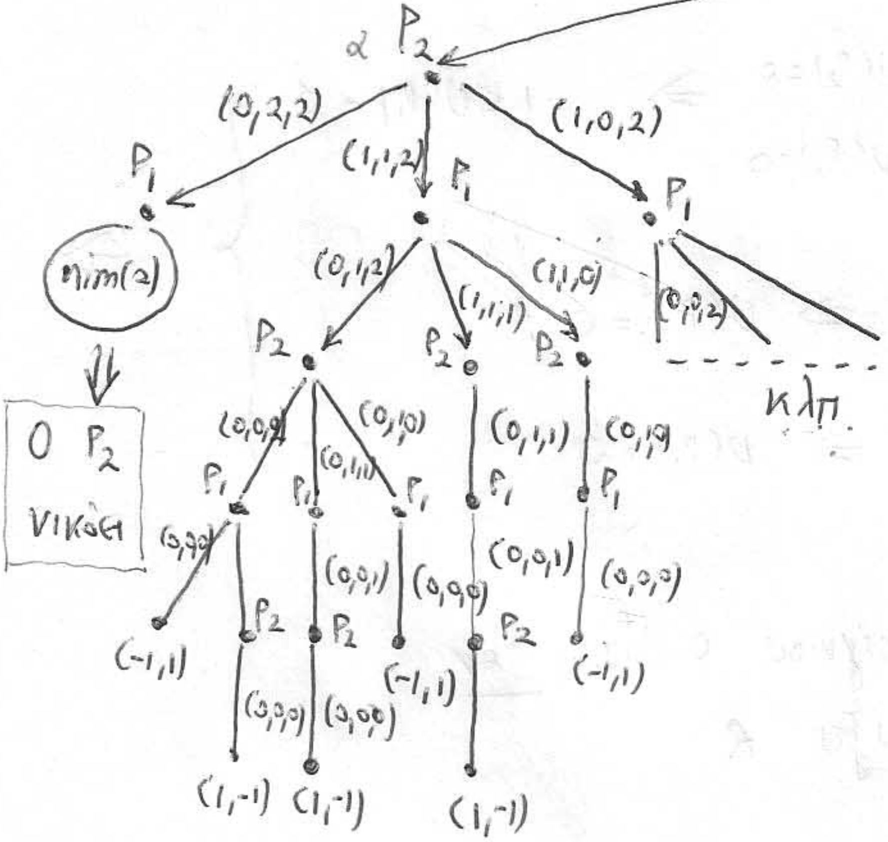
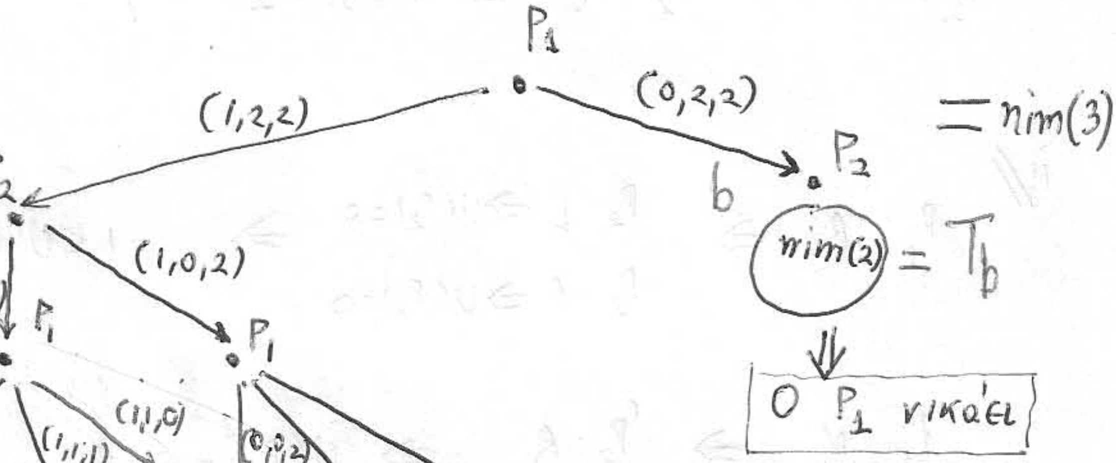
Άσκηση (1.2.7)

Έστω το παίγνιο της άσκησης (13.1) όπου τώρα έχουμε 3 σωρούς των 2 σπίρτων. Δ.ό. τώρα ότι αυτός που παίζει πρώτος πάντα νικάει.





Επειδή ο P_1 παίζει ορθολογικά θα παίξει R διότι τότε οι σωροί θα γίνουν (0,2,2) που σημαίνει υποπαίγνιο με 2 γεμάτους σωρούς. Στο υποπαίγνιο παίζει πρώτος ο P_2 κ' άρα σύμφωνα με την άσκηση (13.1) ο δεύτερος παίκτης (εδώ ο P_1 νικάει).

Παρατήρηση Τι θα γινόταν εάν ο P_1 έπαιζε L ?
Τότε επειδή κ' ο P_2 παίζει ορθολογικά θα έπαιζε L με αποτέλεσμα οι σωροί να γίνουν (0,2,2). Στο υποπαίγνιο ο P_1 παίζει πρώτος κ' έτσι ο P_2 θα είναι ο νικητής

<u>Άσκηση</u> (1.2.3) Έστω το παιχνίδι του [fig 9] όπου όμως τώρα υποθέτουμε ότι είναι παίγνιο τέλειας πληροφόρησης (΄΄υποθέτουμε ότι όλοι οι παίκτες παίζουν ορθολογικά΄).

(i) Ποιό το εγγυημένο κέρδος του P_3 ?

(ii) Τι κίνηση θα συμβουλεύατε τον P_1 να κάνει στην αρχή του παιχνιδιού ?

(i) Εάν ο P_1 παίξει R, τότε ο P_2 είτε κάνει L είτε R έχει payoff 0, κ΄ ο <u>P_3 παίρνει είτε 1 είτε 2</u>. (1)

Εάν ο P_1 παίξει M, τότε ο P_3 επειδή παίζει ορθολογιστικά θα κάνει R με αποτέλεσμα <u>payoff 1</u>. (2)

Εάν ο P_1 παίξει L τότε:

<u>Ο P_2 θα παίξει R</u> κ΄ αναγκαστικά ο P_1 θα παίξει M κ΄ <u>ο P_3 θα έχει payoff 1</u> (3)

Παρατήρηση <u>Ο P_2 θα παίξει R διότι</u> εάν έπαιζε L ο P_1 θα έπαιζε R (γιατί μόνο τότε δεν θα είχε απώλειες) κ΄ ο P_2 θα είχε payoff −2

(1)(2)(3) $\Rightarrow$ Το εγγυημένο κέρδος του P_3 είναι 1

(ii) Θα τον συμβουλεύαμε να μην παίξει την $1^{η}$ φορά R διότι τότε αντιμετωπίζει την πιθανότητα payoff -1 (για τον P_2 κίνηση L ή R δίνει payoff 0)

Εάν έπαιζε ο P_1 την $1^{η}$ φορά M, επειδή ο P_3 παίζοντας R κέρδιζε payoff 1, θα έκανε payoff 0.

Εάν παίξει ο P_1 την $1^{η}$ φορά L, ο P_2 θα προτιμήσει το σίγουρο payoff 1 και θα παίξει R, με αποτέλεσμα payoff 0 για τον P_1

→ διότι εάν παίξει ο P_2 L, ο P_1 για να πάρει payoff 0 (κ' όχι -2) θα παίξει R. □

Συναρτήσεις επιλογής κ' στρατηγικές. (Choice functions - CF)

<u>Ορισμός</u>: Έστω game tree T και P ένας από τους παίκτες. Ορίζουμε την συν/ση C με πεδίο ορισμού το σύνολο των κορυφών που ανήκουν στον P, που συμβολίζουμε με $Dom(P) \subseteq V(T)$. Τότε εάν $u \in Dom(P) \Rightarrow C(u) \in Ch(u)$. <u>Τότε η C λέμε ότι είναι μια συν/ση επιλογής για τον P.</u>

<u>Παρατήρηση</u>: Εάν ο P παίξει σύμφωνα με την συν/ση επιλογής C, ξέρει τη κίνηση που πρέπει να επιλέξει όταν φτάσει στην

κορυφή u. Θα επιλέξει $c_i(u)$.

Εαν λοιπόν όλοι οι παίκτες του T κάνουν τις κινήσεις τους βασιζόμενοι ο καθένας σε κάποιος συν/ση επιλογής $c_i \in \Gamma_{P_i} = \{$ σύνολο όλων των δυνατών συν/σεων επιλογής του παίκτη $P_i \}$, $1 \leq i \leq N$

θα παίρναμε μια πραγματοποίηση του Γ (ένα γ-path) της μορφής:
$$\begin{cases} \gamma_W^r = (r, c_{i_1}(r), c_{i_2} \circ c_{i_1}(r), \ldots, \underbrace{c_{i_{m-1}} \circ \cdots \circ c_{i_1}(r)}_{W \in \tau(T)}) \\ |\gamma_W^r| = m \end{cases}$$

τότε το payoff του w θα ήταν:

$$(\vec{p}(w))_i = \pi_i(c_1, \ldots, c_N) = \text{η } i\text{-οστή συν/ση του payoff}$$

$1 \leq i \leq N$ — εαν οι παίκτες παίζουν με το διάνυσμα συν/σεων επιλογής $(c_1, \ldots, c_N)$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω στο [fig 9] οτι οι $\{P_1, P_2, P_3\}$ παίζουν με τις συν/σεις επιλογής (c_1, c_2, c_3)

$$c_1 = \begin{pmatrix} r & d & e \\ a & j & l \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ e & i \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Dom}(P_1) = \{r, d, e\}$ $\quad \mathrm{Dom}(P_2) = \{a, c\}$ $\quad \mathrm{Dom}(P_3) = \{b\}$.

Τότε αρχίζοντας απο το root $= r$ παίρνουμε

$$\gamma = (r, \underbrace{c_1(r)}_{a}, \underbrace{c_2 \circ c_1(r)}_{c_2(a) = e}, \underbrace{c_1 \circ c_2 \circ c_1(r)}_{c_1(e) = l \in \tau(T)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p}(l) = (0, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \pi_1(c_1, c_2, c_3) = 0 \\ \pi_2(c_1, c_2, c_3) = 1 \\ \pi_3(c_1, c_2, c_3) = 1 \end{cases}$$

Η έννοια της στρατηγικής στην θεωρία παιγνίων θα πρεπει να είναι:

(i) Πλήρης (complete): Η στρατηγική θα πρέπει να δείχνει ποιά κίνηση πρέπει να γίνει σε κάθε κατάσταση του παιγνιου

(ii) Σαφής (definite): Η κίνηση δηλαδή θα πρεπει να είναι συνάρτηση της κατάστασης στην οποία βρίσκεται το παιγνίδι κ' όχι τυχαία, αλλά κ' ούτε να εξαρτάται απο την ψυχολογική κατάσταση του παίκτη.

(iii) Συνεπής ως προς τα σύνολα πληροφορίας (information sets must be respected): Σε κάθε κορυφή ενός συνόλου πληροφορίας η στρατηγική θα πρέπει να δίνει την ίδια κίνηση.

Παρατήρηση: Είναι εμφανές ότι για κάθε στρατηγική υπάρχει μια συν/ση επιλογής που την περιέχει. Όμως οι συν/σεις επιλογής περιέχουν περισσότερη πληροφορία από αυτή που χρειάζεται

Παράδειγμα: Για το [fig 9] ας θεωρήσουμε

$$c_1 = \begin{pmatrix} r & d & e \\ c & j & l \end{pmatrix} \Rightarrow$$ τότε η στρατηγική του P_1 είναι: παίξε R $(r \rightarrow c)$ η πληροφορία $d \rightarrow j$ κ' $e \rightarrow l$ ποτέ δεν χρησιμοποιείται.

$$c_1' = \begin{pmatrix} r & d & e \\ c & k & l \end{pmatrix}$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι T είναι game tree κ' $P \in \{P_1, \dots, P_N\}$. Ορίζουμε ένα (P,c)-path, για $c \in C_P = \{$οι συν/σεις επιλογής του $P\}$, το μονοπάτι

$\gamma_{P,c} = (r, \dots, w) = \gamma^r_w$; $w \in \tau(T)$ έτσι ώστε:

$$\forall u \in \gamma_{P,c} \cap P \implies (u, c(u)) \in E(\gamma_{P,c})$$

<u>Δηλαδή</u>: το $\gamma_{P,c}$ αναπαριστά μια πραγματοποίηση του Γ δοθέντος ότι ο P παίζει χρησιμοποιώντας την συν/ση επιλογής (CF) $c(\cdot)$.

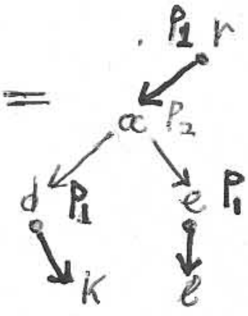
<u>Παράδειγμα</u>: Στο [fig 9] εάν ο P_1 χρησιμοποιεί την CF: $c_1 = \begin{pmatrix} r & d & e \\ \alpha & k & l \end{pmatrix} \in C_{P_1}$,

τότε τα <u>μονοπάτια</u>:

$$(r, \alpha, d, k) = (r, c_1(r), d, c_1(d)) = \gamma^1_{P_1,c_1} \in \Gamma_{P_1,c_1}$$

$$(r, \alpha, e, l) = (r, c_1(r), e, c_1(e)) = \gamma^2_{P_1,c_1} \in \Gamma_{P_1,c_1}$$

είναι (P_1, c_1)-paths. Μάλιστα δεν υπάρχουν άλλα τέτοια μονοπάτια.

<u>Παρατηρούμε ότι</u>: $\underbrace{\gamma^1_{P_1,c_1} \cup \gamma^2_{P_1,c_1}}_{T_{k,l}} =$  $=$ υπο-δένδρο του T

<u>Ορισμός</u>: Έστω T game tree $P \in \{P_1, \dots, P_N\}$ κ' $c \in C_P$. Τότε το <u>υπό-δένδρο επιλογής</u> $CS_{(P,c)}$ (choice subtree) που ορίζεται από (P,c) είναι η ένωση όλων των (P,c)-paths: $CS_{(P,c)} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{P,c}} \gamma$

<u>Παρατήρηση</u>: Όλη η ουσιώδης πληροφορία για την CF. $c(\cdot)$ εμπεριέχεται στο $CS_{(P,c)}$. Αυτό σημαίνει ότι εάν κά-ποιος γνωρίζει το υπόδενδρο $CS_{(P,c)}$ μπορεί να παίξει σύμφωνα με την συν/ση επιλογής c

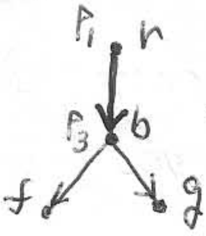
Έστω ότι ο P παίζει σύμφωνα με το $CS_{(P,c)}$. Εάν η κατάσταση του παιγνίου είναι η κορυφή $u \in P$, τότε $u \in CS_{(P,c)}$ κ' μόνον ένα από τα παιδία της u βρίσκεται στο $CS_{(P,c)}$ (διότι η c είναι συν/ση) τότε η κίνηση του P είναι $c(u) \in CS_{(P,c)}$. Απο την άλλη μεριά η περιττή πληροφορία για την c (δηλαδή το πώς ορίζεται σε κορυφές που δεν περιέχονται στην εξέλιξη του παιγνίου) δεν βρίσκεται μέσα στο $CS_{(P,c)}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Για το [fig 9] <u>θεωρούμε</u>:

$$\underbrace{c_1 = \begin{pmatrix} r & d & e \\ b & k & l \end{pmatrix},\ c_1' = \begin{pmatrix} r & d & e \\ b & j & l \end{pmatrix}}_{} \in \Gamma_{P_1}$$

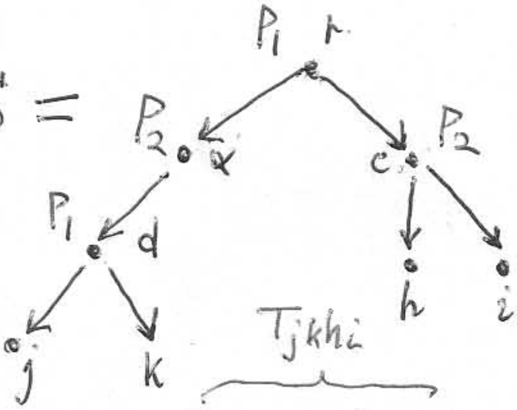
οι 2 CF's εμπεριέχουν την ίδια στρατηγική εφόσον η κορυφή d δεν περιέχεται στη εξέλιξη του παιγνίου.

$$\Updownarrow$$

$CS_{(P_1,c_1)} =$  $= CS_{(P_1,c_1')} = M \in \Sigma_1$

Άσκηση: Έστω το game tree [fig 9], να δειχθεί ότι το subtree που ορίζεται από τις terminal κορυφές i, j, k, h δεν μπορεί να είναι subtree επιλογής για κανέναν από τους παίκτες P_1, P_2 κ' P_3.

$S' =$



$= \overbrace{\gamma_j \cup \gamma_k \cup \gamma_h \cup \gamma_i}^{T_{jkhi}}$

Δεν μπορεί να είναι subtree επιλογής του P_1 γιατί $d \in P_1$ και $j, k \in S'$.
Ούτε για τον P_2 διότι $c \in P_2$ και $h, i \in S'$.
Αν ήταν του P_3 το S' θα έπρεπε να περιέχει ή την f, ή την g.

(Απλ: Όλα τα subtrees του game tree δεν είναι δένδρα επιλογής) □

Θεώρημα: Έστω game tree T κ' $P \in \{P_1, \dots, P_N\}$. Ένα subtree S' του T είναι subtree επιλογής του P κ' κάποιας συν/σης επιλογής $\sigma \in C_P$, εάν τα παρακάτω 2 ικανοποιούνται: για $S \cap dom(P) \neq \emptyset$

(i) $u \in S' \cap P \Rightarrow \exists$ ένα μόνο $u' \in V(S')$, $u' \in Ch(u)$ με $u' = \sigma(u)$

(ii) $u \in S' \cap P' \Rightarrow Ch(u) \subset V(S')$

[απόδειξη PM p 15]

□

{ Σημείωση: δηλαδή χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να αναγνωρίζουμε ένα subtree, σαν subtree επιλογής, χωρίς να δουλεύουμε με συν/σεις επιλογής.

<u>Ορισμός</u>: Μια <u>στρατηγική για τον</u> $P \in \{P_1, \dots, P_N\}$ είναι ένα subtree επιλογής του P, για κάποια συν/ση επιλογής, που είναι συνεπές ως προς τα σύνολα πληροφορίας. (πάνω στο σύνολο πληροφορίας η στρατηγική δίνει την ίδια κίνηση).

Δεν είναι λοιπόν όλα τα subtree επιλογής στρατηγικές για τον P. Εκείνα όμως που είναι, απαρτίζουν το <u>σύνολο στρατηγικής του P</u>, που συμβολίζουμε Σ_P.

Θα είναι λοιπόν πιό σωστό από εδώ κ' στο εξής <u>να εκφράζουμε τα payoffs σαν μια συν/ση στρατηγικών</u> των $P_1, \dots, P_N$ παικτών.

Άρα για terminal κορυφή w

$$(\vec{p}(w))_i = \pi_i(S_1, \dots, S_N) \quad ; \quad S_i \in \Sigma_{P_i}(T) \; 1 \le i \le N.$$

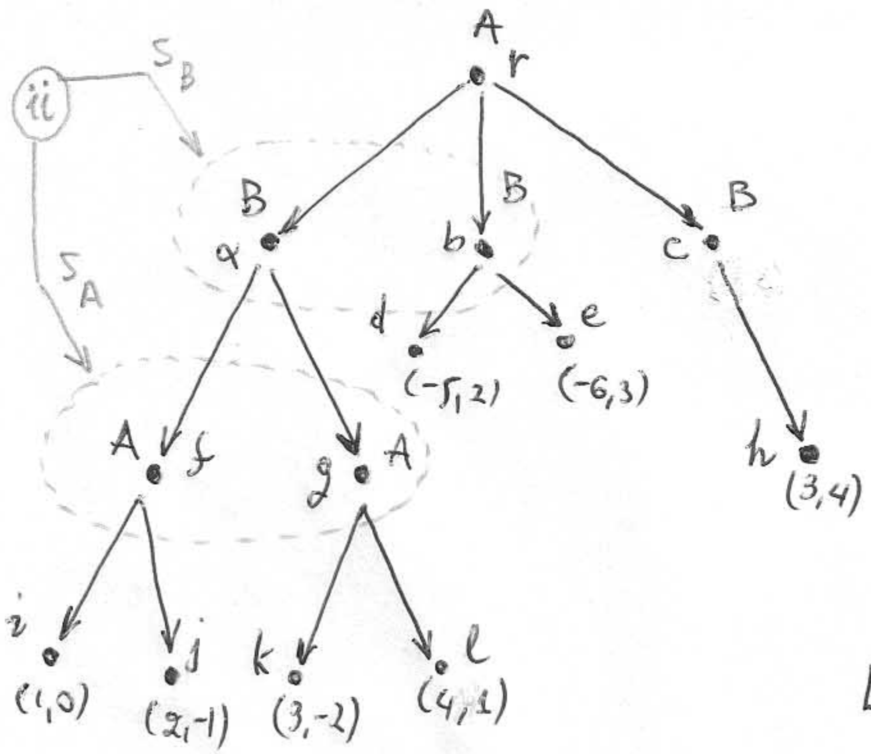
Ενώ η ανοιχτή (extensive) μορφή του παίγνιου Γ με game tree T, παίκτες $\{P_1, \dots, P_N\}$ κ' σύνολα στρατηγικής $\{\Sigma_{P_1}, \dots, \Sigma_{P_N}\}$ είναι:

$$\Gamma = (T, \{P_1, \dots, P_N\}, \{\Sigma_{P_1}, \dots, \Sigma_{P_N}\})$$

<u>Σημείωση</u>: Στα παίγνια τέλειας πληροφόρησης όλα τα subtrees επιλογής του παίκτη P είναι κ' στρατηγικές του P. <u>Αντιστρέφοντας</u> παίρνουμε τον ορισμό του παίγνιου τέλειας πληροφόρησης

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι το παίγνιο Γ έχει την ανοιχτή μορφή $\Gamma = (T, \{P_1,\dots,P_N\}, \{\Sigma_1,\dots,\Sigma_N\})$. Τότε το Γ είναι παίγνιο τέλειας πληροφόρησης εάν για κάθε παίκτη, κάθε subtree επιλογής, είναι στρατηγική.

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται το game tree T:



[fig 23]

(i) Θεωρείστε το T παίγνιο τέλειας πληροφόρησης

(α) Να μετρηθούν κ' να βρεθούν οι συν/σεις επιλογής των παικτών A κ' B

(b) Να βρεθούν τα subtrees επιλογής των A κ' B.

(ii) Έστω ότι οι κανόνες του παιγνίου <u>τροποποιούνται</u>:

- Ο B δεν μπορεί να διακρίνει εάν ο A στην πρώτη του κίνηση κινείται L ή M
- Εάν ο A στην αρχή κινηθεί L, τότε ο A δεν μπορεί να διακρίνει εάν ο B κινείται L ή R.

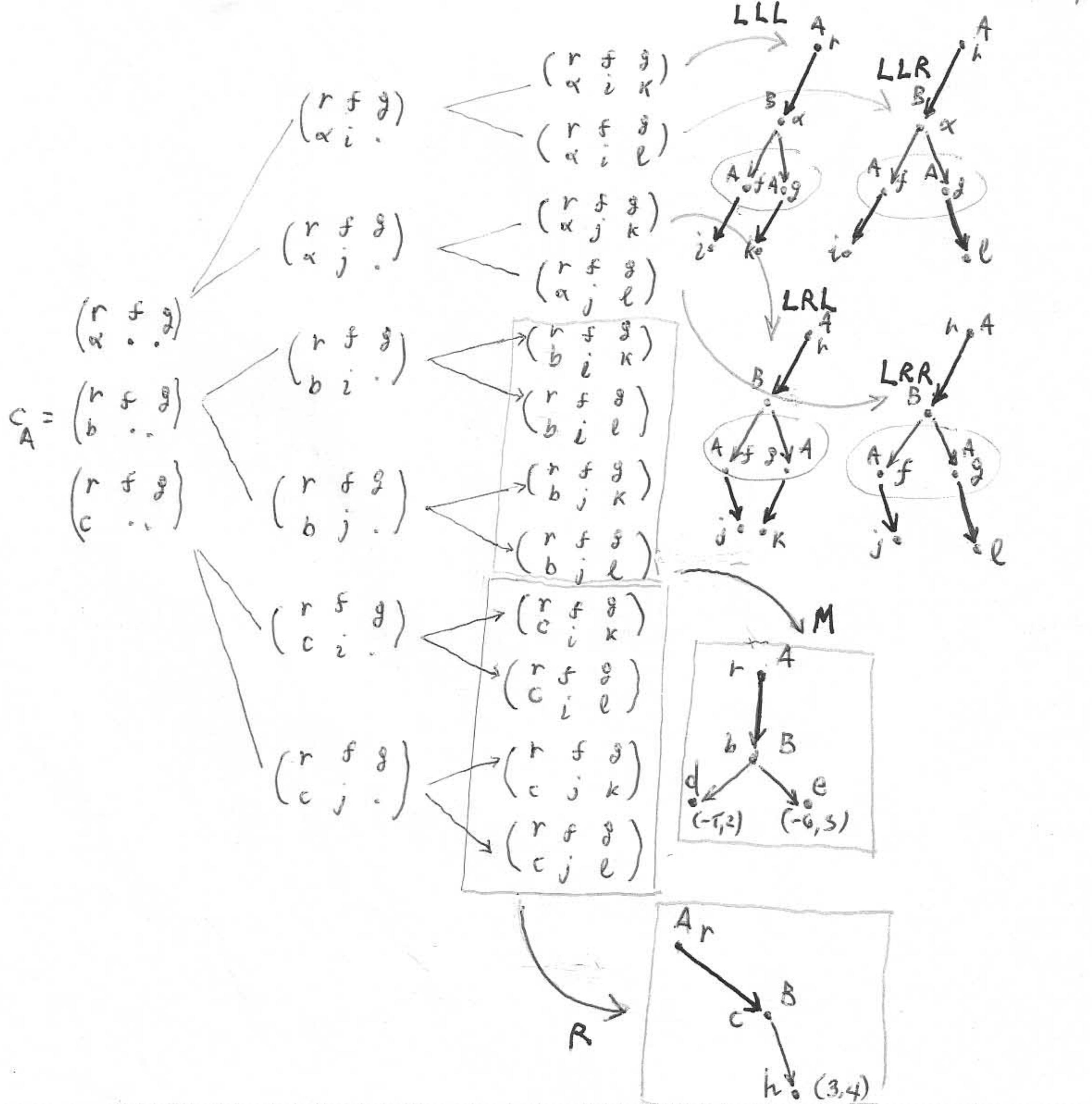
(i) παίκτης $A = \{r, f, g\}$

$\#$ των συν/σεων επιλογής του A $= \# C_A =$

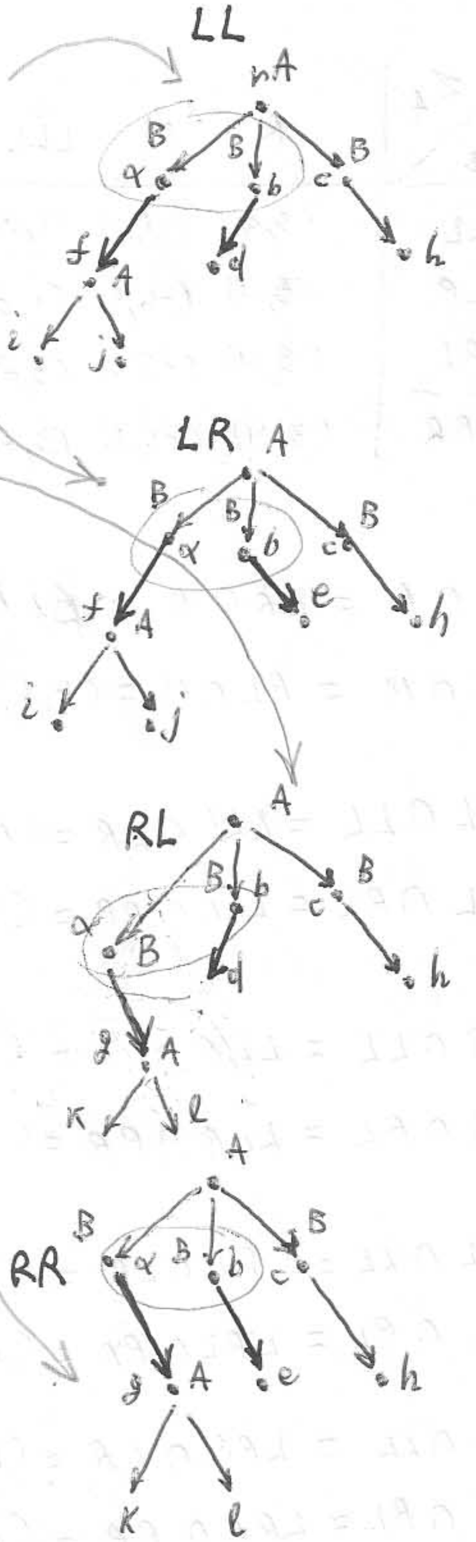
$\# ch(r) \cdot \# ch(f) \cdot \# ch(g) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12 \geq \# \Sigma_A$

παίκτης $B = \{\alpha, b, c\}$

$\# C_B = \# ch(\alpha) \cdot \# ch(b) \cdot \# ch(c) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \geq \# \Sigma_B$



$$C_B = \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & \cdot & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & d & h \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & e & h \end{pmatrix} \\[2ex] \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & \cdot & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & d & h \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & e & h \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Ονομετολογία των subtrees επιλογών του Α:

- Ο Α κάνει αρχικά L ⇒

⇒ Lxy

x	y
Ο κλάδος που επιλέγη ο Α εαν ο Β κινηθεί L	Ο κλάδος που επιλέγη ο Α εαν ο Β κινηθεί R

- Ο Α κάνει αρχικά M ⇒ M
- Ο Α κάνει αρχικά R ⇒ R

Σ_A = {στρατηγικές του Α} εφόσον έχουμε τέλεια πληροφόρηση

CS_A = {Τα subtrees επιλογής του Α} = {R, M, LLL, LLR, LRL, LRR}

Ονομετολογία των subtrees επιλογών του Β

- xy

x	y
Ο κλάδος που επιλέγει ο Β εαν ο Α κινηθεί L.	Ο κλάδος που επιλέγει ο Β εαν ο Α κινηθεί M.

$\Sigma_B \backslash \Sigma_A$	R	M	LLL	LLR	LRL	LRR
LL	(3,4)	(-5,2)	(1,0)	(1,0)	(2,-1)	(2,-1)
LR	(3,4)	(-6,3)	(1,0)	(1,0)	(2,-1)	(2,-1)
RL	(3,4)	(-5,2)	(3,-2)	(4,1)	(3,-2)	(4,1)
RR	(3,4)	(-5,3)	(3,-2)	(4,1)	(3,-2)	(4,1)

$$LL \cap R = LR \cap R = RL \cap R = RR \cap R = (r, c, h) = \gamma_h$$

$$LL \cap M = RL \cap M = (r, b, d) = \gamma_d, \quad LR \cap M = RR \cap M = (r, b, e) = \gamma_e$$

$$LLL \cap LL = LLL \cap LR = (r, \alpha, f, i) = \gamma_i$$

$$LLL \cap RL = LLL \cap RR = (r, \alpha, g, k) = \gamma_k$$

$$LLR \cap LL = LLR \cap LR = (r, \alpha, f, i) = \gamma_i$$

$$LLR \cap RL = LLR \cap RR = (r, \alpha, g, \ell) = \gamma_\ell$$

$$LRL \cap LL = LRL \cap LR = (r, \alpha, f, j) = \gamma_j$$

$$LRL \cap RL = LRL \cap RR = (r, \alpha, g, k) = \gamma_k$$

$$LRR \cap LL = LRR \cap LR = (r, \alpha, f, j) = \gamma_j$$

$$LRR \cap RL = LRR \cap RR = (r, \alpha, g, \ell) = \gamma_\ell$$

$$CS_B = \underbrace{\{LL, LR, RL, RR\}}$$

$$\Sigma_B = \{\text{στρατηγικές του } B\}$$

(ii) (A) Εάν ο A στην αρχή κινηθεί L, τότε ο A δεν μπορεί να διακρίνει εάν ο B κινείται L ή R

$\Rightarrow$ $S_A = \{f, g\}$ είναι σύνολο πληροφορίας για τον A κ' μια στρατηγική του A θα πρέπει να δίνει την ίδια κίνηση στο f κ' στο g.

$\Rightarrow$ Τα subtrees επιλογής LLR και LRL δεν είναι στρατηγικές

$\Rightarrow$ $\Sigma_A = \{L, M, LLL, LRR\}$ = το σύνολο στρατηγικών του A

(B) Ο B δεν μπορεί να διακρίνει εάν ο A στην πρώτη του κίνηση κινείται L ή M

$\Rightarrow$ $S_B = \{a, b\}$ είναι σύνολο πληροφορίας για τον B

$\Rightarrow$ Τα subtrees επιλογής LR κ' RL του B δεν είναι στρατηγικές

$\Rightarrow$ $\Sigma_B = \{LL, RR\}$ = το σύνολο στρατηγικών του B

$\square$

__Παρατήρηση__: Έστω ότι κάθε παίκτης P_i κάνει τις κινήσεις του στο παίγνιο βασιζόμενος στο C.S S_i, τότε, η τομή των S_i είναι ένα path από το root σε κάποια terminal κορυφή: $\gamma_w = \bigcap_{i=1}^{N} S_i = (r, \dots, w)$; $w \in \tau(T)$

Το μονοπάτι γ_w μας δίνει την πραγματοποίηση του παιγνίου δοθέντος ότι κάθε παίκτης P_i βασίζεται για να παίξει στο C.S S_i. Το payoff τότε θα είναι $\vec{p}(w) = (\pi_1(S_1, \dots, S_N), \dots, \pi_N(S_1, \dots, S_N))$

__Παράδειγμα__: Στην προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι:

$\gamma_i = LLL \cap LL = (r, a, f, i)$ $\quad \vec{p}(i) = (\pi_1(LLL, LL), \pi_2(LLL, LL)) = (1, 0)$

$\gamma_e = M \cap RR = (r, b, e)$ $\quad \vec{p}(e) = (\pi_1(M, RR), \pi_2(M, RR)) = (-6, 3)$

__Άσκηση__ Έστω ότι $\Gamma = (T, \{P_1, P_2\}, \{\Sigma_1, \Sigma_2\})$ και $S_i \in \Sigma_i$ $i = 1, 2$ είναι 2 στρατηγικές βάση των οποίων οι παίκτες κάνουν τις κινήσεις τους. Δείξτε ότι:

$$S_1 \cap S_2 = (r, \dots, w) = \gamma_w \;;\; w \in te(T)$$

Το subtree επιλογής S_i είναι ένωση γ_{P_i, C_i} paths $i = 1, 2$

Έστω ότι $r \in P_1$

$$\left.\begin{array}{l} r \in P_1 \Rightarrow (r, c_1(r)) \in E(S_1) \\ r \notin P_2 \Rightarrow ch(r) \subset V(S_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (r, c_1(r)) \in E(S_1 \cap S_2)$$

$$S_1 \cap S_2 = (r, c_1(r), \dots)$$

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 \subseteq \{r\} \cup T_{c_1(r)}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1(r) \notin P_1 \Rightarrow ch(c_1(r)) \subset V(S_1) \\ c_1(r) \in P_2 \Rightarrow (c_1(r), c_2 \circ c_1(r)) \in E(S_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (c_1(r), c_2 \circ c_1(r)) \in E(S_1 \cap S_2) \\ S_1 \cap S_2 \subseteq \{r\} \cup \{c_1(r)\} \cup T_{c_2(c_1(r))} = (r, c_1(r)) \cup T_{c_2 \circ c_1(r)} \end{cases}$$

Δηλαδή μετά από ένα πεπερασμένο # βημάτων το παίγνιο θα τελειώσει σε κάποια terminal κορυφή w. Επομένως

$$(r, c_1(r), c_2 \circ c_1(r), \dots, w) = \gamma_w = S_1 \cap S_2.$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Για το παίγνιο στο [fig 13] να βρεθούν οι στρατηγικές του P_1 κ' P_2.

$$dom(P_1) = \{r, c, d, e, g\}$$

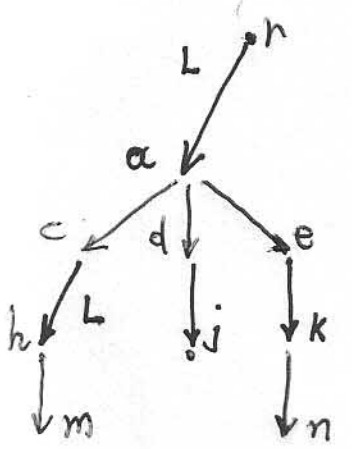
$$\# \Gamma_{P_1} = \prod_{u \in dom(P_1)} \# ch(u) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ a & \cdot & j & k & l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ a & h & j & k & l \end{pmatrix} = c_1^A$$

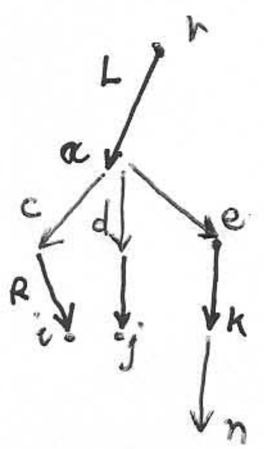
$$\begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ a & \cdot & j & k & l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ a & i & j & k & l \end{pmatrix} = c_2^A$$

$$\begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ b & \cdot & j & k & l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ b & h & j & k & l \end{pmatrix} = c_3^A$$

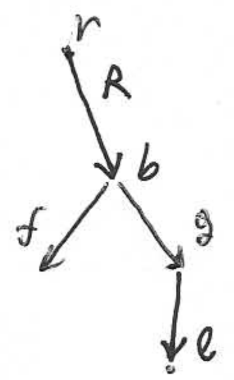
$$\begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ b & \cdot & j & k & l \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r & c & d & e & g \\ b & i & j & k & l \end{pmatrix} = c_4^A$$



$CS_{(P_1, C_1^A)} = LL$



$CS_{(P_1, C_2^A)} = LR$



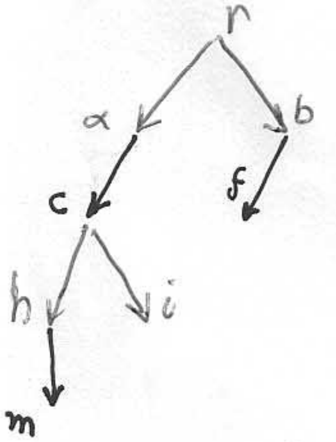
$CS_{(P_1, C_3^A)} = CS_{(P_1, C_4^A)} = R$

$\mathrm{dom}(P_2) = \{\alpha, b, h, k\}$ $\qquad \# \Gamma_{P_2} = \prod_{u \in \mathrm{dom}(P_2)} \# Ch(u) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

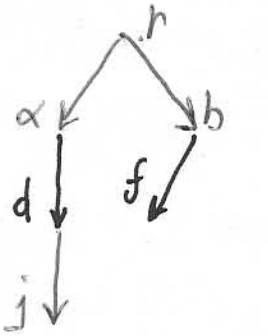
$$\begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ c & \cdot & m & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ c & f & m & n \end{pmatrix} = C_1^B, \quad \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ c & g & m & n \end{pmatrix} = C_2^B$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ d & \cdot & m & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ d & f & m & n \end{pmatrix} = C_3^B, \quad \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ d & g & m & n \end{pmatrix} = C_4^B$$

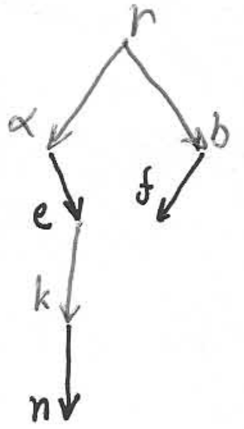
$$\begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ e & \cdot & m & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ e & f & m & n \end{pmatrix} = C_5^B, \quad \begin{pmatrix} \alpha & b & h & k \\ e & g & m & n \end{pmatrix} = C_6^B$$



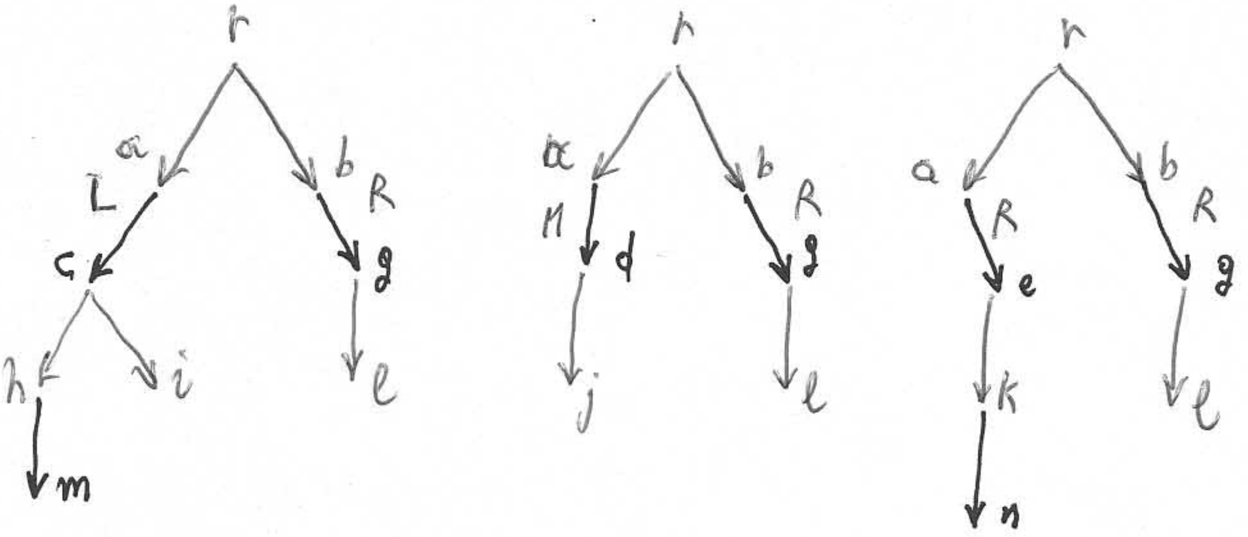
$CS_{(P_2, C_1^B)} = LL$



$CS_{(P_2, C_3^B)} = ML$



$CS_{(P_2, C_5^B)} = RL$



$CS_{(P_2, c_2^B)} = LR$ $\qquad$ $CS_{(P_2, c_4^B)} = MR$ $\qquad$ $CS_{(P_2, c_6^B)} = RR$

Η ονοματολογία των στρατηγικών του P_2 είναι <u>υπό συνθήκη</u>, δηλαδή $XY \in \Sigma_{P_2} \Leftrightarrow$

κίνηση P_1	κίνηση P_2
L	X
R	Y

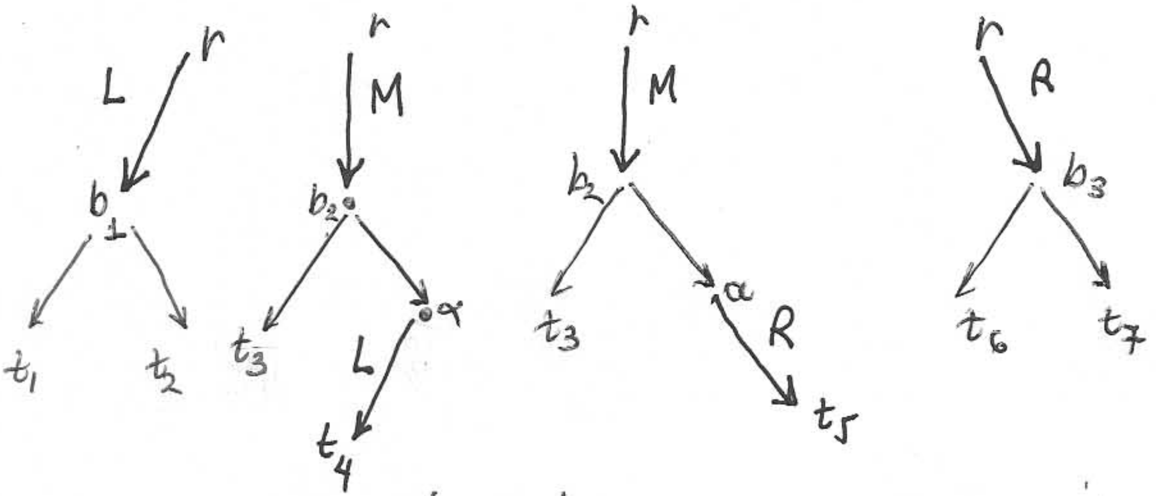
Επειδή το παίγνιο που περιγράφεται από το [fig 13] είναι τέλειας πληροφόρησης όλα τα subtrees επιλογής είναι στρατηγικές:

$$\begin{cases} \Sigma_{P_1} = \{LL, LR, R\} \\ \Sigma_{P_2} = \{LL, ML, RL, LR, MR, RR\} \end{cases}$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Να βρεθούν οι στρατηγικές των A κ' B για το παίγνιο που περιγράφεται από το δένδρο στο σχήμα [fig 12]

Τα subtrees επιλογής του A είναι 4:



Επειδή ο A έχει τέλεια πληροφόρηση όλα τα subtrees είναι στρατηγικές: $\Sigma_A = \{L, ML, MR, R\}$
(παρατηρήστε ότι $\#\Gamma_A = 3\cdot 2$).

Ο παίκτης B έχει $\#\Gamma_B = 2\cdot 2\cdot 2$ συν/σεις επιλογής, εαν είχε τέλεια πληροφόρηση, θα είχε κ' 8 στρατηγικές τις: $LLL, \underbrace{LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL}, RRR$. Λόγω

δίνουν διαφορετικές κινήσεις στο σύνολο πληροφορίας $\{b_1, b_2, b_3\} = S_B$ για αυτό <u>δεν</u> είναι στρατηγικές

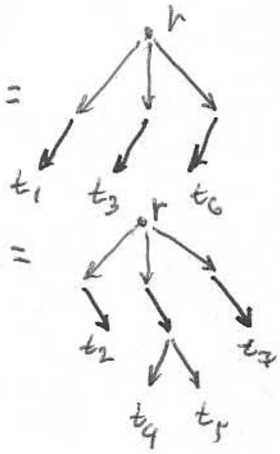
όμως της ύπαρξης του $S_B = \{b_1, b_2, b_3\}$ οι στρατηγικές του είναι μόνο δύο: $\Sigma_B = \{LLL, RRR\}$.

Ονοματολογία για παίκτη B } $XYZ \in \Sigma_B \Leftrightarrow$

Κίνηση	
A	B
L	X
M	Y
R	Z

LLL =

RRR =



□