Πρόταση: Δίνεται η **θετική τ.μ.** X , δηλαδή $P\{X>0\}=1$. Εάν $a>0$, έχουμε την ανισότητα Markov: $P\{X \geq a\} \leq \dfrac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Εάν υποθέσουμε ότι η $X \sim f_X$ είναι συνεχής, τότε για κάθε $a>0$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x\, f_X(x)dx \geq \int_a^{\infty} x\, f_X(x)dx \geq a\int_a^{\infty} f_X(x)dx = a\,P\{X \geq a\}.$$

Παρατηρείστε ότι: εάν αντικαταστήσουμε την τ.μ. X με την τ.μ. $Y=g(X)$, τέτοια ώστε $P\{g(X)>0\}=1$ και $g\uparrow$ στο στήριγμα της X , θα έχουμε:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx \geq \int_a^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx$$

$$\geq g(a)\int_a^{\infty} f_X(x)dx = g(a)P\{X \geq a\}.$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $x \geq a \Rightarrow g(x) \geq g(a)$, και έτσι

$$P\{X \geq a\} = P\{g(X) \geq g(a)\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(a)}.$$

Για παράδειγμα εάν $g(x)=e^{tx},\ t>0$ τότε για $x \geq 0$:

$$P\{X \geq a\} = P\{e^{tX} \geq e^{ta}\} \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta}M_X(t)$$

<u>Η ανισότητα Chebyshev</u>

Πρόταση: Δίνεται ότι η τ.μ. X έχει πεπερασμένη μέση τιμή $\mu=\mathbb{E}[X]$ και διασπορά $\sigma^2=Var[X]$. Τότε για κάθε $a>0$ ισχύει ότι $P\{|X-\mu| \geq a\} \leq \dfrac{Var[X]}{a^2}$.

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-a} (x-\mu)^2\, f_X(x)dx + \int_{\mu-a}^{\mu+a} (x-\mu)^2\, f_X(x)dx + \int_{\mu+a}^{\infty} (x-\mu)^2\, f_X(x)dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\mu-a} (x-\mu)^2 \, f_X(x)\,dx + \int_{\mu+a}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f_X(x)\,dx$$

$$\geq a^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\mu-a} f_X(x)\,dx + \int_{\mu+a}^{\infty} f_X(x)\,dx \right\}$$

$$= a^2 \left\{ P\{X \leq \mu - a\} + P\{X \geq \mu + a\} \right\} = a^2 P\{|X-\mu| \geq a\}.$$

Εναλλακτικά, θέτοντας $Y = g(X) = (X-\mu)^2$ η ανισότητα Markov για το ενδεχόμενο $\{Y \geq a^2\} = \left\{(X-\mu)^2 \geq a^2\right\} = \{|X-\mu| \geq a\}$ μας δίνει:

$$P\{|X-\mu| \geq a\} = P\{Y \geq a^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2} = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εάν ο αριθμός των μονάδων παραγωγής σε μια εβδομάδα μοντελοποιείται με την τ.μ. X με $\mu = 50$.

1. Ποία η πιθανότητα σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα η παραγωγή να είναι μεγαλύτερη των 75 μονάδων ?

2. Εάν η διασπορά της X είναι $\sigma^2 = 25$, τότε ποία η πιθανότητα σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα η παραγωγή να είναι μεγαλύτερη των 40 και να μην υπερβαίνει τις 60 μονάδες ?

Από την ανισότητα Markov έχουμε $P\{X > 75\} \leq P\{X \geq 75\} \leq \dfrac{\mathbb{E}[X]}{75} = \dfrac{50}{75} \approx 0.67$,

ενώ $P\{40 < X < 60\} = P\{-10 < X - \mu < 10\} = P\{|X-\mu| < 10\}$

$= 1 - P\{|X-\mu| \geq 10\}$

Από την ανισότητα Chebyshev έχουμε

$$P\{|X-\mu| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = 0.25 \;\Rightarrow\; P\{40 < X < 60\} \geq 0.75$$

Η ανισότητα Markov και η ανισότητα Chebyshev μας επιτρέπουν να **υπολογίσουμε φράγματα για πιθανότητες** όταν **μόνο** η μέση τιμή, ή όταν **μόνο** η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής είναι γνωστά. Εάν η συγκεκριμένη κατανομή ήταν γνωστή, οι συγκεκριμένες πιθανότητες θα μπορούσαν να υπολογιστούν **ακριβώς** και δεν θα χρειαζόμαστε τις ανισότητες.

Παράδειγμα

Δίνεται για την τ.μ. X ότι $X \sim \mathcal{U}(0,10)$ βρείτε:

1. Άνω φράγμα της πιθανότητας του ενδεχομένου $B = \{|X-5| \geq 4\}$ με την ανισότητα Chebyshev.
2. Την ακριβή πιθανότητα του ενδεχομένου B.

$X \sim \mathcal{U}(a,b) \Rightarrow Var[X] = \left(b^2 - a^2\right)/12$, από όπου με τη χρήση της ανισότητας Chebyshev παίρνουμε $P\{|X-5| \geq 4\} \leq \frac{25/3}{4^2} \approx 0.52.$

Οι ακριβείς υπολογισμοί δίνουν

$$P\{|X-5| \geq 4\} = \int_{-\infty}^{1} \mathcal{U}(x|0,10)\,dx + \int_{9}^{\infty} \mathcal{U}(x|0,10)\,dx = \frac{1}{10}\left\{\int_0^1 dx + \int_9^{10} dx\right\} = 0.20 .$$

<u>Σχόλιο</u>: Η ανισότητα Chebyshev μας δίνει $P\{|X-5| \geq 4\} < 0.52$. Το άνω φράγμα 0.52 όμως απέχει πολύ από την πραγματική τιμή της πιθανότητας που είναι $P\{|X-5| \geq 4\} = 0.20$. Αυτό κατά κάποια έννοια είναι αναμενόμενο γιατί η **Chebyshev είναι μια πολύ γενική ανισότητα που μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιαδήποτε κατανομή, διακριτή ή συνεχή.**

Παράδειγμα

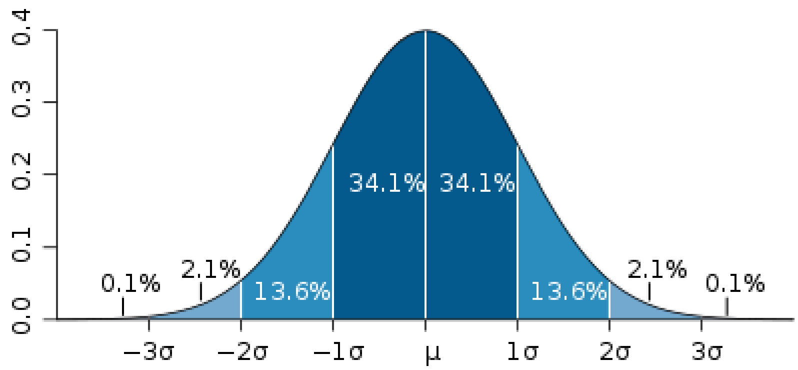
Δίνεται ότι η τ.μ. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ βρείτε

1. Άνω φράγμα της πιθανότητας του ενδεχομένου $B = \{|X-\mu| \geq 3\sigma\}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.
2. την πιθανότητα του ενδεχομένου B.

Από την Chebyshev παίρνουμε:

$$P\{|X-\mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = 0.1111 .$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η μάζα της κανονικής είναι ουσιαστικά συγκεντρωμένη στο διάστημα $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$**,** δηλαδή θα πρέπει η πιθανότητα $P\{|X-\mu| \geq 3\sigma\}$ να είναι κοντά στο μηδέν.



Πράγματι

$$P\left\{|X-\mu|\geq 3\sigma\right\} = P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\geq 3\right\} = P\left\{|Z|\geq 3\right\}$$, όπου $Z \sim N(0,1)$

$$= P\{Z \leq -3\} + P\{Z \geq 3\} = 2P\{Z \geq 3\}$$

$$= 2\left(1-\Phi(3)\right) = 2(1-0.9987) = 0.0026.$$

<u>Άσκηση</u>

Να αποδειχθεί η ανισότητα Bienayme:

$$P\left\{|X-\vartheta\mu|\geq a\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X-\vartheta\mu|^n\right]}{a^n},\ \vartheta\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{N}.$$

Επίσης δείξτε ότι οι ανισότητες Markov και η Chebyshev είναι ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Bienayme.

$$\mathbb{E}\left[|X-\vartheta\mu|^n\right] = \int_{\mathbb{R}} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)\,dx$$

$$= \left\{\int_{(-\infty,-a+\vartheta\mu)} + \int_{[-a+\vartheta\mu,a+\vartheta\mu]} + \int_{(a+\vartheta\mu,\infty)}\right\} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)\,dx$$

$$\geq \left\{\int_{(-\infty,-a+\vartheta\mu)} + \int_{(a+\vartheta\mu,\infty)}\right\} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-a+\vartheta\mu} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)\,dx + \int_{a+\vartheta\mu}^{\infty} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)\,dx.$$

Επειδή $\left\{x : |x-\vartheta\mu| > a\right\} = \left\{x : x-\vartheta\mu < -a\right\} \cup \left\{x : x-\vartheta\mu > a\right\}$ έχουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{-a+\vartheta\mu} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)dx + \int_{a+\vartheta\mu}^{\infty} |x-\vartheta\mu|^n f_X(x)dx \ge a^n \left\{ \int_{-\infty}^{-a+\vartheta\mu} f_X(x)dx + \int_{a+\vartheta\mu}^{\infty} f_X(x)dx \right\}$$
$$= a^n \left[P\{X \le -a+\vartheta\mu\} + P\{X \ge a+\vartheta\mu\} \right] = a^n P\{|X-\vartheta\mu| \ge a\}.$$

- Όταν $n=1$ και $\vartheta=0$ έχουμε $P\{|X| \ge a\} \le a^{-1}\,\mathbb{E}[|X|]$. Ειδικότερα, εάν η X είναι και θετική τ.μ., δηλαδή $P\{X>0\}=1$, παίρνουμε την ανισότητα Markov.
- Για $n=2$ και $\vartheta=1$ η Bienayme δίνει $P\{|X-\mu| \ge a\} \le a^{-2}\,\mathbb{E}\left[|X-\mu|^2\right]$ που είναι η ανισότητα Chebyshev.

<u>Μονόπλευρες ανισότητες Chebyshev</u>

Σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για άνω φράγματα πιθανοτήτων της μορφής $P\{X-\mu \ge a\}$, με $a>0$ ενώ γνωρίζουμε μόνο τη μέση τιμή και την διασπορά της X .

Επειδή $X-\mu \ge a > 0 \Rightarrow |X-\mu| \ge a \Rightarrow \{X-\mu \ge a\} \subseteq \{|X-\mu| \ge a\}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Chebyshev $P\{X-\mu \ge a\} \le P\{|X-\mu| \ge a\} \le \dfrac{\sigma^2}{a^2},\ \forall a>0.$

Μπορούν να επιτευχθούν όμως καλύτερα άνω φράγματα για την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X-\mu \ge a\}$.

<u>Πρόταση</u>: Εάν X είναι μια τ.μ. με $P\{X>0\}=1$, μέσο $\mu=0$ και διασπορά σ^2 τότε για κάθε $a>0$ έχουμε την ανισότητα $P\{X \ge a\} \le \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$

Εάν $b>0$ τότε $P\{X \ge a\} = P\left\{(X+b)^2 \ge (a+b)^2\right\}$ και από την ανισότητα Markov για την $Y=(X+b)^2$ έχουμε

$$P\{X \ge a\} = P\left\{Y \ge (a+b)^2\right\} \le \frac{\mathbb{E}[Y]}{(a+b)^2} = \frac{\mathbb{E}\left[(X+b)^2\right]}{(a+b)^2}.$$

Επειδή $\mu=0$ θα έχουμε:

$$\mathbb{E}\left[\left(X+b\right)^2\right]=\sigma^2+b^2 \Rightarrow P\left\{X \geq a\right\} \leq g\left(b\right)=\frac{\sigma^2+b^2}{\left(a+b\right)^2}.$$

Έτσι

$$P\left\{X \geq a\right\} \leq g\left(b\right),\ \forall b>0 \Rightarrow P\left\{X \geq a\right\} \leq \min_{b>0} g\left(b\right) = g\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2},$$

εφόσον $g'\left(b\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{2b\left(a+b\right)^2-2\left(\sigma^2+b^2\right)\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^4} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(a+b\right)\left[b\left(a+b\right)-\left(\sigma^2+b^2\right)\right] = 0 \Rightarrow b = \dfrac{\sigma^2}{a}$ και $g''\left(\dfrac{\sigma^2}{a}\right)>0$.

<u>Παράδειγμα</u>

Είναι γνωστό ότι ο αριθμός X των μονάδων παραγωγής σε μια εβδομάδα είναι τ.μ. με μέσο $\mu=100$ και διασπορά $\sigma^2=400$. Να βρεθεί άνω φράγμα της πιθανότητας του ενδεχομένου, η παραγωγή να είναι τουλάχιστον 120 μονάδες.

Η τ.μ. $Y=X-\mu$ έχει μέσο 0 έτσι $P\left\{X \geq 120\right\}=P\left\{Y \geq 20\right\} \leq \dfrac{400}{400+\left(20\right)^2}=0.5$.

Η Markov δίνει το ασθενέστερο φράγμα $P\left\{X \geq 120\right\} \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[X\right]}{120}=\dfrac{5}{6}$.

<u>Λήμμα</u> Εάν X είναι τ.μ. με μέσο το μ και διασπορά σ^2 τότε για κάθε $a>0$ έχουμε τις μονόπλευρες ανισότητες Chebyshev:

$$\left.\begin{cases} P\left\{X-\mu \geq +a\right\} \\ P\left\{X-\mu \leq -a\right\} \end{cases}\right\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

Οι δύο παραπάνω ανισότητες γίνονται προφανείς από την προηγούμενη πρόταση και το γεγονός ότι οι τ.μ. $X-\mu$ και $-\left(X-\mu\right)$ έχουν μέσο το 0 και διασπορά σ^2.

Εάν προσθέσουμε τις παραπάνω δύο ανισότητες θα έχουμε

$$P\left\{\left|X-\mu\right| \geq a\right\} \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}.$$

Η παραπάνω ανισότητα όμως δεν είναι πάντα ισχυρότερη της Chebyshev, εφόσον ισχύει ότι $\dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}<\dfrac{\sigma^2}{a^2}$ μόνον εάν $0<a<\sigma$.

Εφαρμογή

Ένα σύνολο από $n=100$ άντρες και $n=100$ γυναίκες, χωρίζεται με τυχαίο τρόπο σε 100 ζεύγη. Να βρεθεί άνω φράγμα στην πιθανότητα το πολύ $m=30$ ζευγάρια να αποτελούνται από άνδρα και γυναίκα.

Αριθμούμε τους άντρες αυθαίρετα από το 1 στο 100 και ορίζουμε τις δίτιμες τ.μ. $\{Z_i=1\}=\{$ Ο i άντρας βρίσκεται σε ζεύγος με γυναίκα$\}$, $1\le i\le n=100$ ενώ $Z_i=0$ σημαίνει ότι το ζεύγος δεν είναι τύπου άντρας – γυναίκα.

$S_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i=$ ο αριθμός των ζευγαριών τύπου άντρα – γυναίκα.

Ζητάμε να υπολογίσουμε άνω φράγμα για την πιθανότητα $P\{S_n\le 30\}$ και για αυτό το λόγο θα πρέπει να υπολογίσουμε μέσο και διασπορά της S_n.

$$P\{Z_i=1\}=\frac{\#\{(\alpha_i,\gamma_j):1\le j\le n\}}{\#\{(\alpha_i,\gamma_j):1\le j\le n\}\cup\{(\alpha_i,\alpha_j):1\le j\le n,\ j\ne i\}}=\frac{n}{2n-1}=\frac{100}{199}$$

$$\mathbb{E}[Z_i]=0\cdot P\{Z_i=0\}+1\cdot P\{Z_i=1\}=\frac{n}{2n-1}=\frac{100}{199}$$

$$\mathbb{E}\left[Z_iZ_j\right]=\sum_{z_i\in\{0,1\}}\sum_{z_j\in\{0,1\}} z_iz_jP\{Z_i=z_i,Z_j=z_j\}=P\{Z_i=1,Z_j=1\}$$

$$=P\{Z_i=1\}P\{Z_j=1\,|\,Z_i=1\}=\left(\frac{n}{2n-1}\right)\left(\frac{n-1}{2n-3}\right)=\left(\frac{100}{199}\right)\left(\frac{99}{197}\right)$$

$$\mathbb{E}[S_n]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Z_i]=\frac{n^2}{2n-1}=(100)\left(\frac{100}{199}\right)\approx 50.25$$

$$Var[S_n]=\sum_{i=1}^{n}Var[Z_i]+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(Z_i,Z_j)$$

$$\mathbb{E}\left[Z_i^2\right]=0^2\cdot P\{X_i=0\}+1^2\cdot P\{X_i=1\}=\frac{n}{2n-1}=\frac{100}{199}$$

$$Var[Z_i]=\mathbb{E}\left[Z_i^2\right]-\mathbb{E}\left[Z_i\right]^2=\frac{n}{2n-1}-\left(\frac{n}{2n-1}\right)^2=\frac{n(n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{100}{199}\frac{99}{199}$$

$$Cov(Z_i,Z_j)=\mathbb{E}\left[Z_iZ_j\right]-\mathbb{E}[Z_i]\mathbb{E}\left[Z_j\right]=\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}-\left(\frac{n}{2n-1}\right)^2$$

$$=\frac{n}{(2n-1)^2(2n-3)}=\frac{100}{199}\frac{99}{197}-\left(\frac{100}{199}\right)^2$$

έτσι παίρνουμε για την διασπορά της X

$$Var\left[S_n\right]=n\left(\frac{n(n-1)}{(2n-1)^2}\right)+2\binom{n(n-1)}{2}\left(\frac{n}{(2n-1)^2(2n-3)}\right)=\frac{2n^2(n-1)^2}{(2n-1)^2(2n-3)}$$

$$=100\times\frac{100}{199}\frac{99}{199}+2\binom{100}{2}\left[\frac{100}{199}\frac{99}{197}-\left(\frac{100}{199}\right)^2\right]\approx 25.126$$

Χρησιμοποιώντας την Chebyshev και επειδή

$$\left\{\left|S_n-\mu\right|\geq a\right\}=\left\{S_n\leq \mu-a\right\}\cup\left\{S_n\geq \mu+a\right\}$$

θέτοντας $\mu-a=30\Rightarrow a=50.25-30$

έχουμε $\left\{\left|S_n-50.25\right|\geq 20.25\right\}=\left\{S_n\geq 80.5\right\}\cup\left\{S_n\leq 30\right\}$ και έτσι

$$P\left\{S_n\leq 30\right\}\leq P\left\{\left|S_n-50.25\right|\geq 20.25\right\}\leq\frac{Var\left[S_n\right]}{(20.25)^2}\approx 0.061.$$

Χρησιμοποιώντας μονόπλευρη Chebyshev, παίρνουμε το ισχυρότερο άνω φράγμα

$$P\left\{S_n\leq 30\right\}=P\left\{S_n\leq\underbrace{50.25-20.25}_{\mu-a}\right\}\leq\frac{Var\left[S_n\right]}{Var\left[S_n\right]+a^2}=\frac{25.126}{25.126+(20.25)^2}\approx 0.058.$$

Ανισότητες Chernoff: Εάν υπάρχει η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X τότε για κάθε $a\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$P\left\{X\geq a\right\}\leq\min_{t>0}\left[e^{-ta}M_X(t)\right]$ όταν η $M_X(t)$ υπάρχει για $t>0$ (δεξιά).

$P\left\{X\leq a\right\}\leq\min_{t<0}\left[e^{-ta}M_X(t)\right]$ όταν η $M_X(t)$ υπάρχει για $t<0$ (αριστερή).

Για την δεξιά ανισότητα, για $t>0$

$$P\left\{X\geq a\right\}=P\left\{tX\geq ta\right\}=P\left\{e^{tX}\geq e^{ta}\right\}\leq e^{-ta}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

Για την αριστερή ανισότητα και $t<0$

$$P\left\{X\leq a\right\}=P\left\{tX\geq ta\right\}=P\left\{e^{tX}\geq e^{ta}\right\}\leq e^{-ta}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

Παίρνοντας το $\min$ ως προς $t>0$ και $t<0$ αντιστοίχως στις δύο προηγούμενες ανισότητες έχουμε τις ανισότητες Chernoff.

Παράδειγμα (**Φράγματα Chernoff για την Normal**).

Εάν $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ δείξτε ότι:

Δεξιά: $P\left\{X \geq a\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2\right\},\ \forall a \geq \mu,$

Αριστερή: $P\left\{X \leq a\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2\right\},\ \forall a \leq \mu$.

Επειδή $M_X\left(t\right)=\exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$ για τη δεξιά ανισότητα Chernoff έχουμε

$$P\left\{X \geq a\right\} \leq \min_{t>0}\left[e^{-ta}M_X\left(t\right)\right]=\min_{t>0}\left[\exp\left(g\left(t\right)\right)\right]=\exp\left[\min_{t>0} g\left(t\right)\right],$$

με $g\left(t\right)=\left(\mu-a\right)t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}$.

Τότε

$\min_{t>0} g\left(t\right)=g\left(t^*=-\frac{\mu-a}{\sigma^2}\right)=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2$ και επειδή το minimum είναι για όλα τα $t>0$ ζητάμε $t^*=-\frac{\mu-a}{\sigma^2}>0$ ή ότι $a>\mu$, έτσι

$$P\left\{X \geq a\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2\right\},\ \forall a \geq \mu.$$

Για την αριστερή ανισότητα

$$P\left\{X \leq a\right\} \leq \min_{t<0}\left[e^{-ta}M_X\left(t\right)\right]=\min_{t<0}\left[\exp\left(g\left(t\right)\right)\right]=\exp\left[\min_{t<0} g\left(t\right)\right]$$

$\min_{t<0} g\left(t\right)=g\left(t^*=-\frac{\mu-a}{\sigma^2}\right)=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2$ και επειδή $t<0$ ζητάμε $t^*=-\frac{\mu-a}{\sigma^2}<0$ ή ότι $a<\mu$, έτσι παίρνουμε $P\left\{X \leq a\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-a\right)^2\right\},\ \forall a \leq \mu$.

Παράδειγμα (Τυπική κανονική κατανομή) Εάν $X \sim N\left(0,1\right)$ να βρεθούν άνω φράγματα για την πιθανότητα $P\left\{X \geq 2\right\}$ με Chebyshev, Μονόπλευρη Chebyshev και Chernoff, και να συγκριθούν με την προσεγγιστική τιμή από τους πίνακες, που είναι $P\left\{X \geq 2\right\}=1-\Phi\left(2\right)=0.0228$.

Chebyshev: $P\{X \geq 2\} \leq P\{|X| \geq 2\} \leq \frac{Var[X]}{2^2} = 0.25$

Μονόπλευρη Chebyshev: $P\{X \geq 2\} \leq \frac{Var[X]}{Var[X]+2^2} = 0.20$

Chernoff: $P\{X \geq 2\} \leq e^{-2^2/2} = 0.1353$

Δηλαδή το ισχυρότερο άνω φράγμα για την πιθανότητα $P\{X \geq 2\}$ έρχεται από την ανισότητα Chernoff.

Για να χρησιμοποιήσουμε Markov $P\{X \geq 2\} \leq P\{|X| \geq 2\} \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{2}$, θα έπρεπε να υπολογίσουμε και την $\mathbb{E}|X|$ για $X \sim N(0,1)$.

<u>Παράδειγμα</u> Εάν $X \sim Poisson(\lambda)$ να βρεθεί το φράγμα Chernoff για την πιθανότητα $P\{X \leq a\}$.

$P\{X \leq a\} \leq \min_{t<0}\left[e^{-ta}M_X(t)\right] = \min_{t<0}\left[\exp\left(-ta+\lambda\left(e^t-1\right)\right)\right]$

$= \exp\left(\min_{t<0}\left[-ta+\lambda\left(e^t-1\right)\right]\right)$. Έτσι εάν $g(t) = -ta+\lambda\left(e^t-1\right)$, το ελάχιστο της g δίνεται για $t^* = \ln(a/\lambda) < 0$ ή ότι $a < \lambda$. Έτσι

$P\{X \leq a\} \leq \exp\left\{g\left(t^*\right)\right\} = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda e}{a}\right)^a$, $\forall a < \lambda$.