τον οποίο έχουμε $Z = T\left(X\right) \sim Ca\left(a,b\right)$ για $a > 0$ και $b \in \mathbb{R}$;

2. Δείξτε ότι εάν $Y \sim Ca\left(0,1\right)$ τότε και $1/Y \sim Ca\left(0,1\right)$

1. $f_Y\left(y\right) = \mathcal{U}\left(\arctan\left(y\right) | -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\left|\frac{d}{dy}\arctan\left(y\right)\right|$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}1\left(-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(y\right) < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}1\left(-\infty < y < \infty\right) = Ca\left(y \,|\, 0,1\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $Z = T_2\left(Y\right) = by + a$ με $b > 0$ και $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f_Z\left(z\right) = Ca\left(\frac{z-a}{b} \,|\, 0,1\right)\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{z-a}{b}\right)\right| = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2+\left(z-a\right)^2} = Ca\left(y \,|\, a,b\right).$$

Δηλαδή $Z = T_2\left(T_1\left(X\right)\right) = b\tan\left(X\right) + a$ και ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $T = T_2 \circ T_1$.

2. Εάν $Z = 1/Y$, θα έχουμε

$$f_Z\left(z\right) = f_Y\left(y\left(z\right)\right)\left|\frac{dy\left(z\right)}{dz}\right| = f_Y\left(\frac{1}{z}\right)\left|\frac{d}{dz}\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{z^2}f_Y\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2} = f_Y\left(z\right) = Ca\left(z \,|\, 0,1\right).$$

<u>Άσκηση</u>

Να βρεθεί μετασχηματισμός T , τέτοιος ώστε $Y = T\left(X\right) \sim f_Y$ για $X \sim f_X$, με $f_Y\left(y\right) = \frac{1}{2}y^{-1/2}1\left(0 < y < 1\right)$ και $f_X\left(x\right) = e^{-x}1\left(x > 0\right)$.

Υποθέτοντας ότι ο άγνωστος μετασχηματισμός T είναι αντιστρέψιμος και θέτοντας $u\left(y\right) = x = T^{-1}\left(y\right)$ έχουμε ότι

$e^{-u}\left|u'\right| = \frac{1}{2}y^{-1/2} \Leftrightarrow e^{-u}u' = \frac{1}{2}y^{-1/2}$ για $0 < y < 1$ και $u\left(y\right) = x > 0$.

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε $\int e^{-u}du = \frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy + C$, όπου C η σταθερά της ολοκλήρωσης. Εκτελώντας τα ολοκληρώματα παίρνουμε

$e^{-u} = -C - y^{1/2} \Leftrightarrow u = -\log\left(-C - y^{1/2}\right)$, ενώ θα πρέπει να ισχύει $-C - y^{1/2} > 0$ ή ότι $y < \sqrt{-C}$. Επειδή θα πρέπει $y < 1$, θέτουμε $C = 1$ από όπου παίρνουμε $e^{-u} = 1 - y^{1/2}$ και επειδή $u(y) = x$, τελικά θα έχουμε $y = \left(1 - e^{-x}\right)^2$

Εναλλακτικά

Η α.σ.κ. της X είναι $F_X(x) = \left(1 - e^{-x}\right)1(x > 0)$ και γνωρίζουμε ότι $F_X(X) = 1 - e^{-X} \overset{d}{=} \mathcal{U}(0,1)$.

Η α.σ.κ. της Y είναι $F_Y(y) = \sqrt{y}1(0 < y < 1) + 1(y \geq 1)$, τότε

$\mathcal{U}(0,1) \overset{d}{=} F_Y(Y) = \sqrt{Y}1(0 < Y < 1) + 1(Y \geq 1) = \sqrt{Y}$.

Έτσι $1 - e^{-X} \overset{d}{=} \sqrt{Y}$ ή ότι $Y \overset{d}{=} \left(1 - e^{-X}\right)^2$.

Παρατήρηση: Η προηγούμενη ισότητα είναι ισότητα σε κατανομή (ή στοχαστική ισότητα). Μπορούμε να κάνουμε όλες τις σύνηθεις πράξεις ταυτόχρονα και στα δύο μέλη της στοχαστικής εξίσωσης, που ισοδυναμεί με το ότι εάν $X \overset{d}{=} Y$ τότε και $g(X) \overset{d}{=} g(Y)$ για κάθε $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Όμως δεν μπορούμε να αλλάξουμε μέλη, δηλαδή εάν $X \overset{d}{=} Y$ τότε αυτό **δεν** σημαίνει ότι $X - Y \overset{d}{=} 0$, ούτε να πολλαπλασιάσουμε ας πούμε και τα δύο μέλη με το X^{-1}, δηλαδή εάν $X \overset{d}{=} Y$ τότε αυτό **δεν** σημαίνει ότι $\frac{Y}{X} \overset{d}{=} 1$. Για παράδειγμα εάν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές, δηλαδή έχουμε $X \overset{d}{=} Y$, τότε $X - Y \overset{d}{=} N(0,2)$ και $\frac{Y}{X} \overset{d}{=} Ca(0,1)$.

Ορίζουμε την υπό συνθήκη κατανομή της τ.μ. $X \sim F_X$ δοθέντος του ενδεχομένου $B \in \mathcal{F}$ σαν $F_{X|B}(x \mid B) = P\{X \leq x \mid B\} = \dfrac{P\left(\{X \leq x\} \cap B\right)}{P(B)}$.

Η $F_{X|B}$ είναι συνάρτηση κατανομής , της τ.μ. $Y = [X \mid B]$

1. $F_{X|B}(-\infty \mid B) = \dfrac{P\left(\{X \leq -\infty\} \cap B\right)}{P(B)} = \dfrac{P(\varnothing \cap B)}{P(B)} = 0$

2. $F_{X|B}(\infty \mid B) = \dfrac{P(\{X \le \infty\} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\mathbb{R} \cap B)}{P(B)} = 1$

3. $P\{a < X \le b \mid B\} = \dfrac{P(\{a < X \le b\} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((\{X \le b\} \setminus \{X \le a\}) \cap B)}{P(B)}$

$= \dfrac{P(\{X \le b\} \cap B \setminus \{X \le a\} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\{X \le b\} \cap B)}{P(B)} - \dfrac{P(\{X \le a\} \cap B)}{P(B)}$

$= F_{X|B}(b \mid B) - F_{X|B}(a \mid B)$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι εάν $B = \{\alpha < X \le \beta\}$ και $X \sim F_X$ τότε

1. $F_{X|B}(x \mid B) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \le a \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(\beta) - F_X(a)} & \alpha < x \le \beta \\ 1 & x \ge \beta \end{array} \right\}$

2. $f_{X|B}(x \mid B) \propto f_X(x) 1(\alpha < x \le \beta)$

3. $\mathbb{E}(X \mid B) = \dfrac{\mathbb{E}(1_B X)}{\mathbb{E}(1_B)}$

1. Από τον ορισμό της υπό συνθήκη κατανομής της τ.μ. $X \sim F_X$ δοθέντος του ενδεχομένου $B \in \mathcal{F}$, έχουμε $F_{X|B}(x \mid B) = \dfrac{P(\{X \le x\} \cap \{\alpha < X \le \beta\})}{P\{\alpha < X \le \beta\}}$, και επειδή

$$\{X \le x\} \cap \{\alpha < X \le \beta\} = \left\{ \begin{array}{cc} \varnothing & x \le a \\ \{\alpha < X \le x\} & \alpha < x \le \beta \\ \{\alpha < X \le \beta\} & x \ge \beta \end{array} \right\},$$

παίρνουμε

$$F_{X|B}(x \mid B) = \frac{1}{P\{\alpha < X \le \beta\}} \left\{ \begin{array}{cc} P(\varnothing) & x \le a \\ P\{\alpha < X \le x\} & \alpha < x \le \beta \\ P\{\alpha < X \le \beta\} & x \ge \beta \end{array} \right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & x \le a \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(\beta) - F_X(a)} & \alpha < x \le \beta \\ \dfrac{F_X(\beta) - F_X(a)}{F_X(\beta) - F_X(a)} & x \ge \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & x \le a \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(\beta) - F_X(a)} & \alpha < x \le \beta \\ 1 & x \ge \beta \end{Bmatrix}.$$

2. Για την πυκνότητα της υπό συνθήκη κατανομής έχουμε

$$f_{X|B}(x \mid B) = \begin{Bmatrix} 0 & x \le a \\ \dfrac{f_X(x)}{\int_\alpha^\beta f_X(x)} & \alpha < x \le \beta \\ 0 & x \ge \beta \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{f_X(x)}{\int_\alpha^\beta f_X(x)} 1(\alpha < x \le \beta) \propto f_X(x) 1(\alpha < x \le \beta)$$

3. Για την υπό συνθήκη μέση τιμή θα έχουμε

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X|B}(x \mid B)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\int_\alpha^\beta f_X(x)} x\, f_X(x) 1(\alpha < x \le \beta)\, dx$$

$$= \frac{1}{\int_\alpha^\beta f_X(u)\, du} \int_\alpha^\beta x\, f_X(x)\, dx .$$

και επειδή

$$\mathbb{E}(1_B) = \int_{\mathbb{R}} 1(x \in B)\, f_X(x)\, dx = \int_B f_X(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f_X(x)\, dx$$

$$\mathbb{E}(1_B X) = \int_{\mathbb{R}} 1(x \in B)\, x\, f_X(x)\, dx = \int_B x\, f_X(x)\, dx = \int_\alpha^\beta x\, f_X(x)\, dx ,$$

τελικά παίρνουμε $\mathbb{E}(X \mid B) = \dfrac{\mathbb{E}(1_B X)}{\mathbb{E}(1_B)}$.

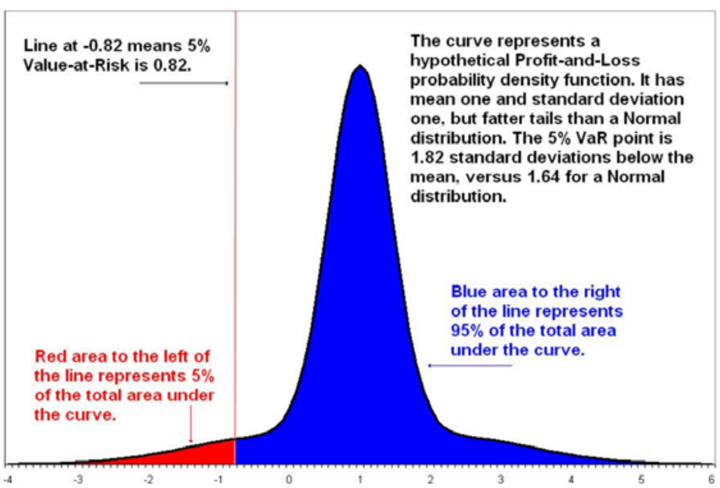
Εφαρμογή

Στη θεωρία χρηματοπιστωτικού κινδύνου ορίζουμε την κατανομή F_X των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου X (distribution of portfolio returns or profit – and – loss distribution). Επίσης ορίζουμε ως Value – at – Risk για επίπεδο εμπιστοσύνης α την ποσότητα $VaR^{\alpha}(X) = Percentile(X;1-\alpha)$. Το $VaR^{\alpha}(X)$ θεωρείται ένα μέτρο κινδύνου για το χαρτοφυλάκιο X.

Εμφανώς εάν $q = VaR^{\alpha}(X)$ τότε $F_X(q) = P\{X \le q\} = \int_{-\infty}^{q} f_X(x)\,dx = 1-a$.

Ένα άλλο μέτρο κινδύνου που βασίζεται στο Value – at – Risk είναι το **Expected – Shortfall** που ορίζεται σαν $ES^{\alpha}(X) = \mathbb{E}\left(X \mid X \le VaR^{\alpha}(X)\right)$.

Τότε $ES^{\alpha}(X) = \mathbb{E}(X \mid X \le q) = \dfrac{\mathbb{E}\left(1_{\{X \le q\}} X\right)}{\mathbb{E}\left(1_{\{X \le q\}}\right)} = \dfrac{1}{\int_{-\infty}^{q} f_X(u)\,du} \int_{-\infty}^{q} x\, f_X(x)\,dx$.



<u>Πρόταση</u>

Εάν ο μετασχηματισμός $y = T(x)$, όπου $x = (x_1,\ldots,x_d)$ και $y = (y_1,\ldots,y_d)$, με $T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι ένα – προς – ένα για κάθε $x \in D_T \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε υπάρχει μοναδική λύση $x = T^{-1}(y)$. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των x και y, έχουμε:

$$T:\left\{\begin{matrix} y_1 = y_1(x_1,\ldots,x_d) \\ \vdots \\ y_d = y_d(x_1,\ldots,x_d) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow T^{-1}:\left\{\begin{matrix} x_1 = x_1(y_1,\ldots,y_d) \\ \vdots \\ x_d = x_d(y_1,\ldots,y_d) \end{matrix}\right\}.$$

Εάν

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\mathcal{R}}\cdots\int f\left(x_1,\ldots,x_d\right)dx_1\cdots dx_d,$$

το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $z = f\left(x_1,\ldots,x_d\right)$ στο χωρίο $\mathcal{R} \subseteq D_T \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{I} = \int\limits_{T(\mathcal{R})}\cdots\int f\left(x_1\left(y_1,\ldots,y_d\right),\ldots,x_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right|dy_1\cdots dy_d$$

Όπου $Jac\left(T^{-1}\right) = \det\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \dfrac{\partial\left(x_1,\ldots,x_d\right)}{\partial\left(y_1,\ldots,y_d\right)}$, η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Συμβολικά θα είχαμε:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{x\in\mathcal{R}}\cdots\int f\left(x\right)dx = \int\limits_{y\in T(\mathcal{R})}\cdots\int f\left(x\left(y\right)\right)\left|dT^{-1}\left(y\right)\right| = \int\limits_{y\in T(\mathcal{R})}\cdots\int f\left(x\left(y\right)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right|dy$$

<u>Πολυδιάστατοι μετασχηματισμοί πυκνοτήτων</u>

Έστω ότι $X = \left(X_1,\ldots,X_d\right)$ **και** $Y = \left(Y_1,\ldots,Y_d\right)$ **δύο διανυσματικές τ.μ. που συνδέονται με τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό** $T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ κατά την έννοια

$$\Omega \xrightarrow{X} \underbrace{X\left(\Omega\right)}_{\subseteq\mathbb{R}^d} \xrightarrow{T} \underbrace{Y\left(\Omega\right) = T\left(X\left(\Omega\right)\right)}_{\subseteq\mathbb{R}^d}.$$

Δηλαδή $Y = T\left(X\right) \Leftrightarrow X = T^{-1}\left(Y\right)$ και χρησιμοποιώντας συντεταγμένες έχουμε:

$$T:\left\{\begin{matrix} y_1 = y_1\left(x_1,\ldots,x_d\right) \\ \vdots \\ y_d = y_d\left(x_1,\ldots,x_d\right)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow T^{-1}:\left\{\begin{matrix} x_1 = x_1\left(y_1,\ldots,y_d\right) \\ \vdots \\ x_d = x_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)\end{matrix}\right\}.$$

Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν ο T είναι ένα – προς – ένα στο χωρίο $X\left(\Omega\right) \subseteq \mathbb{R}^d$, θα έχουμε:

$$f_{Y_1,\ldots,Y_d}\left(y_1,\ldots,y_d\right)=f_{X_1,\ldots,X_d}\left(x_1\left(y_1,\ldots,y_d\right),\ldots,x_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right|,$$

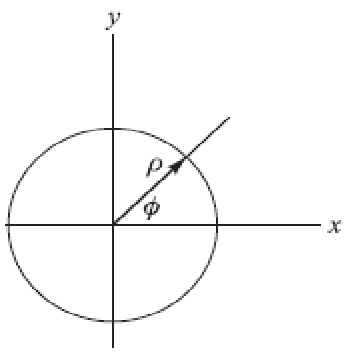
όπου $Jac\left(T^{-1}\right)$ η ορίζουσα του Ιακωβιανού (Jacobian) πίνακα του αντίστροφου μετασχηματισμού. Για την Ιακωβιανή ορίζουσα ισχύει ότι

$$Jac\left(T^{-1}\right)=\det\left(\frac{\partial x_i\left(y_1,\ldots,y_d\right)}{\partial y_j}\right)=Jac\left(T\right)^{-1}=\det\left(\frac{\partial y_i\left(x_1,\ldots,x_d\right)}{\partial x_j}\right)^{-1}.$$

<u>Παράδειγμα</u>
Να βρεθούν οι ομοιόμορφες κατανομές στα παρακάτω χωρία, χρησιμοποιώντας πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες

1. $\mathcal{R}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<R^2\right\}$
2. $\mathcal{R}=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<R^2\right\}$

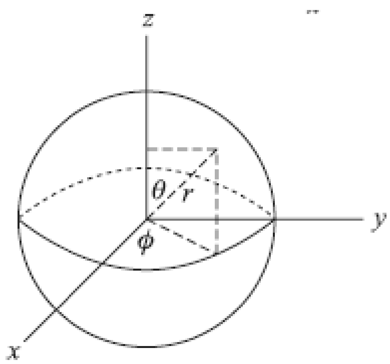
1.



$$T^{-1}:\begin{cases}x=x\left(\rho,\varphi\right)=\rho\cos\left(\varphi\right)\\ y=y\left(\rho,\varphi\right)=\rho\sin\left(\varphi\right)\end{cases}\Rightarrow Jac\left(T^{-1}\right)=\begin{vmatrix}x_\rho & x_\varphi\\ y_\rho & y_\varphi\end{vmatrix}=\rho$$

$$1=C\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,y\right)dydx=C\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\rho d\rho d\varphi=C\cdot 2\pi\frac{1}{2}R^2\Rightarrow C^{-1}=\pi R^2.$$

2.



$$T^{-1}:\begin{cases} x = x(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ y = y(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ z = z(\rho,\varphi,\vartheta) = \rho\cos(\vartheta) \end{cases} \Rightarrow Jac\left(T^{-1}\right) = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_\vartheta \\ y_\rho & y_\varphi & y_\vartheta \\ z_\rho & z_\varphi & z_\vartheta \end{vmatrix} = \rho^2\sin(\vartheta)$$

$$1 = C\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{z=-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dzdydx = C\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\sin(\vartheta)\,d\rho d\vartheta d\varphi$$

$$= C\cdot\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{\vartheta=0}^{\pi}\sin(\vartheta)\,d\vartheta\int_{\rho=0}^{R}\rho^2 d\rho = C\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Εάν ο T δεν είναι ένα – προς – ένα στο χωρίο $X(\Omega)$, τότε όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση θα έχουμε:

$$f_Y(y) = \sum_{y=T(x)}\frac{f_X(x)}{\left|Jac(T)\right|} = \sum_{y=T(x)} f_X(x(y))\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right|.$$

Η πυκνότητα της $W = X+Y$: Δίνονται οι τ.μ $X \sim f_X$ και $Y \sim f_Y$, που είναι οι συντεταγμένες τ.μ. (περιθώριες) της από κοινού $(X,Y) \sim f_{X,Y}$. Θέλουμε να βρούμε την πυκνότητα της $W = X+Y$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$T:\begin{cases} w = w(x,y) = x+y \\ z = z(x,y) = x \end{cases} \Leftrightarrow T^{-1}:\begin{cases} x = x(w,z) = z \\ y = y(w,z) = w-z \end{cases} \Rightarrow Jac\left(T^{-1}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Η πυκνότητα $f_{W,Z}$ της δ.τ.μ. (W,Z) είναι

$$f_{W,Z}(w,z) = f_{X,Y}\left(x(w,z),y(w,z)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right| = f_{X,Y}(z,w-z).$$

Για να βρούμε την πυκνότητα f_W της τ.μ. W περιθωριοποιούμε την $f_{W,Z}(w,z)$ ως προς Z :

$$f_W(w) = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z, w-z)\,dz .$$

Στην ειδική περίπτωση που X και Y είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες έχουμε:

$$f_W(w) = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\, f_Y(w-z)\,dz .$$

Σε αυτή την περίπτωση η πυκνότητα f_W είναι η **συνέλιξη των πυκνοτήτων** f_X και f_Y

$$f_W = f_{X+Y} = f_X * f_Y .$$

Είναι εμφανές ότι η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική, δηλαδή $f_X * f_Y = f_Y * f_X$, εφόσον $f_{X+Y} = f_{Y+X}$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό $u = w - z$

$$\left(f_X * f_Y\right)(w) = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\, f_Y(w-z)\,dz = -\int_{u=\infty}^{-\infty} f_X(w-u)\, f_Y(u)\,du$$

$$= \int_{z=-\infty}^{\infty} f_X(w-z)\, f_Y(z)\,dz = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_Y(z)\, f_X(w-z)\,dz = \left(f_Y * f_X\right)(w).$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται οι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ $X \sim Exp(a)$ και $Y \sim Exp(b)$ να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. $W = X + Y$.

$$f_W(w) = \left(f_X * f_Y\right)(w) = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\, f_Y(w-z)\,dz = \int_{z=-\infty}^{\infty} Exp(z \mid a)\, Exp(w-z \mid b)\,dz$$

$$= \int_{z=-\infty}^{\infty} a e^{-az} 1(z>0)\, b e^{-b(w-z)} 1(w-z>0)\,dz = abe^{-bw} \int_{z=-\infty}^{\infty} e^{(b-a)z} 1(z>0) 1(w-z>0)\,dz$$

$$= abe^{-bw} \int_{z=0}^{w} e^{(b-a)z}\,dz .$$

Έχουμε ότι $a > 0$ και $b > 0$. Πιο συγκεκριμένα εάν $a = b = \lambda$

$$f_W(w) = \left(f_X * f_Y\right)(w) = \lambda^2 e^{-\lambda w} \int_{z=0}^{w} dz = \lambda^2 w e^{-\lambda w},\ w > 0,$$

Και αναγνωρίζουμε ότι $W = X + Y \sim Ga(2,\lambda)$. Δηλαδή για $a = b = \lambda$ έχουμε ότι ο νόμος της τ.μ. W είναι

$$W = X + Y \sim Ga(1,\lambda) + Ga(1,\lambda) \sim Ga(2,\lambda).$$

Για θετικά $a \neq b$ έχουμε

$$f_W(w) = (f_X * f_Y)(w) = abe^{-bw}\int_{z=0}^{w} e^{(b-a)z}dz = \frac{ab}{b-a}\left(e^{-aw} - e^{-bw}\right),\ w > 0,$$

Συνολικά λοιπόν για την κατανομή της $W = X + Y$ έχουμε

$$f_W(w) = f_{X+Y}(w) = \left\{\begin{array}{ll} Ga(w\,|\,2,\lambda), & a = b = \lambda \\ \dfrac{ab}{b-a}\left(e^{-aw} - e^{-bw}\right), & a \neq b \end{array}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$a > b \Rightarrow f_W(w) \propto e^{-bw} - e^{-aw},\ w > 0 \Rightarrow C = \frac{ab}{a-b} \Rightarrow f_W(w) = \frac{ab}{b-a}\left(e^{-aw} - e^{-bw}\right),$$

$$a < b \Rightarrow f_W(w) \propto e^{-aw} - e^{-bw},\ w > 0 \Rightarrow C = \frac{ab}{b-a} \Rightarrow f_W(w) = \frac{ab}{b-a}\left(e^{-aw} - e^{-bw}\right).$$

Δείξαμε ότι εάν οι τ.μ. $X_1 \sim Ga(1,\lambda)$ και $X_2 \sim Ga(1,\lambda)$ είναι ανεξάρτητες, η κατανομή του αθροίσματος $X_1 + X_2$ είναι $Ga(2,\lambda)$. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε επαγωγικά ότι εάν $X_i \overset{iid}{\sim} Ga(1,\lambda)$ για $i = 1,\ldots,n$ τότε $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n,\lambda)$.

<u>Άσκηση</u>

Εάν δίνονται οι ανεξάρτητες τ.μ. $X \sim Ga(a,\lambda)$ και $Y \sim Ga(b,\lambda)$ δείξτε ότι:

1. $W = X + Y \sim Ga(a,\lambda) + Ga(b,\lambda) \overset{d}{=} Ga(a+b,\lambda)$ και ότι το ολοκλήρωμα beta $B(a,b)$ που ορίζεται σαν $B(a,b) = \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$, για $a > 0$ και $b > 0$ μπορεί να εκφρασθεί με τη χρήση gamma συναρτήσεων στην μορφή: $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

2. $E\left[X^k\right]=\frac{(a)_{(k)}}{\lambda^k}$ για $k\geq 0$ και $M_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$, $|t|<\lambda$.

1. $f_X(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}1(x>0)$, $f_Y(y)=\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}e^{-\lambda y}1(y>0)$

Η τ.μ. $W=X+Y$ έχει πυκνότητα f_W που είναι η συνέλιξη των f_X και f_Y

$$f_W(w)=(f_X*f_Y)(w)=\int_{z=-\infty}^{\infty}f_X(z)f_Y(w-z)dz=\int_{z=-\infty}^{\infty}Ga(z\mid a,\lambda)Ga(w-z\mid b,\lambda)dz$$
$$=\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}z^{a-1}e^{-\lambda z}1(z>0)\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}(w-z)^{b-1}e^{-\lambda(w-z)}1(w-z>0)d$$
$$=\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}z^{a-1}(w-z)^{b-1}e^{-\lambda w}1(0<z<w)dz$$
$$=\int_{z=0}^{w}\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}z^{a-1}(w-z)^{b-1}e^{-\lambda w}dz=\frac{\lambda^{a+b}e^{-\lambda w}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{z=0}^{w}z^{a-1}(w-z)^{b-1}dz$$
$$\overset{z=wx}{=}\frac{\lambda^{a+b}w^{a+b-1}e^{-\lambda w}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{x=0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Θέτοντας $B(a,b)=\int_{v=0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, παίρνουμε $f_W(w)=\left\{\frac{B(a,b)\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right\}w^{a+b-1}e^{-\lambda w}$.

Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $B(a,b)$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f_W είναι πυκνότητα

$$1=\int_{w=0}^{\infty}f_W(w)dw=\frac{B(a,b)\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{w=0}^{\infty}w^{a+b-1}e^{-\lambda w}dw$$
$$\overset{\tau=\lambda w}{=}\frac{B(a,b)\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\tau=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{a+b-1}e^{-\tau}\frac{d\tau}{\lambda}=\frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\tau=0}^{\infty}\tau^{a+b-1}e^{-\tau}d\tau$$
$=\frac{B(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\Gamma(a+b)$, από όπου $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το $B(a,b)$ στην f_W έχουμε

$$f_W(w)=\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}w^{a+b-1}e^{-\lambda w}=Ga(w\mid a+b,\lambda),$$

και έτσι $W = X + Y \sim Ga(a+b,\lambda)$

2. $E\left[X^k\right] = \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx = \int\limits_{x=0}^{\infty} x^k \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int\limits_{x=0}^{\infty} x^{a+k-1}e^{-\lambda x}dx$

$$\overset{\tau=\lambda x}{=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int\limits_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{a+k-1} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\lambda} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{a+k} \int\limits_{x=0}^{\infty} \tau^{a+k-1}e^{-\tau}d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\lambda^k} = \frac{(a+k-1)(a+k-2)\cdots(a+1)(a)\Gamma(a)}{\Gamma(a)\lambda^k}$$

$$= \frac{(a+k-1)(a+k-2)\cdots(a+1)(a)}{\lambda^k} = \frac{(a)_{(k)}}{\lambda^k}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E\left(X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{(a)_{(k)}}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{(k)}}{k!}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k$$

Επειδή

$$\frac{(a)_{(k)}}{k!} = \frac{(a+k-1)(a+k-2)\cdots(a+1)(a)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(-a)((-a)-1)\cdots((-a)-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-a}{k}$$

παίρνουμε

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{(k)}}{k!}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}\left(-\frac{t}{\lambda}\right)^k = \left\{1+\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right\}^{-a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a, \quad |t| < \lambda .$$

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι ισχύει:

1. $\{S \vee T \le t\} = \{S \le t\} \cap \{T \le t\} = \{S \le t, T \le t\}$,
2. $\{S \wedge T \le t\} = \{S \le t\} \cup \{T \le t\}$.

1. $\omega \in \{S \vee T \le t\} \Leftrightarrow S(\omega) \vee T(\omega) \le t \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} S(\omega) \le T(\omega) \le t \\ T(\omega) \le S(\omega) \le t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\omega \in \left(\{S \le t\} \cup \{T \le t\}\right) \setminus \left(\left(\{S \le t\}' \cap \{T \le t\}\right) \cup \left(\{S \le t\} \cap \{T \le t\}'\right)\right) = \{S \le t\} \cap \{T \le t\} .$$

2. $\omega \in \{S \wedge T \le t\} \Leftrightarrow S(\omega) \wedge T(\omega) \le t \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} S(\omega) \le t, T(\omega) > t \\ S(\omega) \le T(\omega) \le t \\ T(\omega) \le t, S(\omega) > t \\ T(\omega) \le S(\omega) \le t \end{Bmatrix}$.

Από τις περιπτώσεις $S(\omega) \le T(\omega) \le t$ και $T(\omega) \le S(\omega) \le t$ έχουμε ότι $\omega \in \{S \le t\} \cap \{T \le t\}$.

Από την $S(\omega) \le t, T(\omega) > t$ έχουμε $\omega \in \{S \le t\} \cap \{T > t\} = \{S \le t\} \cap \{T \le t\}'$ και $T(\omega) \le t, S(\omega) > t \Leftrightarrow \omega \in \{S > t\} \cap \{T \le t\} = \{S \le t\}' \cap \{T \le t\}$.

Συνολικά λοιπόν $\omega \in \{S \wedge T \le t\}$ είναι ισοδύναμο με το

$$\omega \in \left(\{S \le t\} \cap \{T \le t\}'\right) \cup \left(\{S \le t\} \cap \{T \le t\}\right) \cup \left(\{S \le t\}' \cap \{T \le t\}\right) = \{S \le t\} \cup \{T \le t\}.$$

<u>Πρόταση</u>

Η πυκνότητα της $W = g(X, Y)$, όταν X και Y από κοινού συνεχείς στις περιπτώσεις:

1. $g(X,Y) = XY$
2. $g(X,Y) = X/Y$
3. $g(X,Y) = \min\{X,Y\}$
4. $g(X,Y) = \max\{X,Y\}$

1. Έχουμε $X \sim f_X$ και $Y \sim f_Y$, για τις περιθώριες της από κοινού $(X,Y) \sim f_{X,Y}$. Θα βρούμε την πυκνότητα της $W = XY$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$T: \begin{Bmatrix} w = w(x,y) = xy \\ z = z(x,y) = x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}: \begin{Bmatrix} x = x(w,z) = z \\ y = y(w,z) = \dfrac{w}{z} \end{Bmatrix} \Rightarrow Jac(T^{-1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{z} & -\dfrac{w}{z^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{z}.$$

Η πυκνότητα $f_{W,Z}$ της δ.τ.μ. (W,Z) είναι

$$f_{W,Z}(w,z) = f_{X,Y}\left(x(w,z), y(w,z)\right)\left|Jac(T^{-1})\right| = f_{X,Y}\left(z, \frac{w}{z}\right)\left|\frac{1}{z}\right|.$$

Για να βρούμε την πυκνότητα f_W της τ.μ. W περιθωριοποιούμε την $f_{W,Z}(w,z)$ ως προς Z:

$$f_W(w)=\int_{z=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(z,\frac{w}{z}\right)\left|\frac{1}{z}\right|dz .$$

Στην ειδική περίπτωση που X και Y είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες έχουμε:

$$f_W(w)=\int_{z=-\infty}^{\infty} f_X(z)\, f_Y\left(\frac{w}{z}\right)\left|\frac{1}{z}\right|dz .$$

2. Για την πυκνότητα της $W = X/Y$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$T:\begin{Bmatrix} w=w(x,y)=x/y \\ z=z(x,y)=x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}:\begin{Bmatrix} x=x(w,z)=z \\ y=y(w,z)=\dfrac{z}{w} \end{Bmatrix} \Rightarrow Jac\left(T^{-1}\right)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{z}{w^2} & \dfrac{1}{w} \end{vmatrix}=\frac{z}{w^2}.$$

Η πυκνότητα $f_{W,Z}$ της δ.τ.μ. (W,Z) είναι

$$f_{W,Z}(w,z)= f_{X,Y}\left(x(w,z),y(w,z)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right|= f_{X,Y}\left(z,\frac{z}{w}\right)\left|\frac{z}{w^2}\right|.$$

Για να βρούμε την πυκνότητα f_W της τ.μ. W περιθωριοποιούμε την $f_{W,Z}(w,z)$ ως προς Z:

$$f_W(w)=\int_{z=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(z,\frac{w}{z}\right)\left|\frac{z}{w^2}\right|dz .$$

Κάνοντας τον μετασχηματισμό $z=uw$ έχουμε για $w>0$

$$f_W(w)=\int_{u=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(uw,u)\left|\frac{u}{w}\right|wdu=\int_{u=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(uw,u)|u|du .$$

Ενώ για $w<0$

$$f_W(w)=\int_{u=\infty}^{-\infty} f_{X,Y}(uw,u)\frac{|u|}{(-w)}wdu=\int_{u=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(uw,u)|u|du$$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις έχουμε:

$$f_W(w)=\int_{u=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(uw,u)|u|du$$

Στην ειδική περίπτωση που X και Y είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες έχουμε:

$$f_W(w) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f_X(uw) f_Y(u)|u|du .$$

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να πάρουμε κατ' ευθείαν το προηγούμενο αποτέλεσμα εάν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό $w = x/y$ και $z = y$ (αντί για $z = x$). Πράγματι

$$T:\begin{Bmatrix} w = w(x,y) = x/y \\ z = z(x,y) = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}:\begin{Bmatrix} x = x(w,z) = wz \\ y = y(w,z) = z \end{Bmatrix} \Rightarrow Jac\left(T^{-1}\right) = \begin{vmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z ,$$

$$f_{W,Z}(w,z) = f_{X,Y}\left(x(w,z), y(w,z)\right)\left|Jac\left(T^{-1}\right)\right| = f_{X,Y}(wz,z)|z| .$$

Που δίνει: $f_W(w) = \int_{z=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(zw,u)|z|dz$.

3. Για την πυκνότητα της $W = \min\{X,Y\} = X \wedge Y$. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$\{X \wedge Y \le w\} = \{X \le w\} \cup \{Y \le w\} .$$

Παίρνοντας πιθανότητες έχουμε

$$F_W(w) = P\left(\{X \le w\} \cup \{Y \le w\}\right) = P\{X \le w\} + P\{Y \le w\} - P\left(\{X \le w\} \cap \{Y \le w\}\right)$$
$$= P\{X \le w\} + P\{Y \le w\} - P\{X \le w, Y \le w\} = F_X(w) + F_Y(w) - F_{X,Y}(w,w)$$

Δηλαδή η α.σ.κ. της $W = X \wedge Y$ είναι $F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_{X,Y}(w,w)$

Παραγωγίζοντας έχουμε την πυκνότητα της W

$$f_W(w) = f_X(w) + f_Y(w) - \left.\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=w \\ y=w}} - \left.\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=w \\ y=w}} .$$

Όπου για την παράγωγο ως προς w της $F_{X,Y}(w,w)$ χρησιμοποιήσαμε το γνωστό αποτέλεσμα $\frac{\partial F\left(G(x,y), H(x,y)\right)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial x}$.

Εάν οι τ.μ. X και Y είναι <u>ανεξάρτητες</u>, θα έχουμε $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ και η πυκνότητα απλοποιείται

$$\begin{aligned} f_W(w) &= f_X(w) + f_Y(w) - f_X(w)F_Y(w) - f_Y(w)F_X(w) \\ &= f_X(w)\big(1 - F_Y(w)\big) + f_Y(w)\big(1 - F_X(w)\big) = f_X(w)S_Y(w) + f_Y(w)S_X(w) \end{aligned}$$

Όπου $S_X(w) = 1 - F_X(w) = \int_{u=w}^{\infty} f_X(u)\,du$ και $S_Y(w) = 1 - F_Y(w) = \int_{u=w}^{\infty} f_Y(u)\,du$ οι συναρτήσεις επιβίωσης (survival) των X και Y αντιστοίχως.

Επίσης παρατηρούμε ότι εάν X και Y είναι ανεξάρτητες

$$\begin{aligned} S_W(w) &= 1 - F_W(w) = 1 - F_X(w) - F_Y(w) + F_X(w)F_Y(w) \\ &= \big(1 - F_X(w)\big)\big(1 - F_Y(w)\big) = S_X(w)S_Y(w) \end{aligned}$$

4. Για την πυκνότητα της $W = \max\{X, Y\} = X \vee Y$. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$\{X \vee Y \le w\} = \{X \le w\} \cap \{Y \le w\}$.

Παίρνοντας πιθανότητες έχουμε

$F_W(w) = P\big(\{X \le w\} \cap \{Y \le w\}\big) = P\{X \le w, Y \le w\} = F_{X,Y}(w,w)$,

και η α.σ.κ. της $W = X \vee Y$ είναι $F_W(w) = F_{X,Y}(w,w)$.

Παραγωγίζοντας έχουμε την πυκνότητα της W

$$f_W(w) = \left.\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=w \\ y=w}} + \left.\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=w \\ y=w}}.$$

Εάν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες τότε $F_W(w) = F_X(w)F_Y(w)$ η πυκνότητα γίνεται

$f_W(w) = f_X(w)F_Y(w) + f_Y(w)F_X(w)$.

Παρατηρήστε ότι: οι κατανομές των minimum και maximum των τ.μ. των X και Y στην περίπτωση που X και Y είναι **ανεξάρτητες** έχουν τις εξής συμμετρίες:

$$W=\min\{X,Y\}\Rightarrow\begin{cases}S_W(w)=S_X(w)S_Y(w)\\ f_W(w)=f_X(w)S_Y(w)+f_Y(w)S_X(w)\end{cases}$$

$$W=\max\{X,Y\}\Rightarrow\begin{cases}F_W(w)=F_X(w)F_Y(w)\\ f_W(w)=f_X(w)F_Y(w)+f_Y(w)F_X(w)\end{cases}$$

Στην ακόμα πιο ειδική περίπτωση όπου οι X και Y **είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες** (IID independent and identically distributed), εάν F η κοινή α.σ.κ., S η κοινή σ.ε. και f η κοινή σ.π.π. τότε

$$W=\min\{X,Y\}\Rightarrow\begin{cases}S_W(w)=S(w)^2\\ f_W(w)=2f(w)S(w)\end{cases}$$

$$W=\max\{X,Y\}\Rightarrow\begin{cases}F_W(w)=F(w)^2\\ f_W(w)=2f(w)F(w)\end{cases}$$

Άσκηση

Δίνονται οι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ $X\sim Exp(a)$ και $Y\sim Exp(b)$ να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. W όταν:

1. $g(X,Y)=XY$
2. $g(X,Y)=X/Y$
3. $g(X,Y)=\min\{X,Y\}$
4. $g(X,Y)=\max\{X,Y\}$

Άσκηση

Εάν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές, δηλαδή έχουμε $X\overset{d}{=}Y$, τότε $X-Y\overset{d}{=}N(0,2)$ και $\dfrac{Y}{X}\overset{d}{=}Ca(0,1)$.

Θα δείξουμε ότι $X-Y\overset{d}{=}N(0,2)$.

Θα δείξουμε ότι $\dfrac{Y}{X}\overset{d}{=}Ca(0,1)$.

Μετασχηματισμοί μαζών πιθανότητας

Εάν X είναι διακριτή τ.μ. έτσι ώστε $X \sim p_X(\cdot) = P\{X = \cdot\}$ και **ο μετασχηματισμός** $Y = T(X)$ **είναι αντιστρέψιμος[6] στο χώρο καταστάσεων** $X(\Omega)$ **της τ.μ.** X **,** τότε ορίζουμε την μάζα της τ.μ. Y με τον εξής τρόπο:

$$p_Y(y) = p_X\left(T^{-1}(y)\right),$$

και ο χώρος καταστάσεων της μετασχηματισμένης τ.μ. Y είναι $Y(\Omega) = T\left(X(\Omega)\right)$.

Παράδειγμα

Εάν η τ.μ. $X \sim Po(\lambda)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή λ και $Y = T(X) = \frac{1}{2}X - 3$, τότε $X = T^{-1}(Y) = 2(Y+3)$ και

$$p_Y(y) = p_X\left(T^{-1}(y)\right) = Po\left(2(y+3) \mid \lambda\right)$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2(y+3)}}{\left[2(y+3)\right]!},\ y \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0^+ - 3 = \{-3, -2.5, -2, -1.5, \ldots\}.$$

Εάν $X = (X_1, \ldots, X_d)$ **και** $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ **δύο από κοινού διακριτές δ.τ.μ. που συνδέονται με τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό** $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ κατά την έννοια

$$\Omega \xrightarrow{X} \underbrace{X(\Omega)}_{\subseteq \mathbb{Z}^d} \xrightarrow{T} \underbrace{Y(\Omega) = T\left(X(\Omega)\right)}_{\subseteq \mathbb{Z}^d}.$$

Για κάθε $x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ θα έχουμε $y = T(x) \Leftrightarrow x = T^{-1}(y)$ ή χρησιμοποιώντας συντεταγμένες:

$$T : \left\{\begin{matrix} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ y_d = f_d(x_1, \ldots, x_d) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow T^{-1} : \left\{\begin{matrix} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_d) \\ \vdots \\ x_d = g_d(y_1, \ldots, y_d) \end{matrix}\right\}.$$

[6] Δηλαδή το T^{-1} είναι συνάρτηση.

Τότε η συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_{Y_1,\ldots,Y_d}\left(y_1,\ldots,y_d\right)=P\left\{Y_1=y_1,\ldots,Y_d=y_d\right\}$ δίνεται από την σχέση

$$
\begin{aligned}
& p_{Y_1,\ldots,Y_d}\left(y_1,\ldots,y_d\right)=P\left\{Y_1=y_1,\ldots,Y_d=y_d\right\} \\
& =P\left\{f_1\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_1,\ldots,f_d\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_d\right\}
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το σύστημα

$$
\left\{\begin{array}{c}
f_1\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_1 \\
f_2\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_2 \\
\vdots \\
f_d\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_d
\end{array}\right\},
$$

ως προς $X_1,\ldots,X_d$, παίρνουμε τη μοναδική λύση

$$
\left\{\begin{array}{c}
X_1=g_1\left(y_1,\ldots,y_d\right) \\
X_2=g_2\left(y_1,\ldots,y_d\right) \\
\vdots \\
X_d=g_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)
\end{array}\right\}.
$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το από κοινού ενδεχόμενο

$$\left\{f_1\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_1,\ldots,f_d\left(X_1,\ldots,X_d\right)=y_d\right\}$$

στη μορφή

$$\left\{X_1=g_1\left(y_1,\ldots,y_d\right),\ldots,X_d=g_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)\right\}.$$

Τελικά παίρνοντας πιθανότητες έχουμε:

$$p_{Y_1,\ldots,Y_d}\left(y_1,\ldots,y_d\right)=p_{X_1,\ldots,X_d}\left(g_1\left(y_1,\ldots,y_d\right),\ldots,g_d\left(y_1,\ldots,y_d\right)\right).$$