ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Σ. Ι. ΧΑΤΖΗΣΠΥΡΟΣ

[Text book: Peter Morris, Game Theory, Springer Verlag]

Games in Extensive Form
(ανοιχτή μορφή)

<u>Κοινά στοιχεία</u> για τα παίγνια με τα οποία θα ασχοληθούμε:

(i) Ο αριθμός των παικτών $\{P_1, \dots, P_N\}$ είναι πεπερασμένος
<u>Παίκτης</u>: P_i = άτομο, ομάδα ατόμων, πρόγραμμα υπολογιστή, το "house" ενός καζίνου.

(ii) Κάθε παίκτης είναι γνώστης των κανόνων του παίγνιου

(iii) Σε κάθε σημείο του παίγνιου κάθε παίκτης έχει ένα εύρος επιλογών (κινήσεων). Ο αριθμός των επιλογών είναι πεπερασμένος.

(iv) Το παίγνιο σταματά σε πεπερασμένο χρόνο

(v) Στο τέλος του παίγνιου κάθε παίκτης λαμβάνει ένα "βραβείο" - αριθμητικό (pay-off - reward): $(\vec{r}(w))_i =$
$=$ η, i-συντεταγμένη του διανύσματος των pay-offs για την w - κατάληξη (κόμβος) του παίγνιου.
Εαν $(\vec{r}(w))_i < 0 \Rightarrow$ Ο παίκτης P_i έχασε $|(\vec{r}(w))_i|$

<u>Εστω</u>: Γ = "σκάκι", $N=2$, $(\vec{r}(w))_i = \begin{cases} +1, & \text{κέρδισε} \\ -1, & \text{έχασε} \\ 0, & \text{ισοπαλία.} \end{cases}$

Ιδιότητες που ένα παίγνιο Γ μπορεί να έχει (η' κ' να μην έχει).

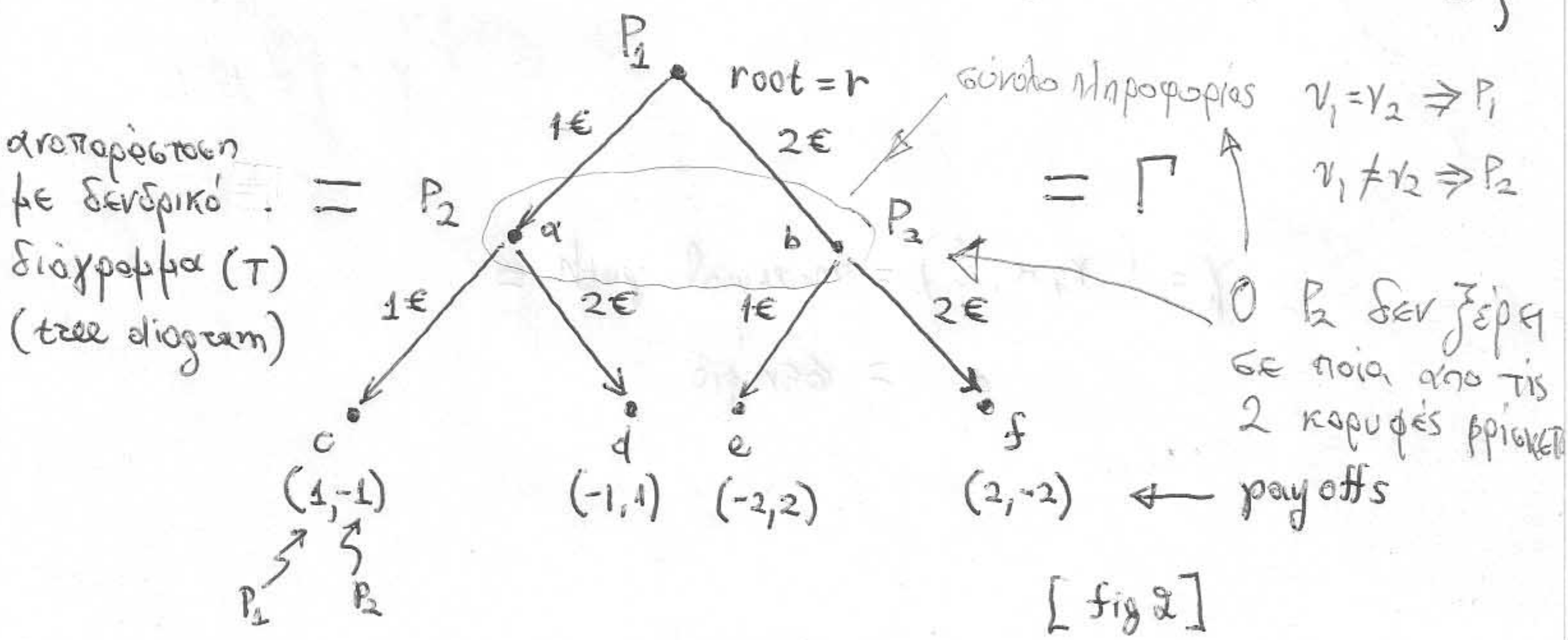
(i) Μπορεί να υπάρχουν <u>κινήσεις τύχης</u> (chance moves)

πχ/ Γ = "σκάκι" $\Rightarrow$ Δεν υπάρχουν τυχαίες κινήσεις

Γ = "poker" $\Rightarrow$ Το μοίρασμα το χαρτιών είναι τυχαία κίνηση.

(ii) Σε κάποια παίγνια ο παίκτης γνωρίζει όλη την προηγούμενη ιστορία του παίγνιου (σκάκι) σε άλλα όχι (στο poker δεν ξέρεις τι μοιράστηκε στους αντιπάλους), μιλάμε τότε για παίγνια <u>τέλειας</u> κ' <u>απλούς πληροφορίας</u> αντίστοιχα. Κ' τα 2 είδη παίγνιων μπορούν να έχουν κινήσεις τύχης

<u>Παράδειγμα</u>: Γ = { Δύο παίκτες P_1 κ' P_2 κρατούν κρυμμένο στο χέρι τους νομίσμα του 1€ η' 2€. Ανοίγουν το χέρι τους κ' εαν τα νομίσματα είναι ίδια ο P_1 τα παίρνει κ' τα δύο, αλλιώς, τα παίρνει ο P_2 }



[fig 2]

<u>Συμβολισμός</u>: (i) Το root (ρίζα) του (tree) T πάντα συμβολίζεται με r. Τα vertices (κορυφές) του T είναι το σύνολο $V(T) = \{r, \alpha, b, c, d, e, f\}$

α, b → ενδιάμεσα vertices

c, d, e, f → τελειωτικά vertices (terminal) → $\tau(T) = \{c, d, e, f\}$

(ii) Κάποια vertices ανήκουν στον P_1 κ' άλλα στον P_2. Εδώ $r \in P_1$ κ' $\alpha, b \in P_2$

(iii) Τα payoffs είναι:

zero sum game $\Leftarrow$ $\vec{P}(c) = (1,-1)$, $\vec{P}(d) = (-1,1)$, $\vec{P}(e) = (-2,2)$, $\vec{P}(f) = (2,-2)$

(iv) Τα παιδιά (children) του r είναι $Ch(r) = \{\alpha, b\}$ ενώ τα α κ' b έχουν γονέα το r.

(v) Οι πλευρές (r,α) και (b,f) είναι edges του T. Όλες οι edges του T συμβολίζονται με $E(T) = \{\underbrace{(r,\alpha)}, (r,b), \ldots, (b,f)\}$

→ προσανατολισμένο ευθ. τμήμα.

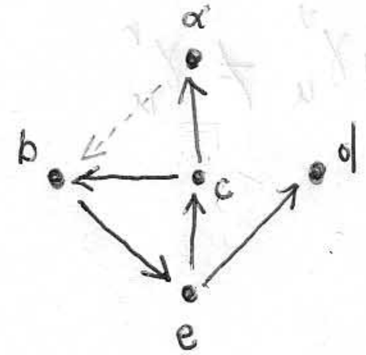
(vi) Το $\gamma_d = (r, \alpha, d)$ είναι ένα path (μονοπάτι) του T. Εδώ το γ_d έχει maximal μήκος κ' είναι terminal γιατί $d \in \tau(T)$.

(vii) Στο προηγούμενο γ τα r και α είναι πρόγονοι (ancestors) του d κ' τα α κ' d απόγονοι (descendants) του r.

$ansc(d) = \{r, \alpha\}$, $desc(r) = \{\alpha, b, c, d, e, f\}$

Δέντρα κ' προσανατολισμένα γραφήματα.

Ένα προσ. γράφημα G είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από κορυφές $V(G)$ μαζί με ένα σύνολο από προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα (τα edges) $E(G)$.



$= G = (V, E)$

Το G δεν είναι δένδρο διότι για $\forall\, v \in V(G)$ $\exists\, v' \in V(G)$ τω $(v', v) \in E(G)$ (δηλαδη το G δεν μπορεί να έχει root).

Ένα δέντρο είναι ειδική περίπτωση προσ. γραφήματος. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε σαν path του G μια πεπερασμένη ακολουθία από κορυφές του G

$$\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \quad \text{τ.ώ.} \quad (v_{i-1}, v_i) \in E(G) \qquad 1 \le i \le n$$

Ορισμός: Το προσ. γράφημα T είναι δένδρο εάν έχει κορυφή που ονομάζεται $r = \text{root}$ με τις ιδιότητες:

(i) $\nexists\, v \in V(T)$ τω $(v, r) \in E(G)$

(ii) $\forall\, v \in V(T)$ $\exists$ μοναδικό $\gamma_v^r = (r, v_1, \ldots, v_n, v)$ από το root στο v.

Θεώρημα: Εαν το T είναι δένδρο έχουμε:

(i) Καμμία κορυφή δεν έχει περισσότερους από έναν γονέα

(ii) Εαν u, v είναι κορυφές του T κ' υπάρχει path γ από το u στο v, τότε δεν υπάρχει path από το v στο u.

(iii) Κάθε ενδιάμεση κορυφή (αλλά κ' το root) έχουν τελειωτικό απόγονο (terminal descendant).

(i) Έστω $w \in V(T)$ και ταυτόχρονα $w \in Ch(u)$ κ' $w \in Ch(v)$ δηλαδή $u \to w \leftarrow v$ $\Leftrightarrow (u,w),(v,w) \in E(T)$

Επειδή T = δένδρο $\Rightarrow \exists\, \gamma_1 = (r, v_1, \dots, v_s, u) \xrightarrow{(u,w) \in E(T)}$

$\gamma_2 = (r, v_1, \dots, v_s, u, w)$ είναι ένα μονοπάτι απο r στο w

T = δένδρο $\Rightarrow \exists\, \gamma_1' = (r, v_1', \dots, v_{s'}', v) \xrightarrow{(v,w) \in E(T)}$

$\gamma_2' = (r, v_1, \dots, v_{s'}', v, w)$ είναι κ' αυτό ένα μονοπάτι απο το r στο w

$u \neq v \Rightarrow \gamma_2 \neq \gamma_2' \Rightarrow$ Υπάρχουν 2 μονοπάτια απο το r στο w <u>που είναι άτοπο.</u>

(ii) Έστω ότι υπάρχουν για $u, v \in V(T)$ τα δύο μονοπάτια $\gamma = (u, v_1, \dots, v_s, v)$ καί $\gamma' = (v, u_1', \dots, u_{s'}', u)$

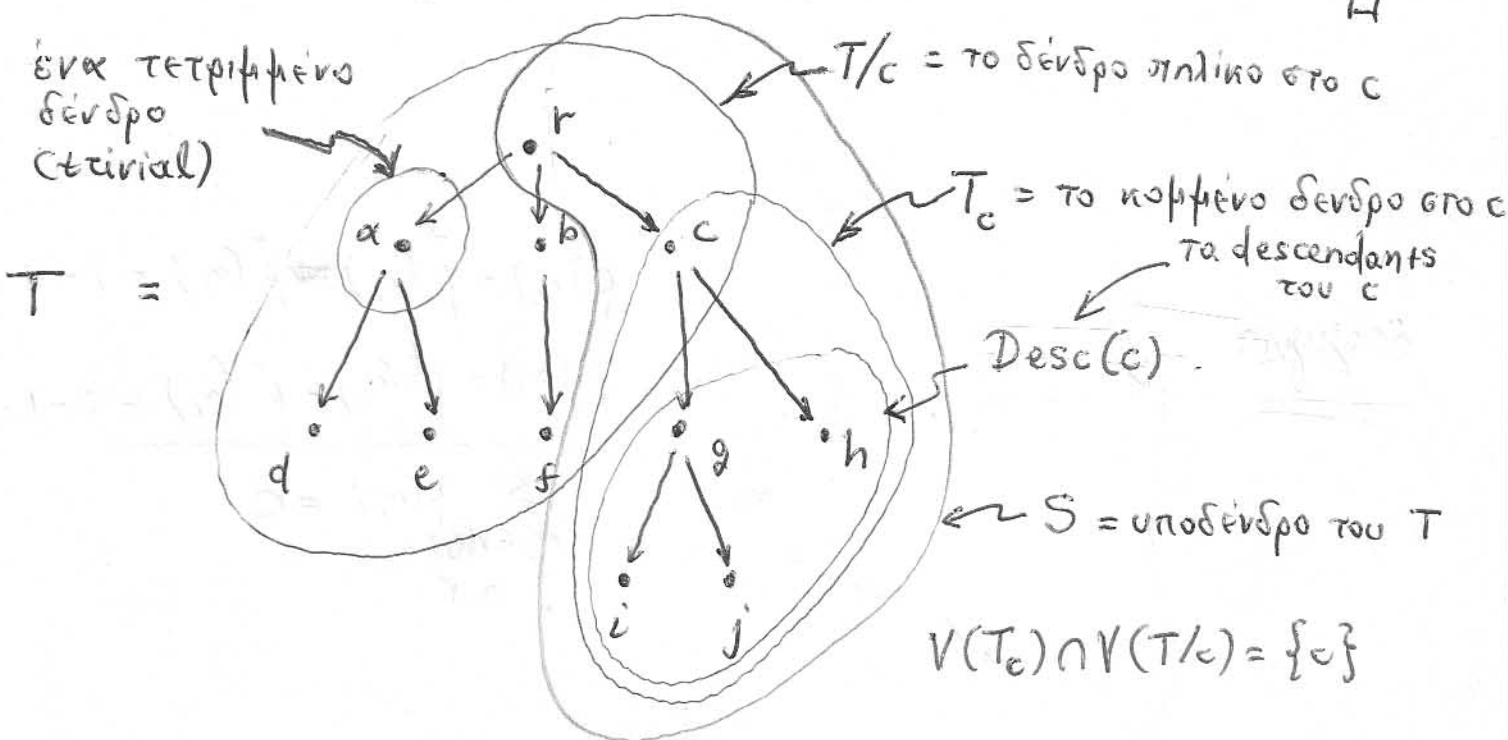
T = δένδρο $\Rightarrow$ Υπάρχει μονοπάτι απο το r στο u

$\gamma'' = (r, u_1, \dots, u_\ell, u) \Rightarrow$ Τότε υπάρχει κ' δεύτερο μονοπάτι $\gamma'' \cup \gamma \cup \gamma'$ απο το r στο u <u>που είναι άτοπο</u>

(iii) Προφανές γιατί το μήκος κάθε μονοπατιού απο ενδιάμεση κορυφή (η' το r) είναι πεπερασμένο

(γιατί το παίγνιο είναι πεπερασμένο)

$\square$



$V(T_c) \cap V(T/c) = \{c\}$

<u>Ορισμός</u>: (i) Έστω δένδρο T κ' $u \in V(T)$ τότε ορίζουμε το δένδρο T_u = το cutting στο u του T, σαν το δένδρο με $V(T_u) = \{u\} \cup des(u)$

(ii) Ορίζουμε το δένδρο T/u = το quotient στο u του T, με την ιδιότητα $V(T/u) = V(T) \setminus des(u)$

(iii) Λέμε ότι το δένδρο S είναι υπο-δένδρο (subtree) του T εάν: $\begin{cases} V(S) \subset V(T) \\ E(S) \subset E(T) \\ \tau(S) \subset \tau(T) \\ root(S) = root(T) \end{cases}$

<u>Παρατήρηση</u>: Τα δένδρα T_c κ' T/c <u>δεν είναι υπο-δένδρα</u> του T <u>διότι</u>: $c = root(T_c) \neq root(T) = r$ κ'

$\tau(T/c) \not\subset \tau(T)$

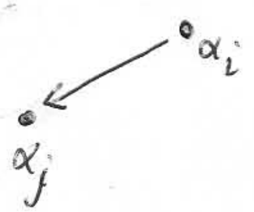
(iv) Ένα τετριμμένο δένδρο T είναι ενα δένδρο με $\#V(T) = 1$ δηλαδή $V(T) = \{r\}$.

Άσκηση: Έστω προσανατολισμένο γράφημα G, ορίζουμε σαν $\rho(u) = \rho^+(u) - \rho^-(u)$ όπου $u \in V(G)$

$\rho^+(u) = \#\{(u,v) \mid (u,v) \in E(G)\}$, $\rho^-(u) = \#\{(v,u) \mid (v,u) \in E(G)\}$

Δ.ό (i) $\sum_{u \in V(G)} \rho(u) = 0$ (ii) $\#\{u \in V(G) \mid \rho(u) = \text{odd}\} = \text{even}$

(i)

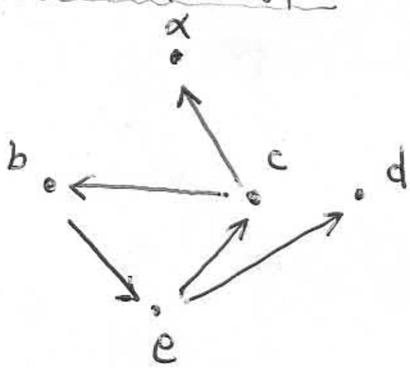


$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\alpha_i, \alpha_j \in V(G)}_{(\alpha_i,\alpha_j) \in E(G)} \Rightarrow \Delta\rho(\alpha_i) = 1 - 0 \\ \Delta\rho(\alpha_j) = 0 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{μεταβολή } 0$$

Εαν κάνουμε το ίδιο για $\forall u \in V(G)$ βλέπουμε ότι $\sum_{u \in V(G)} \rho(u) = 0$

Για παράδειγμα:

$G =$



$$\left.\begin{array}{l} \rho(a) = 0 - 1 \\ \rho(b) = 1 - 1 \\ \rho(c) = 2 - 1 \\ \rho(d) = 0 - 1 \\ \rho(e) = 2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{u \in V(G)} \rho(u) = 0$$

(ii) $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$

$V_1(G) = \{u \in V(G) \mid \rho(u) = \text{odd}\}$, $V_2(G) = \{u \in V(G) \mid \rho(u) = \text{even}\}$

$$\sum_{u \in V(G)} \rho(u) = 0 \Rightarrow \sum_{u \in V_1(G)} \rho(u) = \underbrace{- \sum_{u \in V_2(G)} \overbrace{\rho(u)}^{\text{even}}}_{\text{even}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{u \in V_1(G)} \overbrace{\rho(u)}^{\text{odd}} = \text{even} \Rightarrow \# V_1 = \text{even}$$

$\square$

Άσκηση: Έστω δένδρο T με $\tau(T)=\{w_1,\dots,w_n\}$. Να βρεθεί ο αριθμός των υποδέντρων S του T, $S\neq\emptyset$

Επειδή κάθε υποσύνολο $\neq\emptyset$ του $\tau(T)$ καθορίζει με μοναδικό τρόπο ένα υποδένδρο του T και υπάρχουν $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}-\binom{n}{0}=2^n-1$ (-1 για το $\emptyset$) υποσύνολα του term(T), θα υπάρχουν κ' 2^n-1 υποδέντρα του T. □

Τα παίγνια είναι ισοδύναμα με δένδρα

Έστω παίγνιο Γ χωρίς τυχαίες κινήσεις με παίκτες $\{P_1,\dots,P_N\}$ κ' δένδρο T τω' $\#V(T)>1$. Θα λέμε ότι $u\in V\setminus\tau$ ανήκει στον i-παίκτη ($u\in P_i$, εν συντομία) εάν η κορυφή u είναι προσημειωμένη με το P_i.

Οι κορυφές $w\in\tau=\tau(T)$ προσημειώνονται με διάνυσμα $\vec{p}(w)=(\text{payoff}(P_1),\dots,\text{payoff}(P_N))$

Ορίσαμε λοιπόν το Γ πάνω στο T, και αρχίζουμε να παίζουμε:

(1) Εάν ο P_i έχει την root κορυφή διαλέγει μια από τις κορυφές $u\in Ch(r)$.

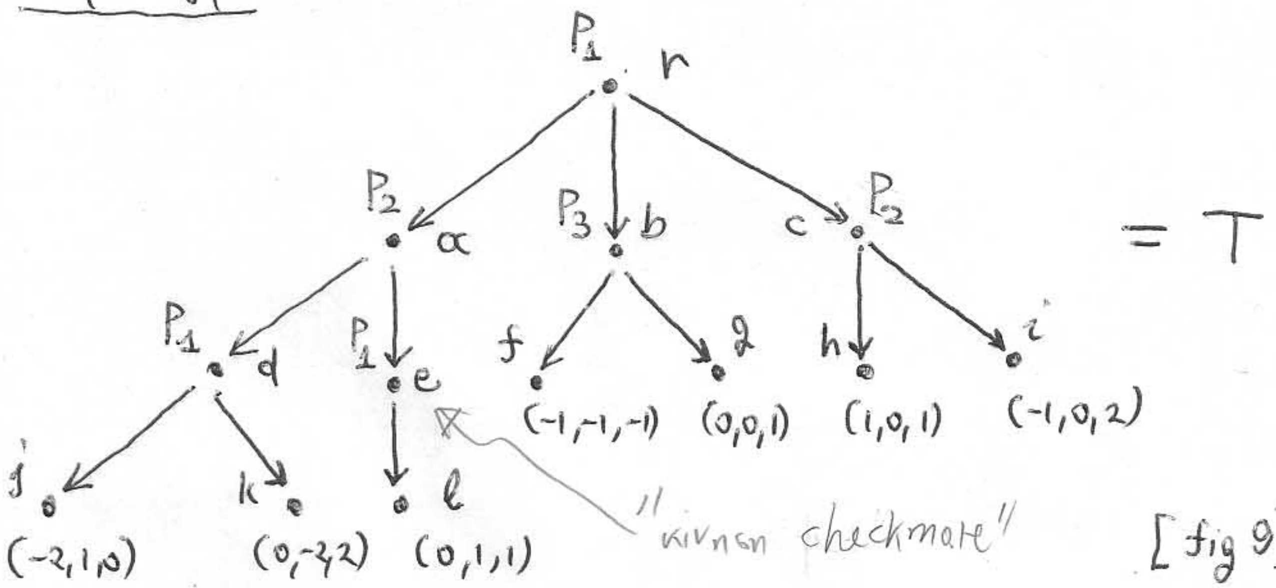
(2) Εάν u είναι terminal δηλ. $u\in\tau(T)$ το παίγνιο σταματάει κ' οι παίκτες λαμβάνουν

τα payoffs $(\vec{\gamma}(w))_k$; $1 \leq k \leq N$.

Εαν όμως $u \notin \mathcal{T}(T)$ ο παίκτης P_j που του ανήκει η κορυφή u διαλέγει $v \in Ch(u)$.

(3) Το παίγνιο συνεχίζεται έως ότου επιτευχθεί κορυφή στο $\mathcal{T}(T)$, οπότε κ' οι παίκτες λαμβάνουν σε πεπερασμένο χρόνο τα payoffs.

Παράδειγμα : $N=3$ κ' $\# Ch(u) \leq 3$



[fig 9]

Λογω του κανόνα $\# Ch(u) \leq 3$ μπορούμε να αναπαριστούμε "τροχιές" του παιχνιδιού με συνδυασμό των συμβόλων L, M κ' R (left, middle, right)

τροχιά: $\underbrace{(L, L, R)}_{}$ = Αρχικά ο P_1 παίζει (r, α), στην συνέχεια P_2 αντιδρά παίζοντας (α, d) μετά πάλι ο P_1 με (d, k) κ' επειδή $k \in \mathcal{T}(T)$ οι $\{P_1, P_2, P_3\}$ λαμβάνουν $(0,-2,2)$.

$\gamma_k = (r, \alpha, d, k)$

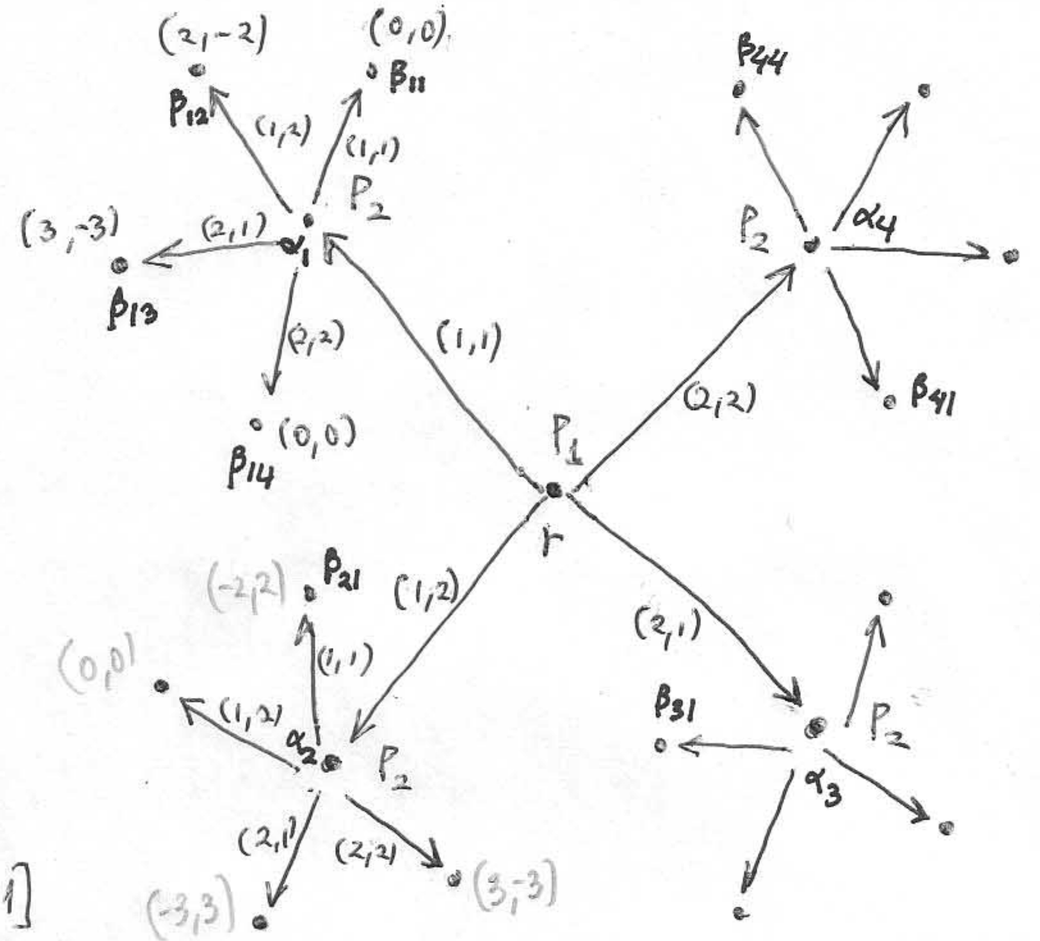
ένα path maximal μήκους 4

<u>Παρατηρήσεις</u>: (i) Το set up του Γ <u>δεν έχει</u> κινήσεις τύχης (chance moves)

(ii) Κάθε μονοπάτι γ τ.ώ $r \in \gamma$ κ' $w \in \gamma$ (<u>με</u> $w \in \tau$) είναι μια πραγματοποίηση του Γ, δηλαδή ένας από τους τρόπους με τον οποίο η ιστορία του παιγνίου μπορεί να εξελιχθεί (σενάριο).

Ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης
(2 - Fingers Morra).

Γ = { 2 παίκτες <u>ταυτόχρονα</u> σηκώνουν 1 ή 2 δάκτυλα κ' την ίδια στιγμή προβλέπουν φωναχτά τον αριθμό των δακτύλων του άλλου παίκτη. Εάν ένας από τους παίκτες είναι σωστός στην πρόβλεψή του, μόνο τότε, κερδίζει (από αυτόν που <u>δεν πρόβλεψε σωστά</u>) ένα χρηματικό ποσό ίσο με το άθροισμα των δαχτύλων που σήκωσαν κ' οι 2 παίκτες. Εάν κανείς δεν είναι σωστός στην πρόβλεψη του ή κ' οι 2 είναι σωστοί, κανείς δεν κερδίζει }



$\underbrace{S_{P_2} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}_{\text{σύνολο πληροφορίας για τον } P_2}$

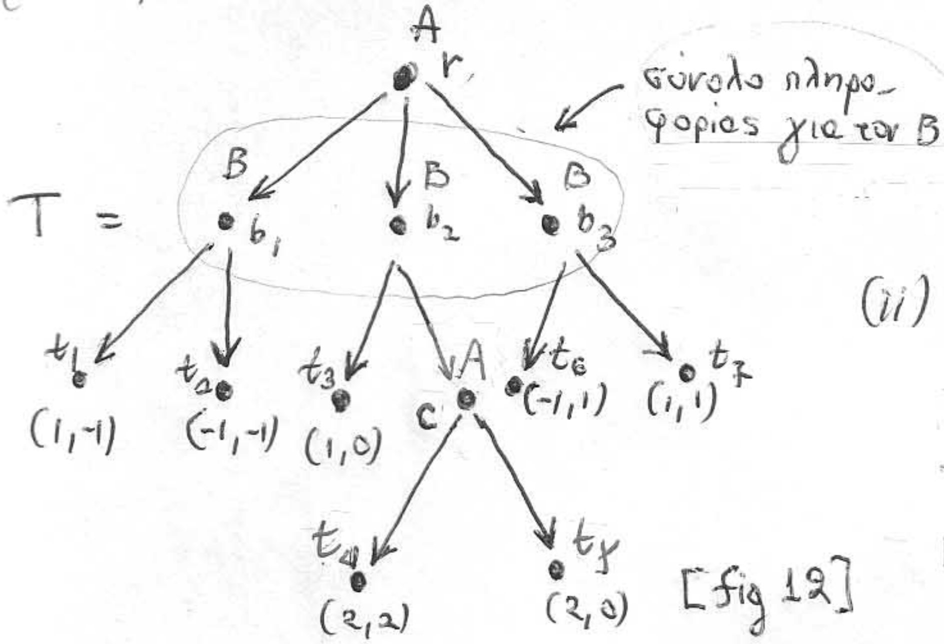
[fig 11]

<u>Προσοχή</u>: Ο σχεδιασμός του T δεν εμπεριέχει όλους τους κανόνες του Γ. Μοιάζει από το δένδρο ότι ο P_2 έχει πάντοτε εξασφαλισμένο κέρδος κάνοντας την σωστή κίνηση σε κάθε κορυφή $\alpha_i \in P_2$. <u>Αυτό είναι λάθος</u> γιατί οι <u>P_1 κ' P_2 έχουν συμμετρικούς ρόλους.</u> Ο P_2 <u>δεν ξέρει την κίνηση του</u> P_1 με αποτέλεσμα να μην ξέρει σε ποιο α_i βρίσκεται. Δηλαδή το Γ είναι παίγνιο ατελούς πληροφόρησης (εδώ ταυτόχρονων κινήσεων).

<u>Ορισμός</u>: Ένα <u>σύνολο πληροφορίας S_i</u> ενός παίκτη P_i, είναι ένα σύνολο κορυφών του T ($S_i \subset V(T)$), που όλες ανήκουν στον P_i ($\alpha \in S_i \Rightarrow \alpha \in P_i$), <u>τ.ω.</u> ο παίκτης σε κάποιο σημείο του παιγνιδιού γνωρίζει ότι βρίσκεται σε κορυφή του S_i, αλλά δεν γνωρίζει <u>σε ποια</u> κορυφή.

<u>Παράδειγμα</u>: Για το [fig 2] $S_2 = \{a, b\}$ είναι σύνολο πληροφορίας για τον P_2

<u>Άσκηση</u> (1.2.4) Έστω το δένδρο παιγνίου T. Πως θα πρέπει να παίξουν ο A κ' ο B ;



[fig 12]

<u>Για τον A:</u>

(i) Η καλύτερη κίνηση για τον A είναι (r, b_2) κ' στην συνέχεια οποιαδήποτε κίνηση (έτσι εξασφαλίζει σίγουρο κέρδος).

<u>Για τον B:</u>

(ii) Αν ο A κινηθεί (r, b_1). είτε (r, b_3) τότε ο B είτε κινηθεί L είτε R παίρνει το ίδιο payoff. Μόνο εαν ο A κινηθεί (r, b_2), τότε, ο B θα έχει την δυνατότητα να πάρει payoff 2 εαν κινηθεί R

<u>Άρα</u>: Η καλύτερη κίνηση για τον B είναι R □

<u>Άσκηση</u> (1.2.5) Για το δένδρο παιγνίου στο [fig 9] το $S_2 = \{a, c\}$ είναι σύνολο πληροφορίες για τον P_2 (δηλαδή ο P_2 δεν ξέρει εαν ο P_1 έχει κινηθεί L ή R. Πως θα πρέπει ο P_2 να κινηθεί ;

Εαν ο P_1 κινηθεί R $(r \to c)$ τότε ο P_2 παίρνει payoff 0 (είτε κινηθεί L είτε R). Εαν όμως ο P_1 κινηθεί L $(r \to a)$ ο P_2 θα έχει σίγουρο κέρδος <u>1 εαν κινηθεί R</u>. (<u>διότι</u> εαν ο P_2 κινηθεί L, ο P_1 για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του θα κινηθεί R με αποτέλεσμα payoff −2 για τον P_2). □

Άσκηση (13.1) (A version of nim)
(1.2.6)

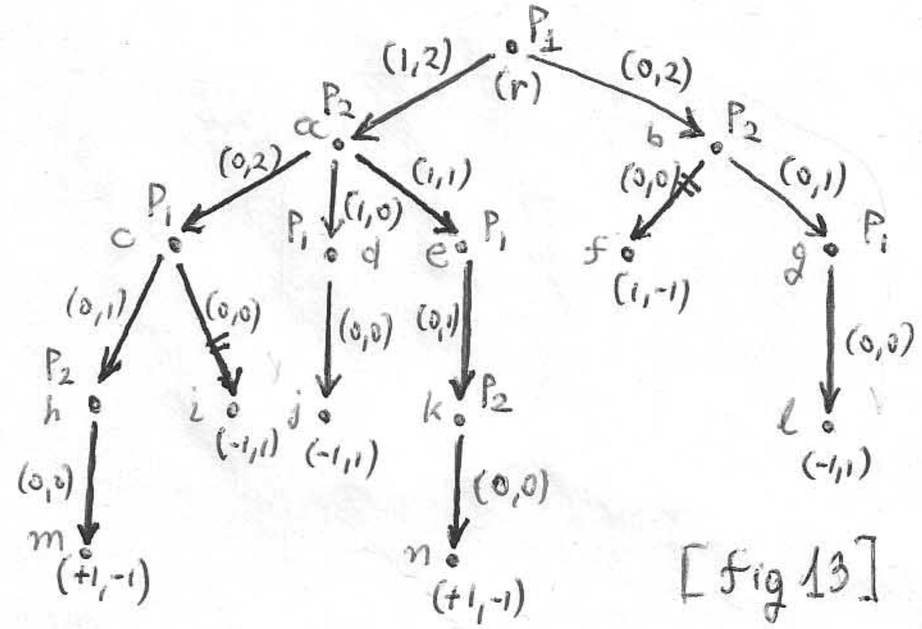
Γ = { Υπάρχουν 2 παίκτες P_1 και P_2 κ' μπροστά τους 1 τραπέζι με 2 σωρούς από 2 σπίρτα ο καθένας. Ο ένας μετά τον άλλο οι παίκτες (όχι ταυτόχρονα) παίρνουν οποιοδήποτε θετικό αριθμό από σπίρτα από τον έναν από τους σωρούς. Ο παίκτης που θα πάρη το τελευταίο σπίρτο χάνει }.

nim(2)

(i) Σχεδιάστε το game tree.

(ii) Δ.ό. ότι αυτός που παίζει $2^{ος}$ πάντα νικάει.

Το παίγνιο Γ είναι τέλειας πληροφόρησης (δεν υπάρχουν σύνολα πληροφορίας) $\Leftrightarrow$ (δεν γίνονται ταυτόχρονες κινήσεις)



[fig 13]

(i) Εάν ο P_1 παίξει R, επειδή ο P_2 παίζει ορθολογικά θα παίξει R και θα κερδίσει

(ii) Εάν ο P_1 παίξει L επειδή ο P_2 παίζει ορθολογικά θα παίξει M κ' θα κερδίσει

Αυτό γιατί αν ο P_2 έπαιζε L, επειδή κ' ο P_1 παίζει ορθολογικά θα έπαιζε L (ο P_1) και ο P_2 θα έχανε. Εάν ο P_2 έπαιζε R κ' πάλι θα έχανε.

□