Ροπογεννήτριες (moment generating functions), πιθανογεννήτριες (probability generating functions) και χαρακτηριστικές συναρτήσεις (characteristic functions)

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X είναι η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t, $M_X : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P\{X = x\}, & X = \delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\eta \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx, & X = \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \end{matrix} \right\}.$$

Είναι εμφανές ότι αναγκαία προϋπόθεση για την ύπαρξη της ροπογεννήτριας συνάρτησης, είναι η ύπαρξη όλων των ροπών $\mu_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$ της X εφόσον

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mu_k .$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει για όλες τις κατανομές η ροπογεννήτρια συνάρτηση. Για παράδειγμα η student – t με k βαθμούς ελευθερίας, δεν έχει ροπογεννήτρια για κανένα πεπερασμένο k. Όμως για $k = \infty$ παίρνουμε την κανονική κατανομή, που όλες τις οι ροπές συγκλίνουν και η αντίστοιχη ροπογεννήτρια υπάρχει.

Επίσης έχουμε ότι

$$M_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left[X^k e^{tX}\right] \Rightarrow M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left[X^k\right],$$

όπου $M_X^{(k)}(t)$ η k τάξης παράγωγος ως προς t της $M_X(t)$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση[1] της τ.μ. X είναι η μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής t, $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \left\{ \begin{matrix} \sum\limits_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P\{X = x\}, & X = \delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\eta \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx, & X = \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \end{matrix} \right\}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση πάντα υπάρχει. Για παράδειγμα εάν $X \sim f_X(\,\cdot\,)$

[1] Characteristic function (cf)

$$\left|\varphi_X(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}\right| \left|f_X(x)\right| |dx| = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Για παράδειγμα, αν και η Cauchy – Lorentz [2] δεν έχει καμία ροπή, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει η αντίστοιχη ροπογεννήτρια συνάρτηση, η χαρακτηριστική της συνάρτηση υπάρχει. Εάν $X \sim Ca(0,1)$, δηλαδή η X ακολουθεί την τυπική Cauchy – Lorentz έχουμε:

$$f_X(x) = Ca(x \mid 0,1) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \varphi_X(t) = e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Όταν υπάρχει και η αντίστοιχη ροπογεννήτρια συνάρτηση, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$M_X(t) = \varphi_X(-it) \Leftrightarrow \varphi_X(t) = M_X(it)\,.$$

Ο **μετασχηματισμός Fourier της πυκνότητας** f_X είναι

$$\mathcal{F}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)\,dx\right)^* = \varphi_X(t)^*$$

Εάν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f_X, μπορούμε να καταλήξουμε πάλι στην f_X με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathcal{F}_X(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(t)^*\,dt = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt\right)^*$$

Όμως $f_X(x) \in \mathbb{R}$ έτσι παίρνοντας το συζυγές της προηγούμενης ισότητας έχουμε

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt\,.$$

Δηλαδή εάν γνωρίζουμε μόνο την χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(t)$ της X μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη πυκνότητα.

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X είναι η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t, $G_X : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και

[2] Student – t with 1 degree of freedom.

$$G_X(t)=\mathbb{E}\left[t^X\right]=\begin{Bmatrix} \sum_{x\in X(\Omega)} t^x P\{X=x\}, & X=\delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\eta \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^x f_X(x)\,dx, & X=\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \end{Bmatrix}.$$

Το πεδίο σύγκλισης A της $G_X(t)$ είναι γενικά μη κενό εφόσον

$$\left|G_X(t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} t^x f_X(x)\,dx\right|\le \int_{-\infty}^{\infty}|t|^x f_X(x)\,dx\le \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1,\ \forall |t|\le 1,$$

δηλαδή $[-1,1]\subseteq A$.

Η k τάξης παράγωγος ως προς t της $G_X(z)$ στο $t=1$ είναι η k -- τάξης **παραγοντική ροπή**

$$\gamma_k=\mathbb{E}\left[X(X-1)\cdots(X-k+1)\right].$$

Πράγματι η k -- τάξης παράγωγος ως προς t είναι

$$G_X^{(k)}(t)=\mathbb{E}\left[X(X-1)\cdots(X-k+1)t^{X-k}\right]\Rightarrow G_X^{(k)}(1)=\mathbb{E}\left[X(X-1)\cdots(X-k+1)\right].$$

Παράδειγμα: Εάν για μία κατανομή είναι γνωστές οι 3 πρώτες παραγοντικές ροπές π_1,π_2,π_3, να υπολογιστούν οι 3 πρώτες ροπές μ_1,μ_2,μ_3.

$$\gamma_1=G_X^{(1)}(1)=\mathbb{E}[X]=\mu_1$$

$$\gamma_2=G_X^{(2)}(1)=\mathbb{E}\left[X(X-1)\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}[X]=\mu_2-\mu_1$$

$$\gamma_3=G_X^{(3)}(1)=\mathbb{E}\left[X(X-1)(X-2)\right]=\mathbb{E}\left[X^3\right]-3\mathbb{E}\left[X^2\right]+2\mathbb{E}[X]=\mu_3-3\mu_2+2\mu_1$$

από όπου παίρνουμε:

$$\mu_1=\gamma_1$$

$$\mu_2=\gamma_2+\gamma_1$$

$$\mu_3=\gamma_3+3(\gamma_2+\gamma_1)-2\gamma_1=\gamma_3+3\gamma_2+\gamma_1$$

<u>Παράδειγμα</u>
Να υπολογιστούν οι ροπογεννήτριες της Weibull και της Εκθετικής.

Η πυκνότητα της Weibull είναι $Wei\left(x \mid a,b\right) = ax^{b-1}\exp\left[-\frac{a}{b}x^b\right],\ x>0$, και

$$\mathbb{E}\left[X^{\tau}\right]=\int_0^{\infty} x^{\tau} a x^{b-1}\exp\left[-\frac{a}{b}x^b\right]dx=\int_0^{\infty} x^{\tau}\exp\left[-\frac{a}{b}x^b\right]\left(ax^{b-1}dx\right),\ u=\frac{a}{b}x^b$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{bu}{a}\right)^{\tau/b}e^{-u}du=\left(\frac{b}{a}\right)^{\tau/b}\int_0^{\infty}u^{\tau/b}e^{-u}du=\left(\frac{b}{a}\right)^{\tau/b}\Gamma\left(\frac{\tau}{b}+1\right),\ \tau\geq 0 .$$

Έτσι η ροπογεννήτρια αναπαρίσταται συμβολικά (δεν ξέρουμε ακόμα για ποία t συγκλίνει και εάν συγκλίνει) σαν

$$M_X\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mu_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^{k/b}\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right).$$

Θέτουμε $u_k=\frac{t^k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^{k/b}\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$, τότε από το κριτήριο του λόγου, για την απόλυτη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$, έχουμε:

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\left|\frac{t}{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/b}\frac{\Gamma\left(\left(\frac{k}{b}+1\right)+\frac{1}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)}\right|\approx\left|\frac{t}{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/b}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)\left(\frac{k}{b}+1\right)^{1/b}}{\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)}\right|$$
$$=\left|\frac{t}{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/b}\left(\frac{k}{b}+1\right)^{1/b}\right|\approx\left|\frac{t}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/b}\left(\frac{k}{b}\right)^{1/b}\right|=\left|t\right|a^{-1/b}k^{1/b-1}.$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε για τη gamma συνάρτηση την ασυμπτοτική προσέγγιση

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma\left(x+a\right)}{\Gamma\left(x\right)x^a}=1,\ a\in\mathbb{R} .$$

Όταν $b>1$, έχουμε $k^{1/b-1}\to 0$, όταν $k\to\infty$, και η σειρά είναι συγκλίνουσα για κάθε πραγματικό t. Για $b<1$, έχουμε $k^{1/b-1}\to\infty$ όταν, $k\to\infty$, και η σειρά είναι αποκλίνουσα για κάθε πραγματικό t. Όταν $b=1$ έχουμε $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|\approx\left|t\right|a^{-1}<1\Leftrightarrow\left|t\right|<a$.

Στη ειδική περίπτωση που $b=1$ έχουμε $Wei(a,1)=Exp(a)$, που είναι η εκθετική οικογένεια με παράμετρο a. Τότε $\mathbb{E}\left[X^k\right]=\frac{\Gamma(k+1)}{a^k}=\frac{k!}{a^k}$ που δίνει

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mu_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{k!}{a^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^k=\frac{a}{a-t},\ \left|\frac{t}{a}\right|<1\Leftrightarrow|t|<a$$

Εναλλακτικά, για να υπολογίσουμε τις ροπές της εκθετικής χωρίς την χρήση της Γ συνάρτησης θα είχαμε:

$$\mathbb{E}\left[X^k\right]=a\int_0^{\infty}x^k\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx=-\left\{\left[x^k\,\mathrm{e}^{-ax}\right]_{x=0}^{\infty}-k\int_0^{\infty}x^{k-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx\right\}=k\int_0^{\infty}x^{k-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx$$
$$=\frac{k}{a}\int_0^{\infty}x^{k-1}a\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx=\frac{k}{a}\mathbb{E}\left[X^{k-1}\right].$$

Ισχύει λοιπόν η αναδρομική εξίσωση $\mathbb{E}\left[X^k\right]=\frac{k}{a}\mathbb{E}\left[X^{k-1}\right]$ για κάθε $k\geq 1$.

Ανακυκλώνοντας την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε ξανά $\mathbb{E}\left[X^k\right]=\frac{k!}{a^k}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Να υπολογιστεί οι η ροπογεννήτρια της Gamma κατανομής.

1. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$ και στη συνέχεια τις ροπές.
2. Υπολογίζοντας πρώτα τις ροπές μ_k και μετά αθροίζοντας τους όρους $u_k=\frac{t^k}{k!}\mu_k$ για $k\geq 0$.

Εάν $X\sim Ga(a,b)$ έχουμε:

$$M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]=\int_0^{\infty}e^{tx}\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}dx=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-(b-t)x}dx,\ \text{για}\ b-t>0.$$

Θέτοντας $\frac{u}{b-t}=x$ παίρνουμε:

$$M_X(t)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{b-t}\right)^{a-1}e^{-u}\frac{dx}{b-t}=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{1}{(b-t)^a}\int_0^{\infty}u^{a-1}e^{-u}dx=\left(\frac{b}{b-t}\right)^a,\ t<b$$

$$=\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}\left(-\frac{t}{b}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-k+1)}{k!}\left(-\frac{t}{b}\right)^{k}$$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{b^k}$, που δίνει $\mu_k=\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{b^k}$ για $k\geq 0$.

Εμφανώς από το διωνυμικό ανάπτυγμα βλέπουμε ότι $M_X(t)=\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-a}<\infty$, όταν $\left|-\frac{t}{b}\right|<1\Leftrightarrow |t|<b$.

2. $\mathbb{E}\left[X^{\tau}\right]=\int_0^{\infty}x^{\tau}\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}dx=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}x^{a+\tau-1}e^{-bx}dx,\ u=bx$

$=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{1}{b^{a+\tau}}\int_0^{\infty}u^{a+\tau-1}e^{-u}dx=\frac{\Gamma(a+\tau)}{b^{\tau}\Gamma(a)}=\frac{a(a+1)\cdots(a+\tau-1)}{b^{\tau}}$,

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mu_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{b^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!}\left(\frac{t}{b}\right)^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-k+1)}{k!}\left(-\frac{t}{b}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}\left(-\frac{t}{b}\right)^{k}=\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-a}=\left(\frac{b}{b-t}\right)^{a}$$

Η $M_X(t)$ συγκλίνει για $\left|\frac{t}{b}\right|<1\Leftrightarrow |t|<b$.

Στη ειδική περίπτωση που $a=1$ έχουμε $Ga(1,b)=Exp(b)$, που είναι η εκθετική οικογένεια με παράμετρο b. Σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε:
$M_X(t)=\frac{b}{b-t},\ \left|\frac{t}{b}\right|<1\Leftrightarrow |t|<b$.

<u>Άσκηση</u>
Να υπολογιστεί οι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Διωνυμικής κατανομής και στην συνέχεια η ροπογεννήτρια, χρησιμοποιώντας την μεταξύ τους σχέση. Χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση της Διωνυμικής δείξτε ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων Bernoulli έχει διωνυμική κατανομή.

Εάν $Y\sim Bin(n,p)$ τότε

$$G_Y(t)=\mathbb{E}\left[t^Y\right]=\sum_{y=0}^{n}t^y\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}=\sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}(tp)^y(1-p)^{n-y}=(tp+1-p)^n.$$

Γνωρίζουμε ότι $M_Y(t) = G_Y(e^t) \Leftrightarrow G_Y(t) = M_Y(\log(t))$, έτσι παίρνουμε:

$M_Y(t) = G_Y(e^t) = (e^t p + 1 - p)^n$.

Έστω $X_i \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p) = Bin(1, p)$, $1 \le i \le n$ και $X = \sum_{i=1}^n X_i$ τότε

$$M_{X_i}(t) = e^t p + 1 - p$$
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$
$$= \prod_{i=1}^n (e^t p + 1 - p) = (e^t p + 1 - p)^n = M_Y(t)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $M_X(t) = M_Y(t)$, που δίνει $X \overset{d}{=} Y$, ή ότι $X \sim Bin(n, p)$.

<u>Άσκηση</u>
Να δειχθεί ότι:

1. Η κατανομή του αριθμού X των ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli έως την n – οστή επιτυχία και του αριθμού Y των αποτυχιών έως την n-οστή επιτυχία είναι αντίστοιχα $X \sim Nb(n, \vartheta)$ και $Y \sim NB(n, \vartheta)$, όπου ϑ η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή Bernoulli ενώ για $n = 1$ παίρνουμε τις αντίστοιχες Γεωμετρικές παραμετροποιήσεις $X \sim geo(\vartheta)$ και $Y \sim Geo(\vartheta)$, όπου
   i. $Nb(x|n, \vartheta) = \binom{x-1}{n-1} \vartheta^n (1-\vartheta)^{x-n} \cdot 1(x \ge n)$,
   ii. $geo(x|\vartheta) = Nb(x|1, \vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)^{x-1} \cdot 1(x \ge 1)$,
   iii. $NB(y|n, \vartheta) = \binom{y+n-1}{n-1} \vartheta^n (1-\vartheta)^y \cdot 1(y \ge 0)$,
   iv. $Geo(x|\vartheta) = NB(x|1, \vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)^y \cdot 1(y \ge 0)$.

2. Δείξτε ότι $\sum_{y=0}^{\infty} P\{Y = y\} = 1$

3. Βρείτε την πιθανογεννήτρια και την ροπογεννήτρια συνάρτηση της $Y \sim NB(n, \vartheta)$.

4. Δείξτε ότι εάν $X_i \overset{ind}{\sim} Geo(\vartheta)$, για $1 \le i \le n$ τότε $\sum_{i=1}^n X_i \sim NB(n, \vartheta)$

1. Παραμετροποίηση 1

$X =$ # των ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli έως τη n – οστή επιτυχία

$P\{X = x\}$
$= P\{$ $n-1$ επιτυχίες στις πρώτες $x-1$ δοκιμές, επιτυχία στην x δοκιμή$\}$
$= P(\{$ $n-1$ επιτυχίες στις πρώτες $x-1$ δοκιμές$\}\cap\{$ επιτυχία στην x δοκιμή$\})$
$= P\{$ $n-1$ επιτυχίες στις πρώτες $x-1$ δοκιμές$\}\cdot P\{$ επιτυχία στην x δοκιμή$\}$
$= Bin\left(n-1|x-1,\ \vartheta\right)\ Bin\left(1|1,\ \vartheta\right)$
$= \left\{\binom{x-1}{n-1}\vartheta^{n-1}\left(1-\vartheta\right)^{(x-1)-(n-1)}\right\}\vartheta\ = \binom{x-1}{n-1}\vartheta^{n}\left(1-\vartheta\right)^{x-n},\ x\in\left\{n,n+1,n+2,\ldots\right\},$

και έτσι

$$Nb\left(x|n,\vartheta\right)=\binom{x-1}{n-1}\vartheta^{n}\left(1-\vartheta\right)^{x-n}\cdot 1\left(x\geq n\right).$$

Παραμετροποίηση 2

$Y =$ # των αποτυχιών έως τη n – οστή επιτυχία $= X - n$

$P\left\{Y = y\right\} = P\left\{X = y+n\right\}$
$= Nb\left(y+n|n,\vartheta\right)=\binom{y+n-1}{n-1}\vartheta^{n}\left(1-\vartheta\right)^{y},\ y\in\left\{0,1,2,\ldots\right\},$

και έτσι

$$NB\left(y|n,\vartheta\right)=\binom{y+n-1}{n-1}\vartheta^{n}\left(1-\vartheta\right)^{y}\cdot 1\left(y\geq 0\right).$$

Οι δύο συναρτήσεις μάζας πιθανότητας για $n=1$ γίνονται $geo(\vartheta)$ και $Geo(\vartheta)$ αντιστοίχως.

2. Επειδή $1=\vartheta^{n}\left[1+\left(-\left(1-\vartheta\right)\right)\right]^{-n}=\vartheta^{n}\sum_{y=0}^{\infty}\binom{-n}{y}\left(-1\right)^{y}\left(1-\vartheta\right)^{y}$, και

$\left(-1\right)^{y}\binom{-n}{y}=\left(-1\right)^{y}\frac{\left(-n\right)\left(-n-1\right)\cdots\left(-n-\left(y-1\right)\right)}{y!}=\frac{n\left(n+1\right)\cdots\left(n+\left(y-1\right)\right)}{y!}$
$=\frac{\left(n-1\right)!\cdot n\left(n+1\right)\cdots\left(n+y-1\right)}{\left(n-1\right)!\cdot y!}=\frac{\left(n+y-1\right)!}{\left(n-1\right)!\,y!}=\binom{y+n-1}{n-1},$

παίρνουμε

$$1=\vartheta^n \sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+n-1}{n-1}(1-\vartheta)^y=\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+n-1}{n-1}\vartheta^n(1-\vartheta)^y \Leftrightarrow \sum_{y=0}^{\infty} NB(y|n,\vartheta)=1$$

σημειώστε ότι θέτοντας $x=y+n$ παίρνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{x=n}^{\infty}\binom{x-1}{n-1}\vartheta^n(1-\vartheta)^{x-n}=1.$$

3. Η πιθανογεννήτρια της $Y \sim NB(n,\vartheta)$ είναι

$$G_Y(t)=\mathbb{E}\left(t^Y\right)=\sum_{y=0}^{\infty} t^y NB(y|n,\vartheta)=\sum_{y=0}^{\infty} t^y\binom{y+n-1}{n-1}\vartheta^n(1-\vartheta)^y$$

$$=\vartheta^n\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+n-1}{n-1}\left\{t(1-\vartheta)\right\}^y=\vartheta^n\sum_{y=0}^{\infty}\binom{-n}{y}\left\{-t(1-\vartheta)\right\}^y$$

$$=\vartheta^n\left\{1-t(1-\vartheta)\right\}^{-n}=\left\{\frac{\vartheta}{1-t(1-\vartheta)}\right\}^n \text{ για } \left|t(1-\vartheta)\right|<1 \Leftrightarrow |t|<(1-\vartheta)^{-1}.$$

Θέτοντας $t=e^u$, έχουμε: $M_Y(u)=G_Y\left(e^u\right)=\left\{\dfrac{\vartheta}{1-e^u(1-\vartheta)}\right\}^n$

4. $G_X(t)=\mathbb{E}\left[t^{X_1+\cdots+X_n}\right]=\mathbb{E}\left[t^{X_1}\cdots t^{X_n}\right]=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[t^{X_i}\right]=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)$

$$G_{X_i}(t)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x Geo(x|\vartheta)=\sum_{x=0}^{\infty}t^x\vartheta(1-\vartheta)^x=\frac{\vartheta}{1-t(1-\vartheta)}$$

έτσι

$$G_Y(t)=\left\{\frac{\vartheta}{1-t(1-\vartheta)}\right\}^n=G_X(t)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}X_i\sim NB(n,\vartheta).$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εάν $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση δείξτε ότι $\mathbb{E}[X]=\mu$ και $Var[X]=\sigma^2$.

$$M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}N\left(x|\mu,\sigma^2\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2-2\sigma^2tx\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2\left(\mu+\sigma^2t\right)x+\mu^2\right]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left[x^2-2\left(\mu+\sigma^2t\right)x+\left(\mu+\sigma^2t\right)^2\right]+\mu^2-\left(\mu+\sigma^2t\right)^2\right]\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(x - \left(\mu + \sigma^2 t \right) \right)^2 + \mu^2 - \left(\mu + \sigma^2 t \right)^2 \right] \right\} dx$$
$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mu^2 - \left(\mu + \sigma^2 t \right)^2 \right] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(x - \left(\mu + \sigma^2 t \right) \right)^2 \right] \right\} dx$$
$$= \exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} N\left(x | \mu + \sigma^2 t, \sigma^2 \right) dx = \exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2 \right)$$

Έτσι έχουμε $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right)$

$$M_X^{(1)}(t) = \left(\mu + \sigma^2 t \right) M_X(t) \Rightarrow M_X^{(1)}(0) = \mu_1 = \mu$$
$$M_X^{(2)}(t) = \sigma^2 M_X(t) + \left(\mu + \sigma^2 t \right)^2 M_X(t) \Rightarrow M_X^{(2)}(0) = \mu_2 = \mu^2 + \sigma^2$$
$$Var[X] = \mu_2 - \mu_1^2 = \left(\mu^2 + \sigma^2 \right) - \mu^2 = \sigma^2$$

Άσκηση
Να αποδειχτούν οι παρακάτω προτάσεις για χαρακτηριστικές συναρτήσεις:

1. Συμμετρικές γύρω από το μηδέν τυχαίες μεταβλητές έχουν πραγματικές και άρτιες χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

2. Εάν X και Y ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. $Z = X - Y$ είναι πραγματική.

1. Εάν η X είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν τ.μ. τότε $X \overset{d}{=} -X$ ή ισοδύναμα $f_X(-x) = f_X(x)$ δηλ. η πυκνότητα της είναι άρτια.

$$\varphi_X(t)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x) dx$$

κάνοντας τον μετασχηματισμό $u = -x$ παίρνουμε:

$$\varphi_X(t)^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f_X(-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f_X(u) du = \varphi_X(t) \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left\{ \varphi_X(t) \right\} = 0$$

Η $\varphi_X(t)$ είναι και άρτια εφόσον

$$\varphi_X(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} f_X(u) du = \varphi_X(t)^* = \varphi_X(t).$$

2. Επειδή X και Y είναι ταυτοτικά κατανεμημένες, έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση, που συμβολίζουμε με $\varphi(t)$

$$\varphi_Z(t)=\mathbb{E}\left[e^{it(X-Y)}\right]=\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\mathbb{E}\left[e^{-itY}\right]=\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\mathbb{E}\left[e^{itY}\right]^*=\varphi(t)\varphi(t)^*=\left|\varphi(t)\right|^2.$$

<u>Άσκηση</u>
Δίνεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. X είναι $\varphi_X(t)=e^{-|t|},\ t\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. X.

Γνωρίζουμε ότι $f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$, αντικαθιστώντας έχουμε:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-|t|}dt=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t(1+ix)}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-ix}\left[e^{t(1-ix)}\right]_{t=-\infty}^{0}-\frac{1}{1+ix}\left[e^{-t(1+ix)}\right]_{t=0}^{\infty}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}=Ca\left(x\,|\,0,1\right).$$

<u>Άσκηση</u>
Δίνεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τ.μ. X είναι
$\varphi_X(t)=\exp\left(i\alpha t-\beta|t|\right),\ t\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η πυκνότητα της τ.μ. X.

[Απάντηση: $f_X(x)=Ca\left(x\,|\,\alpha,\beta\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+\left(x-\alpha\right)^2}$]

<u>Άσκηση</u>
Δίνονται n ανεξάρτητες τ.μ. $X_1,\dots,X_n$, πραγματικοί αριθμοί $a_1,\dots,a_n$, και ότι $Y=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$.

1. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y είναι $\varphi_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(a_it)$.
2. Εάν $X_1,\dots,X_n$ είναι και ισόνομες, με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(t)$ και $a_1=\cdots=a_n=1$, τότε $\varphi_Y(t)=\varphi(t)^n$.

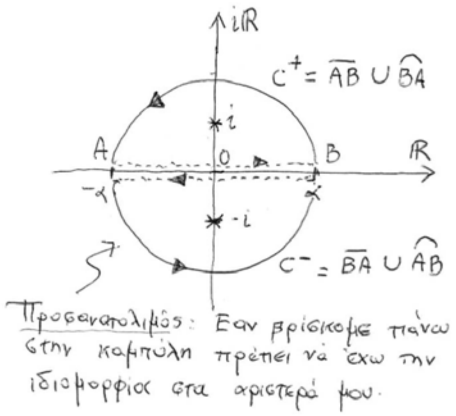
1. $\varphi_Y(t)=\mathbb{E}\left[\exp\left(it\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(ia_itX_i\right)\right]$
$$=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(ia_itX_i\right)\right]=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(a_it).$$

2. Προφανές από την 1.

<u>Παράδειγμα (ΕΚΤΟΣ)</u>
Να βρεθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυπικής Cauchy – Lorentz κατανομής.

Έστω $X \sim Ca(0,1)$ τότε $f_X(x) = Ca(x \mid 0,1) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $g(z;t) = \mathrm{e}^{itz} f_X(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{itz}}{\pi\left(1+z^2\right)},\ z \in \mathbb{C}$ και υπολογίζουμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα της $g(z;t)$ ως προς z πάνω στη C^+



$$\oint_{C^+} g(z;t)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{\mathrm{e}^{itz}}{z-i}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint_{C^+} \frac{\mathrm{e}^{itz}}{z+i}\,dz}_{0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{\mathrm{e}^{itz}}{z-i}\,dz$$

Θέτοντας $g_-(z;t) = \dfrac{\mathrm{e}^{itz}}{z-i}$ έχουμε

$$\oint_{C^+} g(z;t)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} g_-(z;t)\,dz = \frac{1}{2\pi i}2\pi i \operatorname{Res}\left\{g_-(z;t);\ z=i\right\}$$
$$= \lim_{z\to i}(z-i)\,g_-(z;t) = \lim_{z\to i}\mathrm{e}^{itz} = e^{-t}$$

Επειδή $C^+ = \overline{AB} \cup \widehat{BA}$ θα έχουμε:

$$\oint_{C^+} g(z;t)\,dz = \int_{\overline{AB}} g(z;t)\,dz + \int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz \Leftrightarrow \int_{z=-a}^{a} g(z;t)\,dz = e^{-t} - \int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz$$

Όμως

$$\left|\int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz\right| \le \int_{\widehat{BA}} \left|g(z;t)\right|\left|dz\right| \le \int_{\widehat{BA}} \frac{|dz|}{\left|z^2+1\right|},\ t \ge 0$$

Όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\left|\exp(itz)\right| = \left|\exp\left(it|z|\left(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\right)\right)\right| = \exp\left(-t|z|\sin(\vartheta)\right)\left|\exp\left(it|z|\cos(\vartheta)\right)\right|$$
$$= \exp\left(-t|z|\sin(\vartheta)\right) \le 1$$
$$z = re^{i\vartheta} \in \widehat{BA} \Rightarrow 0 \le \vartheta \le \pi \Rightarrow \sin(\vartheta) \ge 0 \overset{t\ge 0}{\Rightarrow} -t|z|\sin(\vartheta) \le 0 \Rightarrow e^{-t|z|\sin(\vartheta)} \le 1$$

Έτσι έχουμε

$$\left|\int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz\right| \le \max_{z\in\widehat{BA}} \frac{1}{\left|z^2+1\right|}\int_{\widehat{BA}}|dz| \le 2\pi a \max_{|z|=a}\frac{1}{\left|z^2+1\right|},\ t\ge 0$$

Επειδή όμως $z\in\widehat{BA} \Rightarrow |z| = a$ έχουμε

$$|z|^2 = \left|\left(z^2+1\right)-1\right| \le \left|z^2+1\right|+1 \Leftrightarrow |z|^2-1 \le \left|z^2+1\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\left|z^2+1\right|} \le \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{a^2-1}$$

$$\left|\int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz\right| \le \frac{2\pi a}{a^2-1}\xrightarrow[a\to\infty]{} 0,\ t\ge 0$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της εξίσωσης $\int_{z=-a}^{a} g(z;t)\,dz = e^{-t} - \int_{\widehat{BA}} g(z;t)\,dz$ όταν $a\to\infty$ έχουμε ότι $\int_{z=-\infty}^{\infty} g(z;t)\,dz = e^{-t},\ t\ge 0$.

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία υπολογισμού του μιγαδικού ολοκληρώματος της $g(z;t)$ ως προς z πάνω στη C^-

$$\oint_{C^-} g(z;t)\,dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+}\frac{\mathrm{e}^{itz}}{z-i}\,dz}_{0} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+}\frac{\mathrm{e}^{itz}}{z+i}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+}\frac{\mathrm{e}^{itz}}{z+i}\,dz$$

Θέτοντας $g_+(z;t) = \dfrac{\mathrm{e}^{itz}}{z+i}$ έχουμε

$$\oint_{C^-} g(z;t)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} g_+(z;t)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}2\pi i\operatorname{Res}\left\{g_+(z;t);\ z=-i\right\}$$
$$= -\lim_{z\to -i}(z+i)\,g_+(z;t) = -\lim_{z\to -i}\mathrm{e}^{itz} = e^{t}$$

Επειδή $C^- = \overline{BA}\cup\widehat{AB}$ θα έχουμε:

$$\oint_{C^-} g(z;t)\,dz = \int_{\overline{BA}} g(z;t)\,dz + \int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz \Leftrightarrow \int_{z=a}^{-a} g(z;t)\,dz = -e^{t} - \int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz$$

$$\Leftrightarrow \int_{z=-a}^{a} g(z;t)\,dz = e^{t} + \int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz$$

Όμως

$$\left|\int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz\right| \le \int_{\widehat{AB}} \left|g(z;t)\right|\left|dz\right| \le \int_{\widehat{AB}} \frac{|dz|}{\left|z^2+1\right|},\ t \ge 0$$

Όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\left|\exp(itz)\right| = \left|\exp\left(it|z|\left(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\right)\right)\right| = \exp\left(-t|z|\sin(\vartheta)\right)\left|\exp\left(it|z|\cos(\vartheta)\right)\right|$$
$$= \exp\left(-t|z|\sin(\vartheta)\right) \le 1$$
$$z = re^{i\vartheta} \in \widehat{AB} \Rightarrow -\pi \le \vartheta \le 0 \Rightarrow \sin(\vartheta) \le 0 \overset{t\le 0}{\Rightarrow} -t|z|\sin(\vartheta) \le 0 \Rightarrow e^{-t|z|\sin(\vartheta)} \le 1$$

Έτσι έχουμε

$$\left|\int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz\right| \le \max_{z\in\widehat{AB}} \frac{1}{\left|z^2+1\right|}\int_{\widehat{BA}} |dz| \le 2\pi a \max_{|z|=a} \frac{1}{\left|z^2+1\right|},\ t \le 0$$

Επειδή όμως $z \in \widehat{AB} \Rightarrow |z| = a$ έχουμε

$$|z|^2 = \left|\left(z^2+1\right)-1\right| \le \left|z^2+1\right|+1 \Leftrightarrow |z|^2 - 1 \le \left|z^2+1\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\left|z^2+1\right|} \le \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{a^2-1}$$

$$\left|\int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz\right| \le \frac{2\pi a}{a^2-1} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0,\ t \le 0$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο της εξίσωσης $\int_{z=-a}^{a} g(z;t)\,dz = e^{t} + \int_{\widehat{AB}} g(z;t)\,dz$ όταν $a \to \infty$ έχουμε ότι $\int_{z=-\infty}^{\infty} g(z;t)\,dz = e^{t},\ t \le 0$.

Τελικά έχουμε:

$$\int_{z=-\infty}^{\infty} g(z;t)\,dz = \begin{Bmatrix} e^{-t},\ t \ge 0 \\ e^{t},\ \ t \le 0 \end{Bmatrix} = \exp\left(-|t|\right).$$

<u>Άσκηση</u>
Δείξτε ότι η τυπική Cauchy – Lorentz κατανομή δεν έχει ροπογεννήτρια.

Θέτουμε $g(x) = x f_X(x)$. Τότε $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^+ dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^- dx$ όπου $g^+ = \max\{0, g\}$ και $g^- = \max\{0, -g\} = -\min\{0, g\}$.

$$g(x)^+ = \begin{Bmatrix} x f_X(x) & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{Bmatrix} = x f_X(x) 1(x > 0)$$

$$g(x)^- = \begin{Bmatrix} 0 & x \ge 0 \\ -x f_X(x) & x < 0 \end{Bmatrix} = |x| f_X(x) 1(x < 0)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx - \int_{-\infty}^0 \frac{|x|}{1+x^2}dx\right\} = \infty - \infty$$ (απροσδιόριστο),

επειδή

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^{\infty} = \infty,$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|x|}{1+x^2}dx = -\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{u}{1+u^2}du = \infty.$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{\pi}(\infty - \pi) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Εναλλακτικά

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to\infty}\int_{-\tau a}^{a} \frac{x}{1+x^2}dx,\ \forall \tau > 0$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\log\left(\frac{1+a^2}{1+\tau^2 a^2}\right) = -\frac{1}{\pi}\log(\tau),\ \forall \tau > 0$$ (απροσδιόριστο – undefined).

<u>Πολυδιάστατες ροπογεννήτριες, πιθανογεννήτριες και χαρακτηριστικές συναρτήσεις</u>

Η <u>ροπογεννήτρια συνάρτηση</u>[3] της τ.μ. $X = \left(X_1, \ldots, X_n\right)^T$ ή από κοινού ροπογεννήτρια των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, είναι η πραγματική συνάρτηση $M_{X_1,\ldots,X_n}$ στις n πραγματικές μεταβλητές $t_1, \ldots, t_n$. Πιο συγκεκριμένα $M_{X_1,\ldots,X_n} : A \to \mathbb{R}$ και $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ με

[3] Moment generating function (mgf).

$$M_X(t) = M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[e^{t_1 X_1}\cdots e^{t_n X_n}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t^T X\right)\right].$$

Η <u>χαρακτηριστική συνάρτηση</u>[4] της τ.μ. $X = (X_1,\ldots,X_n)^T$ ή από κοινού χαρακτηριστική των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$, είναι η μιγαδική συνάρτηση $\varphi_{X_1,\ldots,X_n}$ στις n πραγματικές μεταβλητές $t_1,\ldots,t_n$. Πιο συγκεκριμένα $\varphi_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ και

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[e^{i t_1 X_1}\cdots e^{i t_n X_n}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i t^T X\right)\right].$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n)$ ορίζει με μοναδικό τρόπο την από κοινού κατανομή της τ.μ. $X = (X_1,\ldots,X_n)^T$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα έχουμε ότι:

- Οι τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση παραγοντοποιείται στις αντίστοιχες περιθώριες χαρακτηριστική συναρτήσεις

  $$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \varphi_{X_1}(t_1)\cdots\varphi_{X_n}(t_n).$$

- οι τ.μ. X και Y έχουν την ίδια κατανομή (είναι ισόνομες) όταν έχουν ίσες χαρακτηριστικές συναρτήσεις[5]

  $$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \Leftrightarrow F_X(x) = F_Y(y) \Leftrightarrow X \overset{d}{=} Y.$$

Όταν υπάρχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση, τότε τα προηγούμενα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και από την ροπογεννήτρια συνάρτηση.

Η <u>πιθανογεννήτρια συνάρτηση</u>[6] της τ.μ. $X = (X_1,\ldots,X_n)^T$ ή από κοινού πιθανογεννήτρια των τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$, είναι πραγματική συνάρτηση $G_{X_1,\ldots,X_n}$ στις n πραγματικές μεταβλητές $t_1,\ldots,t_n$ έτσι ώστε $G_{X_1,\ldots,X_n} : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και

$$G_X(t) = G_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \mathbb{E}\left[t_1^{X_1}\cdots t_n^{X_n}\right].$$

[4] Characteristic function (cf)

[5] Δηλαδή υπάρχει μια ένα – προς – ένα και επί σχέση (bijection) μεταξύ κατανομών και χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

[6] Probability generating function (pgf)

Το πεδίο σύγκλισης A της $G_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n)$ είναι γενικά μη κενό, γιατί $[-1,1]^n \subseteq A$. Για να το δούμε ας υποθέσουμε ότι $t\in[-1,1]^n \Leftrightarrow |t_1|\le 1,\ldots,|t_n|\le 1$, τότε:

$$\left|G_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n)\right| = \left|\int_{x_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_n=-\infty}^{\infty} t_1^{x_1}\cdots t_n^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots dx_1\right|$$
$$\le \int_{x_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_n=-\infty}^{\infty} |t_1|^{x_1}\cdots|t_n|^{x_n}\, f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots dx_1$$
$$\le \int_{x_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_n=-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\ldots dx_1 = 1<\infty .$$

<u>Εφαρμογή</u>
Δείξτε ότι η συνθήκη $M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = M_{X_1}(t_1)\cdots M_{X_n}(t_n)$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη $\mathbb{E}\left[X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}\right] = \mathbb{E}\left[X_1^{k_1}\right]\cdots\mathbb{E}\left[X_n^{k_n}\right]$ για κάθε $(k_1,\ldots k_n)\in\mathbb{N}^n$

Θα το δείξουμε για $n=2$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$M_{X,Y}(t,s) = M_X(t)M_Y(s) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[X^kY^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right]$ για κάθε $(k,l)\in\mathbb{N}^2$.

Πράγματι

$$M_{X,Y}(t,s) = \mathbb{E}\left[e^{tX}e^{sY}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kX^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^lY^l}{l!}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^ks^lX^kY^l}{k!l!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^ks^l}{k!l!}\mathbb{E}\left[X^kY^l\right]$$

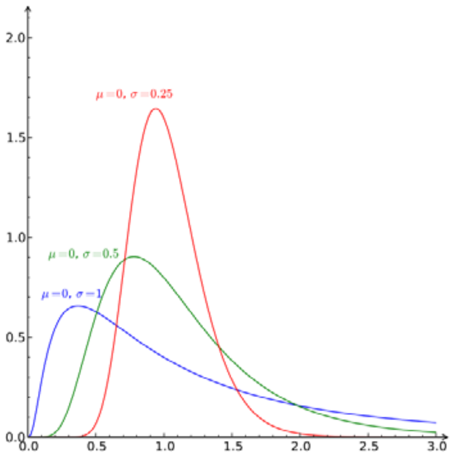
εάν ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[X^kY^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right]$ για κάθε $(k,l)\in\mathbb{N}^2$, η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$M_{X,Y}(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbb{E}\left[X^k\right]s^l\mathbb{E}\left[Y^l\right]}{k!l!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbb{E}\left[X^k\right]}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^l\mathbb{E}\left[Y^l\right]}{l!}$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kX^k}{k!}\right]\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s^lY^l}{l!}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]\mathbb{E}\left[e^{sY}\right] = M_X(t)M_Y(s).$$

<u>Παρατήρηση</u>: Δύο τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν $\mathbb{E}\left[X^kY^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right]$ για κάθε $(k,l)\in\mathbb{N}^2$. Αυτός είναι ο λόγος που γενικά γραμμικά ασυσχέτιστες τ.μ. X και Y (δηλαδή $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$) δεν είναι γενικά και ανεξάρτητες.

<u>Άσκηση</u>

Εάν η Y ακολουθεί την λογαριθμοκανονική (lognormal distribution) κατανομή $Y = e^X \sim LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ όπου $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Να βρεθούν οι ροπές, η μέση τιμή και η διασπορά της Y.



$\mathbb{E}\left[Y^n\right] = \mathbb{E}\left[e^{nX}\right] = M_X\left(n\right) = e^{n\mu + n^2\sigma^2/2}$ όπου $M_X\left(t\right)$ η ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής

$\mathbb{E}\left[Y\right] = e^{\mu+\sigma^2/2}$, και $Var\left[Y\right] = e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\sigma^2/2}\right)^2 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

<u>Τα επόμενα έως το τέλος του PDF είναι εκτός</u>

Τι πληροφορία μα δίνουν οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις για την κατανομή? Εάν η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι πεπερασμένη στα «σωστά σημεία», τότε για κάθε $p>0$ (όχι αναγκαστικά ακέραιος), οι απόλυτες ροπές $\mathbb{E}\left[\left|X\right|^p\right] < \infty$ θα είναι πεπερασμένες . Εμφανώς τότε και $\left|\mathbb{E}\left[X^p\right]\right| < \infty$ εφόσον

$$\left|\mathbb{E}\left[X^p\right]\right| = \left|\int_{x=-\infty}^{\infty} x^p f_X\left(x\right)dx\right| \le \int_{x=-\infty}^{\infty} \left|x\right|^p f_X\left(x\right)dx = \mathbb{E}\left[\left|X\right|^p\right] < \infty$$

Πρόταση: Έστω ότι υπάρχουν $t_1 < t_2$ τέτοια ώστε, $M_X\left(t_1\right) < \infty$ και $M_X\left(t_2\right) < \infty$. Τότε η ροπογεννήτρια είναι πεπερασμένη για κάθε σημείο του διαστήματος $\left[t_1,t_2\right]$. Δηλαδή $M_X\left(t_0\right) < \infty$ για όλα τα $t_0 \in \left[t_1,t_2\right]$.

Για κάθε $t_0 \in \left[t_1,t_2\right]$ υπάρχει $\lambda \in \left[0,1\right]$ τέτοιο ώστε $t_0 = \lambda t_1 + \left(1-\lambda\right)t_2$. Επειδή η συνάρτηση $g\left(t\right) = e^{tx}$ είναι κυρτή, δηλαδή $g''\left(t\right) = x^2 e^{tx} > 0$, θα έχουμε ότι και

$g(t_0)=g\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right)\le \lambda g(t_1)+(1-\lambda)g(t_2)$.

Παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$M_X(t_0)=M_X\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right)\le \lambda M_X(t_1)+(1-\lambda)M_X(t_2)$,

και επειδή $M_X(t_1)<\infty$ και $M_X(t_2)<\infty$ θα έχουμε και $M_X(t_0)<\infty$.

Ορίζουμε το χώρο πυκνοτήτων $\mathcal{L}^p=\{\,f(x)=$ πυκνότητα$:\mathbb{E}\left[|X|^p\right]<\infty\,\}$ για $p\ge 0$.
Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν $0\le p\le q$ τότε $\mathcal{L}^q\subseteq\mathcal{L}^p$, δηλαδή
$\mathbb{E}\left[|X|^q\right]<\infty\Rightarrow\mathbb{E}\left[|X|^p\right]<\infty$

Θα δείξουμε τώρα ότι εάν $t_1<0<t_2$ και $M_X(t_1)<\infty$, $M_X(t_2)<\infty$, τότε υπάρχουν και οι ροπές όλων των τάξεων, δηλαδή ότι $\mathbb{E}\left[|X|^k\right]<\infty$ για κάθε $k=0,1,2,\ldots$.

Θέτουμε $t_0=\min\{-t_1,t_2\}$ τότε $\pm t_0\in[t_1,t_2]$ και από την προηγούμενη πρόταση $M_X(\pm t_0)<\infty$ και παρατηρούμε ότι

$e^{t_0X}+e^{-t_0X}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_0^{2k}X^{2k}}{(2k)!}\ge\frac{t_0^{2l}X^{2l}}{(2l)!}$ για κάθε $l=0,1,2\ldots$

παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$$\infty>M_X(t_0)+M_X(-t_0)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_0^{2k}\mathbb{E}\left[X^{2k}\right]}{(2k)!}\ge\frac{t_0^{2l}\mathbb{E}\left[X^{2l}\right]}{(2l)!}.$$

Έτσι $\mathbb{E}\left[|X|^{2l}\right]<\infty$ που δίνει $\mathbb{E}\left[|X|^{2l}\right]<\infty\Rightarrow\mathbb{E}\left[|X|^{2l-1}\right]<\infty$ για κάθε $l=1,2\ldots$.
Δηλαδή $\mathbb{E}\left[|X|^k\right]<\infty$ για κάθε $k\in\mathbb{N}_0$.

Εάν όμως υπάρχουν όλες οι ροπές αυτό δεν μας εγγυάται την ύπαρξη της ροπογεννήτριας σε διάστημα $[t_1,t_2]$ με $t_1<0<t_2$.

<u>Παράδειγμα</u>
Εάν $Y\sim LN(0,1)$ (τυπική lognormal), δείξτε ότι υπάρχουν όλες οι ροπές, δηλαδή $\mathbb{E}\left[Y^k\right]<\infty$, αλλά $M_Y(t)=\infty$ όταν $t>0$ ενώ για $t\le 0$ έχουμε $M_Y(t)<\infty$ (δηλαδή

δεν υπάρχει διάστημα $\left[t_1,t_2\right]$ με $t_1<0<t_2$.τέτοιο ώστε $M_Y\left(t_0\right)<\infty$ για κάθε $t_0\in\left[t_1,t_2\right]$).

$\mathbb{E}\left[Y^k\right]=\mathbb{E}\left[e^{kX}\right]=M_X\left(k\right)=e^{k^2/2}<\infty$ όπου $M_X\left(t\right)=e^{t^2/2}$ η ροπογεννήτρια της τυπική κανονικής κατανομής.

Γενικά εάν $Y\left(\omega\right)\geq 0$ για κάθε $\omega\in\Omega$ (ισοδύναμα $P\left\{Y\geq 0\right\}=1$), η ροπογεννήτρια της Y συγκλίνει για $t\leq 0$. Πράγματι

$tY\leq 0\Rightarrow 0<e^{tY}\leq 1\Rightarrow 0<\mathbb{E}\left[e^{tY}\right]\leq 1.$

Τώρα για $t>0$

$$M_Y\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tY}\right]=\int_{y=0}^{\infty}e^{ty}LN\left(y\,|\,0,1\right)dy=\int_{y=0}^{\infty}e^{ty}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\log x\right)^2}dy$$

Θέτοντας $y=e^u$ έχουμε:

$$M_Y\left(t\right)=\int_{u=-\infty}^{\infty}e^{te^u}\frac{1}{e^u\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\left(e^u du\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{\infty}\exp\left(te^u-\frac{1}{2}u^2\right)du$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $u>0$, έχουμε $e^u\geq 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}$ και έτσι $te^u-\frac{1}{2}u^2\geq t\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)-\frac{1}{2}u^2$. Ζητάμε u^* τέτοιο ώστε όταν $u>u^*$ να ισχύει η ανισότητα $te^u-\frac{1}{2}u^2\geq t+tu$. Αρκεί τότε να ισχύει $t\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)-\frac{1}{2}u^2\geq t+tu$ που είναι ισοδύναμο με το να ζητήσουμε $u\geq 3\left(1-t\right)=u^*$. Θέτοντας $K=\max\left\{0,u^*\right\}$, παίρνουμε ότι για $t>0$:

$$M_Y\left(t\right)==\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{\infty}\exp\left(te^u-\frac{1}{2}u^2\right)du$$
$$\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u=K}^{\infty}\exp\left(te^u-\frac{1}{2}u^2\right)du\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u=K}^{\infty}e^{t+tu}du=\infty$$

Δηλαδή στην περίπτωση της Lognormal κατανομής, η ροπογεννήτρια δεν παράγει τις ροπές, εφόσον για να γίνει αυτό θα πρέπει να υπάρχει σε

κάποιο διάστημα που να περιέχει το μηδέν. Το «παράδοξο» είναι ότι όλες οι ροπές υπάρχουν.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι πεπερασμένη σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το μηδέν, εάν και μόνον εάν, η ουρές της κατανομής (the tails of the distribution) είναι εκθετικά φραγμένες, δηλαδή υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί K και b, τέτοιοι ώστε, $P\left\{|X|>x\right\}\le \mathrm{K}e^{-bx}$.

(Ικανό) Αποδεικνύουμε ότι εάν $M_X\left(t\right)<\infty$ για κάθε $t\in\left(t_1,t_2\right)$ τότε και $P\left\{|X|>x\right\}\le \mathrm{K}e^{-bx}$.

Εάν $\tau_2>0$ με $\tau_2\in\left(t_1,t_2\right)$, τότε $M_X\left(\tau_2\right)<\infty$ και

$$P\left\{X>x\right\}=P\left\{e^{\tau_2 X}>e^{\tau_2 x}\right\}\le\frac{\mathbb{E}\left[e^{\tau_2 X}\right]}{e^{\tau_2 x}}=e^{-\tau_2 x}M_X\left(\tau_2\right).$$

Εάν $\tau_1>0$ με $\tau_1\in\left(t_1,t_2\right)$, τότε $M_X\left(\tau_1\right)<\infty$ και

$$P\left\{X<-x\right\}=P\left\{e^{\tau_1 X}>e^{-\tau_1 x}\right\}\le\frac{\mathbb{E}\left[e^{\tau_1 X}\right]}{e^{-\tau_1 x}}=e^{\tau_1 x}M_X\left(\tau_1\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισότητες, έχουμε

$$P\left\{|X|>x\right\}\le e^{\tau_1 x}M_X\left(\tau_1\right)+e^{-\tau_2 x}M_X\left(\tau_2\right)=\left[e^{\left(\tau_1+\tau_2\right)x}M_X\left(\tau_1\right)+M_X\left(\tau_2\right)\right]e^{-\tau_2 x}=\mathrm{K}e^{-bx}$$

Με $b=\tau_2>0$ και $\mathrm{K}=e^{\left(\tau_1+\tau_2\right)x}M_X\left(\tau_1\right)+M_X\left(\tau_2\right)>0$.

(Αναγκαίο) Αποδεικνύουμε ότι εάν $P\left\{|X|>x\right\}\le \mathrm{K}e^{-bx}$ τότε υπάρχει διάστημα $\left(t_1,t_2\right)$ τέτοιο ώστε για κάθε $t\in\left(t_1,t_2\right)$ να έχουμε $M_X\left(t\right)<\infty$.

Έχουμε $P\left\{X>x\right\}\le P\left\{|X|>x\right\}\le \mathrm{K}e^{-bx}$. Έστω $t>0$, τότε

$$M_X\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]=\int_{y=0}^{\infty}P\left\{e^{tX}>y\right\}dy\le 1+\int_{y=1}^{\infty}P\left\{e^{tX}>y\right\}dy$$
$$=1+\int_{y=1}^{\infty}P\left\{X>\frac{\log\left(y\right)}{t}\right\}dy\le 1+\int_{y=1}^{\infty}\mathrm{K}\exp\left(-b\frac{\log\left(y\right)}{t}\right)dy=$$

$$=1+\mathrm{K}\int_{y=1}^{\infty} y^{-b/t}dy = 1-\mathrm{K}\frac{1}{1-\frac{b}{t}} = 1+\mathrm{K}\frac{t}{b-t}$$, εφόσον $\frac{b}{t}>0$.

Έχουμε $P\left\{X<-x\right\} \le P\left\{\left|X\right|>x\right\} \le \mathrm{K}e^{-bx}$. Έστω $t<0$, τότε

$$M_X\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]=\int_{y=0}^{\infty} P\left\{e^{tX}>y\right\}dy \le 1+\int_{y=1}^{\infty} P\left\{e^{tX}>y\right\}dy$$

$$=1+\int_{y=1}^{\infty} P\left\{X<-\frac{\log\left(y\right)}{\left|t\right|}\right\}dy \le 1+\int_{y=1}^{\infty} \mathrm{K}\exp\left(-\frac{b}{\left|t\right|}\log\left(y\right)\right)dy=$$

$$=1+\mathrm{K}\int_{y=1}^{\infty} y^{-b/\left|t\right|}dy = 1-\mathrm{K}\frac{1}{1-\frac{b}{\left|t\right|}} = 1+\mathrm{K}\frac{\left|t\right|}{b-\left|t\right|}$$, εφόσον $\frac{b}{\left|t\right|}>0$.

Παρατηρούμε ότι

$$P\left\{X>x\right\} \le \mathrm{K}e^{-bx} \Rightarrow M_X\left(t\right) \le 1+\mathrm{K}\frac{t}{b-t}=1+\mathrm{K}\frac{\left|t\right|}{b-\left|t\right|},\ t>0$$

$$P\left\{X<-x\right\} \le \mathrm{K}e^{-bx} \Rightarrow M_X\left(t\right) \le 1+\mathrm{K}\frac{\left|t\right|}{b-\left|t\right|},\ t<0$$

Δηλαδή όταν $P\left\{\left|X\right|>x\right\} \le \mathrm{K}e^{-bx}$ έχουμε $M_X\left(t\right) \le 1+\mathrm{K}\frac{\left|t\right|}{b-\left|t\right|}$ για $\left|t\right|<b$.

Άσκηση

Δείξτε ότι οι ροπές της τυπικής Cauchy $\mathbb{E}\left[X^p\right]$ είναι πεπερασμένες για $0<p<1$

$$\left|\mathbb{E}\left[X^p\right]\right| \le \mathbb{E}\left[\left|X\right|^p\right]=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\left|x\right|^p}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\left|x\right|^p}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\int_{x=0}^{1}\frac{x^p}{1+x^2}dx+\int_{x=1}^{\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx\right\} \le \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{4}+\int_{x=1}^{\infty}\frac{x^p}{x^2}dx\right\}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{1-p}\right)<\infty$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{x=0}^{1}\frac{x^p}{1+x^2}dx<\frac{\pi}{4}$.

Πράγματι η συνάρτηση $g(p) = x^p$ είναι $g \downarrow$ για $0 < x < 1$, εφόσον $g'(p) = x^p \log(x) < 0$, και έτσι για $0 < p < 1$ έχουμε $1 > x^p > x$, που δίνει

$$\int_{x=0}^{1} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx \le \int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$