Παράδειγμα
Οι τ.μ. μεταβλητές X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες και κατανέμονται σαν Poisson με παραμέτρους λ_1 και λ_2.

1. Να βρεθεί οι από κοινού κατανομή των X_1 και X_2.

2. Ποία η από κοινού των τ.μ. Y_1 και Y_2 εάν $(Y_1,Y_2)=T(X_1,X_2)=(X_1+X_2,X_2)$.

3. Βρείτε τις περιθώριες κατανομές των Y_1 και Y_2.

4. Να βρεθούν οι κατανομές των υπό συνθήκη τ.μ. $[Y_1\,|\,Y_2]$ και $[Y_2\,|\,Y_1]$.

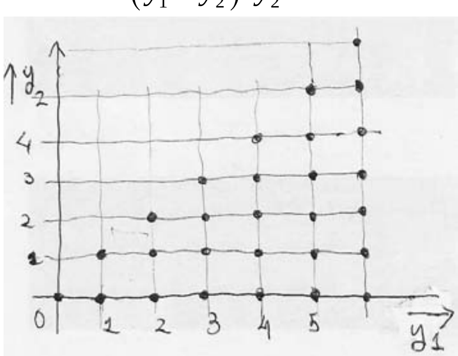
1. Επειδή οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες θα έχουμε για $(x_1,x_2)\in\left(\mathbb{Z}_0^+\right)^2$

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=p_{X_1}(x_1)\,p_{X_2}(x_2)=Po(x_1\,|\,\lambda_1)\,Po(x_2\,|\,\lambda_2)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}}{x_1!\,x_2!}.$$

2. $T:\begin{Bmatrix}Y_1=X_1+X_2\\ Y_2=X_2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow T^{-1}:\begin{Bmatrix}X_1=Y_1-Y_2\\ X_2=Y_2\end{Bmatrix}$

Έτσι η μετασχηματισμένη από κοινού μάζα πιθανότητας των Y_1 και Y_2 είναι

$$p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=P\{X_1+X_2=y_1,X_2=y_2\}=P\{X_1=y_1-y_2,X_2=y_2\}$$
$$p_{X_1,X_2}(y_1-y_2,y_2)=p_{X_1}(y_1-y_2)\,p_{X_2}(y_2)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{y_1-y_2}}{(y_1-y_2)!}1(y_1-y_2\ge 0)\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{y_2}}{y_2!}1(y_2\ge 0)$$
$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!}1(y_1\ge y_2\ge 0).$$



Παρατηρούμε ότι $y_1 = x_1 + x_2 \geq y_2 = x_2$, έτσι όταν $y_2 \in \mathbb{Z}_0^+$, έχουμε $y_1 \in \{y_2, y_2+1, \ldots\}$. Ισοδύναμα όταν $y_1 \in \mathbb{Z}_0^+$, έχουμε $y_2 \in \{0,1,\ldots,y_1\}$. Δηλαδή έχουμε ότι η πιθανότητα $p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ είναι μη μηδενική στο πλέγμα (lattice) $\mathcal{L}_2 \subset \mathbb{Z}^2$ όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{Z}^2 : y_2 \in \mathbb{Z}_0^+,\, y_1 \geq y_2\right\} \\ &= \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{Z}^2 : y_1 \in \mathbb{Z}_0^+,\, y_2 \leq y_1\right\}\end{aligned}$$

Έτσι

$$p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{Bmatrix} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!}, & (y_1,y_2) \in \mathcal{L}_2 \\ 0, & elsewhere \end{Bmatrix}.$$

3. Για τις περιθώριες της p_{Y_1,Y_2} έχουμε

$$\begin{aligned}p_{Y_1}(y_1) &= \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!} 1(y_1 \geq y_2) \\ &= \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!}\sum_{y_2=0}^{y_1}\frac{y_1!}{(y_1-y_2)!\,y_2!}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!}\sum_{y_2=0}^{y_1}\binom{y_1}{y_2}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y_1!}(\lambda_1+\lambda_2)^{y_1} = Po(y_1 \mid \lambda_1+\lambda_2).\end{aligned}$$

Δηλαδή $Y_1 = X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$.

$$\begin{aligned}p_{Y_2}(y_2) &= \sum_{y_1 \in \mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \sum_{y_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!} 1(y_1 \geq y_2) \\ &= \sum_{y_1=y_2}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_2^{y_2}}{y_2!}\sum_{y_1=y_2}^{\infty}\frac{\lambda_1^{y_1-y_2}}{(y_1-y_2)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_2^{y_2}}{y_2!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_2^{y_2}}{y_2!}e^{\lambda_1} = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{y_2}}{y_2!} = Po(y_2 \mid \lambda_2).\end{aligned}$$

Δηλαδή όπως περιμέναμε $Y_2 = X_2 \sim Po(\lambda_2)$.

Τώρα είναι φανερό ότι

$$\sum\sum_{(y_1,y_2)\in\mathcal{L}_2} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!} = \sum_{y_1\in\mathbb{Z}}\sum_{y_2\in\mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \sum_{y_2\in\mathbb{Z}}\sum_{y_1\in\mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = 1.$$

Πράγματι

$$\sum_{y_1\in\mathbb{Z}}\sum_{y_2\in\mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}\left(y_1,y_2\right)=\sum_{y_1=0}^{\infty}\left\{\sum_{y_2=0}^{y_1}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{\left(y_1-y_2\right)!\,y_2!}\right\}=\sum_{y_1=0}^{\infty}Po\left(y_1\mid\lambda_1+\lambda_2\right)=1,$$

και

$$\sum_{y_2\in\mathbb{Z}}\sum_{y_1\in\mathbb{Z}} p_{Y_1,Y_2}\left(y_1,y_2\right)=\sum_{y_2=0}^{\infty}\left\{\sum_{y_1=y_2}^{\infty}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{\left(y_1-y_2\right)!\,y_2!}\right\}=\sum_{y_2=0}^{\infty}Po\left(y_2\mid\lambda_2\right)=1.$$

4. Για την υπό συνθήκη τ.μ. $\left[Y_1\mid Y_2\right]$ έχουμε:

$$p_{Y_1|Y_2}\left(y_1\mid y_2\right)=\frac{p_{Y_1,Y_2}\left(y_1,y_2\right)}{p_{Y_2}\left(y_2\right)}=\left(\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{\left(y_1-y_2\right)!\,y_2!}\right)\left(\frac{y_2!}{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{y_2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{y_1-y_2}}{\left(y_1-y_2\right)!}=Po\left(y_1-y_2\mid\lambda_1\right),\ y_1\in\left\{y_2,y_2+1,\ldots\right\}$$

Δηλαδή $\left[Y_1-Y_2\mid Y_2\right]\sim Po\left(\lambda_1\right)$, εφόσον εάν $p_Y\left(y\right)=Po\left(y-k\mid\lambda\right)$, τότε για $Z=T\left(Y\right)=Y-k$ έχουμε $T^{-1}\left(Z\right)=Y=Z+k$ που δίνει $p_Z\left(z\right)=p_Y\left(T^{-1}\left(Z\right)\right)=Po\left(z\mid\lambda\right)\Rightarrow Z=Y-k\sim Po\left(\lambda\right)$.

Για την υπό συνθήκη τ.μ. $\left[Y_2\mid Y_1\right]$ έχουμε:

$$p_{Y_2|Y_1}\left(y_2\mid y_1\right)=\frac{p_{Y_1,Y_2}\left(y_1,y_2\right)}{p_{Y_1}\left(y_1\right)}=\left(\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{y_1-y_2}\lambda_2^{y_2}}{\left(y_1-y_2\right)!\,y_2!}\right)\left(\frac{y_1!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^{y_1}}\right)$$

$$=\binom{y_1}{y_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{y_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{y_1}=\binom{y_1}{y_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{y_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{y_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{y_1-y_2}$$

$$=\binom{y_1}{y_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{y_2}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{y_1-y_2}=Bin\left(y_2\mid y_1,\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right),\ y_2\in\left\{0,1,\ldots,y_1\right\}.$$

Δηλαδή $\left[Y_2\mid Y_1=y_1\right]\sim Bin\left(y_1,\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα ως προς τις μεταβλητές X_1 και X_2 είναι $\left[X_2\mid X_1+X_2=n\right]\sim Bin\left(n,\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ ενώ λόγω συμμετρίας έχουμε ότι $\left[X_1\mid X_1+X_2=n\right]\sim Bin\left(n,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί για k ανεξάρτητες Poisson. Δηλαδή εάν $X_i \sim Po(\lambda_i)$ για $i=1,\dots,k$ και $X_i \coprod X_j$ για $i \neq j$, τότε θέτοντας $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, που εμφανώς ακολουθεί $S_k \sim Po\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$, έχουμε:

$$(Z_1,\dots,Z_k) = [X_1,\dots,X_k \mid S_k = n] \sim \mathcal{M}(n, p_1,\dots,p_k) \text{ με } p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j},\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1 \text{ και}$$

$$\mathcal{M}(n_1,\dots,n_k \mid n, p_1,\dots,p_k) = \binom{n}{n_1,\dots,n_k} p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}\, 1(n_1+\dots+n_k = n),$$

όπου $\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ και $n_i \in \mathbb{Z}_0^+$ για $i=1,\dots,k$.

Η προηγούμενη μη αρνητική συνάρτηση στο πλέγμα $\mathbb{Z}^k$, είναι μια ιδιάζουσα συνάρτηση μάζας πιθανότητας, εφόσον

$$P\{Z_1+\dots+Z_k = n\} = P\{X_1+\dots+X_k = n \mid S_k = n\} = 1$$

δηλαδή $Z_1+\dots+Z_k = n$ με πιθανότητα 1. Είναι όμως συνάρτηση μάζας πιθανότητας στο $\mathbb{Z}^{k-1}$ με στήριγμα $\mathbb{S}_k = \{(n_1,\dots,n_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} : 0 \le n_1+\dots+n_{k-1} \le n\}$.

Για να το δούμε αυτό θέτουμε

$$(Z_1,\dots,Z_{k-1}) = [X_1,\dots,X_{k-1} \mid S_k = n] \sim \mathcal{M}^*(n, p_1,\dots,p_{k-1})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^*(n_1,\dots,n_{k-1} \mid n, p_1,\dots,p_{k-1}) &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \\ &\quad\times p_1^{n_1}\cdots p_{k-1}^{n_{k-1}} p_k^{n_k}\, 1(n_1+\dots+n_{k-1} \le n)\end{aligned},$$

όπου $n_k = n-(n_1+\dots+n_{k-1})$ και $p_k = 1-(p_1+\dots+p_{k-1})$ ενώ παρατηρούμε ότι η σταθερά κανονικοποίησης μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}} \\ &= \left[\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\right]\left[\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\right]\cdots\left[\frac{(n-n_1-\dots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!(n-n_1-\dots-n_{k-2}-n_{k-1})!}\right] \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!(n-n_1-\dots-n_{k-2}-n_{k-1})!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!n_k!} = \binom{n}{n_1,\dots,n_k}.\end{aligned}$$

Ορισμός της πολυωνυμικής κατανομής: Λέμε ότι το τυχαίο διάνυσμα

$$\left(Z_1,\dots,Z_{k-1}\right) \sim \mathcal{M}^*\left(n, p_1,\dots,p_{k-1}\right),\ \sum_{i=1}^{k} p_i < 1,\ 0 < p_i < 1,$$

ακολουθεί την k – διάστατη πολυωνυμική κατανομή. Θέτοντας $Z_1 + \cdots + Z_{k-1} + Z_k = n$ έχουμε την ιδιάζουσα αναπαράσταση

$$\left(Z_1,\dots,Z_{k-1},Z_k\right) \sim \mathcal{M}\left(n, p_1,\dots,p_{k-1},p_k\right),\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ 0 < p_i < 1$$

<u>Παράδειγμα</u>

Δείξτε ότι η $\left(Z_1,\dots,Z_4\right) \sim \mathcal{M}\left(n, p_1,\dots,p_4\right)$ ή ισοδύναμα η $\left(Z_1,Z_2,Z_3\right) \sim \mathcal{M}^*\left(n, p_1,p_2,p_3\right)$, έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$\mathcal{M}^*\left(n_1,n_2,n_3 \mid n, p_1,p_2,p_3\right) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4}\, 1\left(n_1+n_2+n_3 \le n\right),$$

όπου $n_4 = n - \left(n_1+n_2+n_3\right)$ και $p_4 = 1 - \left(p_1+p_2+p_3\right)$.

Πράγματι

$$\begin{aligned}
&\sum_{\left(n_1,n_2,n_3\right)\in\mathbb{Z}^3} \mathcal{M}^*\left(n_1,n_2,n_3 \mid n, p_1,p_2,p_3\right) \\
&= \sum_{\left(n_1,n_2,n_3\right)\in\mathbb{Z}^3} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4}\, 1\left(n_1+n_2+n_3 \le n\right) \\
&= \sum_{\left(n_1,n_2\right)\in\mathbb{Z}^2} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \\
&\qquad \times \left\{ \sum_{n_3=0}^{n-n_1-n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_3^{n_3} \left(\left(1-p_1-p_2\right)-p_3\right)^{\left(n-n_1-n_2\right)-n_3} \right\} 1\left(n_1+n_2 \le n\right) \\
&= \sum_{\left(n_1,n_2\right)\in\mathbb{Z}^2} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \left(1-p_1-p_2\right)^{n-n_1-n_2}\, 1\left(n_1+n_2 \le n\right) \\
&= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \left\{ \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \binom{n-n_1}{n_2} p_2^{n_2} \left(1-p_1-p_2\right)^{\left(n-n_1\right)-n_2} \right\} 1\left(n_1 \le n\right) \\
&= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \left(1-p_1\right)^{n-n_1} 1\left(n_1 \le n\right) = \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \left(1-p_1\right)^{n-n_1} = 1
\end{aligned}$$

Γίνεται λοιπόν εμφανές (για την γενική απόδειξη θα χρησιμοποιούσαμε $k-1$ αθροίσματα) ότι η συνάρτηση

$$\mathcal{M}^*\left(n_1,\ldots,n_{k-1}\,|\,n,p_1,\ldots,p_{k-1}\right)=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\times p_1^{n_1}\cdots p_{k-1}^{n_{k-1}}p_k^{n_k}\,1\left(n_1+\cdots+n_{k-1}\le n\right),$$

είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας στο $\mathbb{Z}^{k-1}$.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι $\left(Z_1,\ldots,Z_{k-1}\right)\sim\mathcal{M}^*\left(n,p_1,\ldots,p_{k-1}\right)$ έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$\mathcal{M}^*\left(n_1,\ldots,n_{k-1}\,|\,n,p_1,\ldots,p_{k-1}\right)=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\times p_1^{n_1}\cdots p_{k-1}^{n_{k-1}}p_k^{n_k}\,1\left(n_1+\cdots+n_{k-1}\le n\right),$$

όπου $n_k=n-n_1\cdots-n_{k-1}$ και $p_k=1-p_1-\cdots-p_{k-1}$.

$$1=\left(p_1+\cdots+p_k\right)^n=\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}p_1^{n_1}\left(p_2+\cdots+p_k\right)^{n-n_1}$$
$$=\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}p_1^{n_1}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_2^{n_2}\left(p_3+\cdots+p_k\right)^{n-n_1}$$

ανακυκλώνοντας την προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$1=\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}p_1^{n_1}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_2^{n_2}\cdots\sum_{n_{k-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}p_k^{n-n_1-\cdots-n_{k-2}-n_{k-1}}$$
$$=\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}p_1^{n_1}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_2^{n_2}\cdots\sum_{n_{k-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}p_k^{n_k}$$
$$=\sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{k-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$$
$$=\sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{k-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}=\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η πιθανότητα

$$P\left\{Z_1=n_1,\ldots,Z_{k-1}=n_{k-1}\right\}=P\left\{Z_1=n_1,\ldots,Z_{k-1}=n_{k-1},Z_k=n_k\right\}$$

όπου $Z_k=n-Z_1-\cdots-Z_{k-1}$ και $n_k=n-\left(n_1+\cdots+n_{k-1}\right)$ είναι η πιθανότητα σε n **ανεξάρτητες πολυωνυμικές δοκιμές Bernoulli** με k διαφορετικά αποτελέσματα $S_1,\ldots,S_k$ και αντίστοιχες πιθανότητες $p_1,\ldots,p_k$. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι το k – τάξης αποτέλεσμα είναι η άρνηση των προηγουμένων

$k-1$ κατηγοριών, δηλαδή $S_k = S_1' \cdots S_{k-1}' =$ failure on the first $k-1$ categories, με πιθανότητα $p_k = 1-\left(p_1+\cdots+p_{k-1}\right)$.

Στην ειδική περίπτωση $k=2$ έχουμε την διωνυμική κατανομή

$$Z_1 \sim \mathcal{M}^*\left(n, p_1\right) = \mathcal{M}\left(n, p_1, p_2\right),\ p_2 = 1-p_1,\ 0<p_1<1,$$

και

$$\mathcal{M}^*\left(n_1 \mid n, p_1\right) = \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} p_2^{n_2}\, 1\left(n_1 \le n\right) = \binom{n}{n_1} p_1^{n_1}\left(1-p_1\right)^{n-n_1} 1\left(n_1 \le n\right) = Bin\left(n_1 \mid n, p_1\right).$$

Δηλαδή $\mathcal{M}^*\left(n, p_1\right) = \mathcal{M}^*\left(n, p_1, p_2\right) = Bin\left(n, p_1\right)$ με $p_1 + p_2 = 1$.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι $\left(Z_1,\ldots,Z_4\right) \sim \mathcal{M}\left(n, p_1,\ldots,p_4\right)$ ή ισοδύναμα $\left(Z_1, Z_2, Z_3\right) \sim \mathcal{M}^*\left(n, p_1, p_2, p_3\right)$, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$\mathcal{M}^*\left(n_1, n_2, n_3 \mid n, p_1, p_2, p_3\right) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_1^{n_1}\cdots p_3^{n_3} p_4^{n_4}\, 1\left(n_1+n_2+n_3 \le n\right)$$

όπου $n_4 = n-\left(n_1+n_2+n_3\right)$ και $p_4 = 1-\left(p_1+p_2+p_3\right)$.

Δείξτε ότι το περιθώριο τυχαίο διάνυσμα $\left(Z_1, Z_2, Z_3\right)$ έχει κατανομή $\mathcal{M}\left(n, p_1, p_2, 1-p_1-p_2\right)$ ή ισοδύναμα $\left(Z_1, Z_2\right) \sim \mathcal{M}^*\left(n, p_1, p_2\right)$, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$\mathcal{M}^*\left(n_1, n_2 \mid n, p_1, p_2\right) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}\, 1\left(n_1+n_2 \le n\right)$$

όπου τώρα $n_3 = n-\left(n_1+n_2\right)$ και $p_3 = 1-\left(p_1+p_2\right)$.

Πράγματι

$$\sum_{n_3 \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^*\left(n_1, n_2, n_3 \mid n, p_1, p_2, p_3\right) = \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4}\, 1\left(n_1+n_2+n_3 \le n\right)$$

$$= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} p_1^{n_1} p_2^{n_2}\, 1\left(n_1+n_2 \le n\right) \sum_{n_3=0}^{n-n_1-n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} p_3^{n_3} p_4^{n_4}$$

$$=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\,1(n_1+n_2\le n)\sum_{n_3=0}^{n-n_1-n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}p_3^{n_3}\left[1-(p_1+p_2+p_3)\right]^{(n-n_1-n_2)-n_3}$$

$$=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\left[1-(p_1+p_2)\right]^{n-n_1-n_2}1(n_1+n_2\le n)=\mathcal{M}^*(n_1,n_2\,|\,n,p_1,p_2)\,.$$

Άσκηση: Εάν $X_i \overset{ind}{\sim} Po(\lambda_i)$ για $i=1,\dots,k$ και $S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$, που ακολουθεί, δείξτε ότι: $\left[X_1,\dots,X_k\,|\,S_k=n\right]\sim\mathcal{M}(n,p_1,\dots,p_k)$ με $p_i=\dfrac{\lambda_i}{\lambda},\ \lambda\triangleq\sum_{j=1}^{k}\lambda_j$.

Εμφανώς έχουμε ότι $S_k\sim Po\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)$, έτσι

$$P\left\{X_1=n_1,\dots,X_k=n_k\,|\,S_k=n\right\}=P\left\{X_1=n_1,\dots,X_{k-1}=n_{k-1}\,|\,S_k=n\right\}$$

$$=\frac{P\left\{X_1=n_1,\dots,X_{k-1}=n_{k-1},S_k=n\right\}}{P\left\{S_k=n\right\}}=\frac{P\left\{X_1=n_1,\dots,X_{k-1}=n_{k-1},X_1+\cdots+X_k=n\right\}}{P\left\{S_k=n\right\}}$$

$$=\frac{P\left\{X_1=n_1,\dots,X_{k-1}=n_{k-1},X_k=n-n_1-\cdots-n_{k-1}\right\}}{P\left\{S_k=n\right\}}$$

$$=\frac{Po(n_1\,|\,\lambda_1)\cdots Po(n_{k-1}\,|\,\lambda_{k-1})Po(n-n_1-\cdots-n_{k-1}\,|\,\lambda_k)}{Po(n\,|\,\lambda)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{n_1}}{n_1!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n_2}}{n_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda_{k-1}}\lambda_{k-1}^{n_{k-1}}}{n_{k-1}!}\frac{e^{-\lambda_k}\lambda_k^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}}{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}\frac{n!}{e^{-\lambda}\lambda^n}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{k-1}!(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{n_1}\cdots\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda}\right)^{n_{k-1}}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}$$

$$=\binom{n}{n_1,\dots,n_k}p_1^{n_1}\cdots p_{k-1}^{n_{k-1}}p_k^{n_k}$$

Άσκηση: Δίνεται ότι $(Z_1,\dots,Z_5)\sim\mathcal{M}^*(n,p_1,\dots,p_5)$. Να βρεθούν οι υπό συνθήκη κατανομές $\left[Z_1\,|\,Z_2\right]$ και $\left[Z_1,Z_2,Z_3\,|\,Z_4,Z_5\right]$

Γνωρίζουμε ότι $(Z_1,Z_2)\sim\mathcal{M}^*(n,p_1,p_2)$ και έτσι

$$p_{Z_1|Z_2}(n_1\,|\,n_2)=\frac{p_{Z_1,Z_2}(n_1,n_2)}{p_{Z_2}(n_2)}=\frac{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}p_1^{n_1}p_2^{n_2}(1-p_1-p_2)^{n-n_1-n_2}}{\binom{n}{n_2}p_2^{n_2}(1-p_2)^{n-n_2}}$$

$$=\frac{\binom{n}{n_2}\binom{n-n_2}{n_1}p_1^{n_1}p_2^{n_2}(1-p_1-p_2)^{n-n_1-n_2}}{\binom{n}{n_2}p_2^{n_2}(1-p_2)^{n-n_2}}=\frac{\binom{n-n_2}{n_1}p_1^{n_1}(1-p_1-p_2)^{n-n_1-n_2}}{(1-p_2)^{n-n_2}}$$

$$= \binom{n-n_2}{n_1}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^{n_1}\left(1-\frac{p_1}{1-p_2}\right)^{n-n_1-n_2} = Bin\left(n_1 \mid n-n_2, \frac{p_1}{1-p_2}\right)$$

$$p_{Z_1,Z_2,Z_3|Z_4,Z_5}\left(n_1,n_2,n_3 \mid n_4,n_5\right) = \frac{p_{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5}\left(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5\right)}{p_{Z_4,Z_5}\left(n_4,n_5\right)}$$

$$= \frac{\binom{n}{n_4}\binom{n-n_4}{n_5}\binom{n-n_4-n_5}{n_1}\binom{n-n_4-n_5-n_1}{n_2}\binom{n-n_4-n_5-n_1-n_2}{n_3} p_4^{n_4} p_5^{n_5} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}\left(1-p_1-\cdots-p_5\right)^{n-n_1-n_2-n_3-n_4-n_5}}{\binom{n}{n_4}\binom{n-n_4}{n_5} p_4^{n_4} p_5^{n_5}\left(1-p_4-p_5\right)^{n-n_4-n_5}}$$

$$= \frac{\binom{n-n_4-n_5}{n_1}\binom{n-n_4-n_5-n_1}{n_2}\binom{n-n_4-n_5-n_1-n_2}{n_3} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}\left(1-p_1-\cdots-p_5\right)^{n-n_1-n_2-n_3-n_4-n_5}}{\left(1-p_4-p_5\right)^{n-n_4-n_5}}$$

Θέτοντας $n' = n-n_4-n_5$, $p_i' = \dfrac{p_i}{1-p_4-p_5}, i = 1,2,3$ έχουμε

$$p_{Z_1,Z_2,Z_3|Z_4,Z_5}\left(n_1,n_2,n_3 \mid n_4,n_5\right) = \binom{n'}{n_1}\binom{n'-n_1}{n_2}\binom{n'-n_1-n_2}{n_3}\left(p_1'\right)^{n_1}\left(p_2'\right)^{n_2}\left(p_3'\right)^{n_3}\left(1-p_1'-p_2'-p_3'\right)^{n'-n_1-n_2-n_3}$$

$$= \mathcal{M}^*\left(n_1,n_2,n_3 \mid n', p_1', p_2', p_3'\right).$$