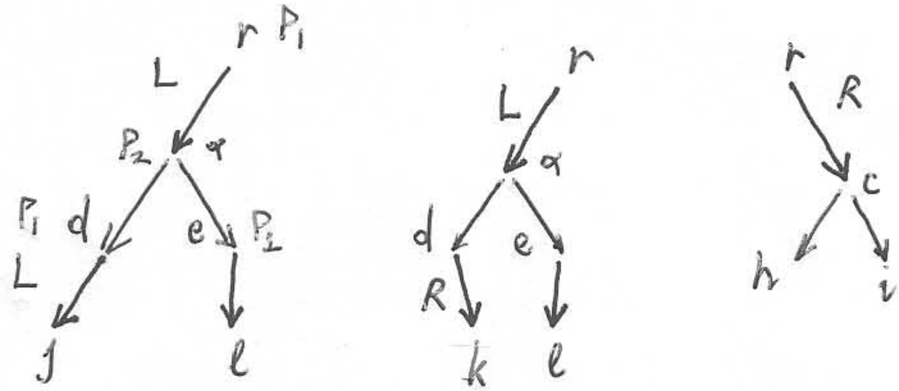
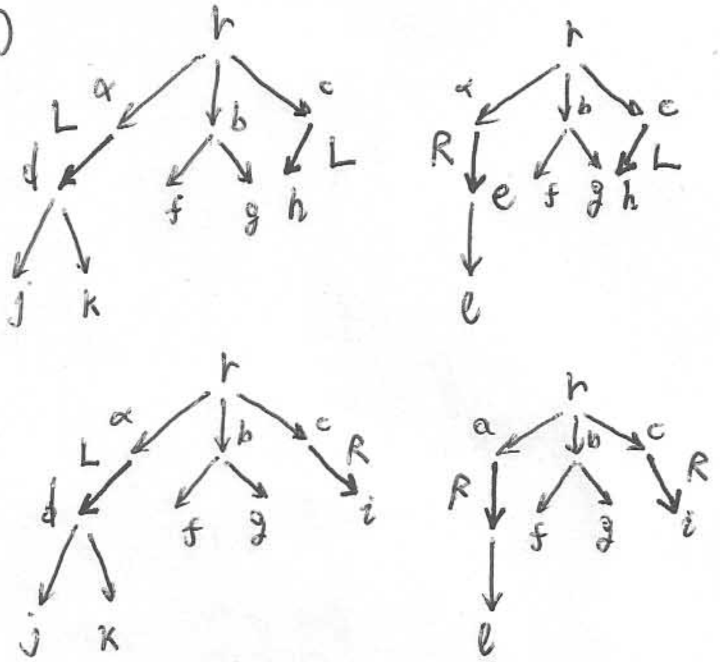
Άσκηση: Για το παιχνίδι στο σχήμα [fig 9] να βρεθούν οι στρατηγικές των P_1, P_2 κ' P_3.

(P_1)



$\Sigma_1 = \{R, LL, LR\}$

(P_2)

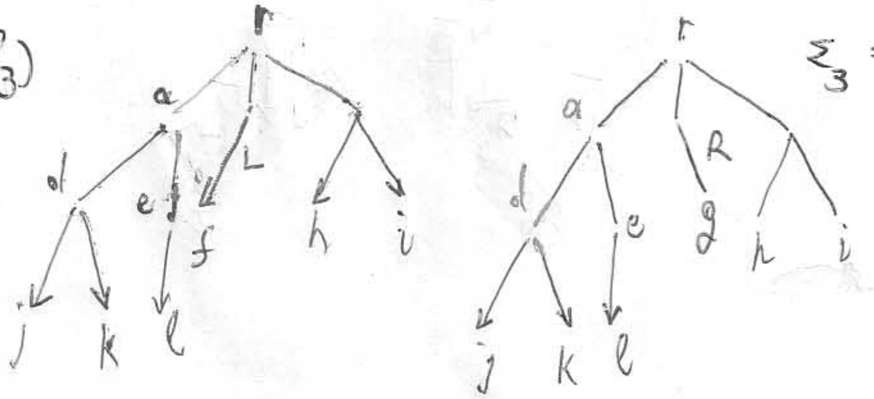


$XY \in \Sigma_2 = \{LL, LR, RL, RR\}$

$P_1: L$ $P_1: R$

υπό συνθήκη κινήσεις.

(P_3)



$\Sigma_3 = \{L, R\}$

Παίγνια με τυχαίες κινήσεις (chance moves)

Η τύχη (ή "φύση") είναι ένας πρόσθετος παίκτης $\mathbb{C}$ (chance) που όμως στο τέλος δεν έχει payoff (utility).

Εάν δηλαδή η κορυφή u ανήκει στην τύχη τότε, εάν $u \in \mathbb{C}$ κ' εάν $\{v_1, \dots, v_s\} = ch(u)$, η μετάβαση από το u στο v_i θα γίνει με πιθανότητα $p_i := P(u, v_i)$ και $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$ ή ότι $\sum_{v \in Ch(u)} P(u,v) = 1$; $P(u,v) \geq 0$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω παίγνιο όπου αρχίζουμε ρίχνοντας 2 κανονικά ζάρια. Η συνέχεια του παιγνιδιού εξαρτάται από το άθροισμα των ενδείξεων.

(i) $r \in \mathbb{C}$

Η τ.μ. που δίνει το άθροισμα των ενδείξεων

(ii) $ch(r) = \{v_1, \dots, v_{11}\}$ κ' $P(r, v_i) = P\{X = i+1\}$ $i = 1, \dots, 11$

<u>Στα προηγούμενα είδαμε</u>: ότι η τομή των στρατηγικών $S_i \in \Sigma_i$ $1 \leq i \leq N$, που ακολουθούν οι παίκτες $\{P_1, \dots, P_N\}$ σε μια πραγματοποίηση του παίγνιου, είναι ένα path από το r σε κάποια terminal κορυφή w δηλαδή

$$\bigcap_{i=1}^{N} S_i = (r, \dots, w) = \gamma_w^r \Rightarrow \tau\left(\bigcap_{i=1}^{N} S_i\right) = w.$$

<u>Εάν όμως υπάρχουν τυχαίες κινήσεις</u> στο παίγνιο, η τομή των στρατηγικών γενικά, δεν θα είναι ένα path

άλλο ένα subtree του T με $\tau\left(\bigcap_{i=1}^{N} S_i\right) = \{w_1, \dots, w_r\}$, $r \geq 1$
Κάθε μονοπάτι στο $\bigcap_{i=1}^{N} S_i$ διακλαδώνεται όποτε φτάσει σε κορυφή που ανήκει στο $\mathbb{C}$. Κάθε terminal κορυφή w_i (τέλος παιχνιδιού) πραγματοποιείται με πιθανότητα ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων μετάβασης των κορυφών που ανήκουν στο $\mathbb{C}$ κ' στο <u>μοναδικό</u> path που ορίζεται από το r κ' το w_i (δηλ. το γ_{w_i}).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\Gamma = (T, \{P_1, \dots, P_N, \overset{\text{chance}}{\mathbb{C}}\}, \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\})$ κ' $w \in \tau\left(\bigcap_{i=1}^{N} S_i\right)$, με $\gamma_w = (r, \dots, w)$ <u>τότε</u>:

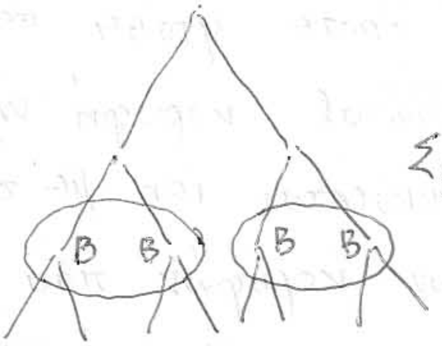
$$\underbrace{P\{(S_1, \dots, S_N); w\}}_{\substack{\text{Η πιθανότητα το } \Gamma \\ \text{να τερματίσει στο } w \\ \text{δοθέντος του ότι οι} \\ \text{παίκτες } \{P_1, \dots, P_N\} \text{ παίζουν} \\ \text{βάση των στρατηγικών } (S_1, \dots, S_N) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N}} = \begin{cases} \prod\limits_{\substack{u_i \in \mathbb{C} \cap \gamma_w \\ (u_i, v_i) \in E(\gamma_w)}} P(u_i, v_i), & \mathbb{C} \cap \gamma_w \neq \emptyset \\ 1, & \mathbb{C} \cap \gamma_w = \emptyset \end{cases} \quad : (34.1)$$

Πάντα όμως $P\{(S_1, \dots, S_N); \{w_1, \dots, w_r\}\} = 1$ [Δες παραδ σελ 42]

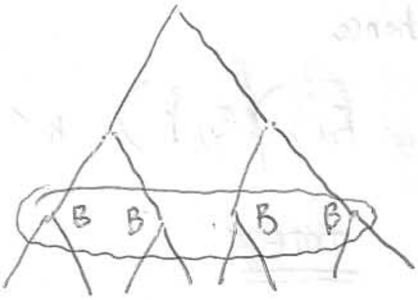
Κατά αυτή την έννοια θα πρέπει να ορίσουμε το <u>αναμενόμενο payoff</u> (<u>expected utility</u>) του j παίκτη, εάν όλοι οι παίκτες ακολουθούν στρατηγικές $(S_1, \dots, S_N) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N$:

$$\mathbb{E}\left[U_i(S_1, \dots, S_N)\right] = \sum_{w \in \tau\left(\bigcap_{i=1}^{N} S_i\right)} P\{(S_1, \dots, S_N); w\} \, U_i(w) \quad : (34.2)$$

<u>προσοχή</u> $\mathbb{E}\left[U_i(\cdot)\right] : \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\left\{ \right.$ <u>Δηλαδή</u> το expected utility του P_i παίκτη είναι συν/ση των στρατηγικών $(S_1, \dots, S_N)$



$$\Sigma_B = \{LLRR, RRLL, LLLL, RRRR\}$$



$$\Sigma_B = \{LLLL, RRRR\}$$

$$\Sigma_B = \{\boxed{LLRL, LLLR, LLLL, LLRR}, \boxed{RRRL, RRLR, RRLL, RRRR}\}$$

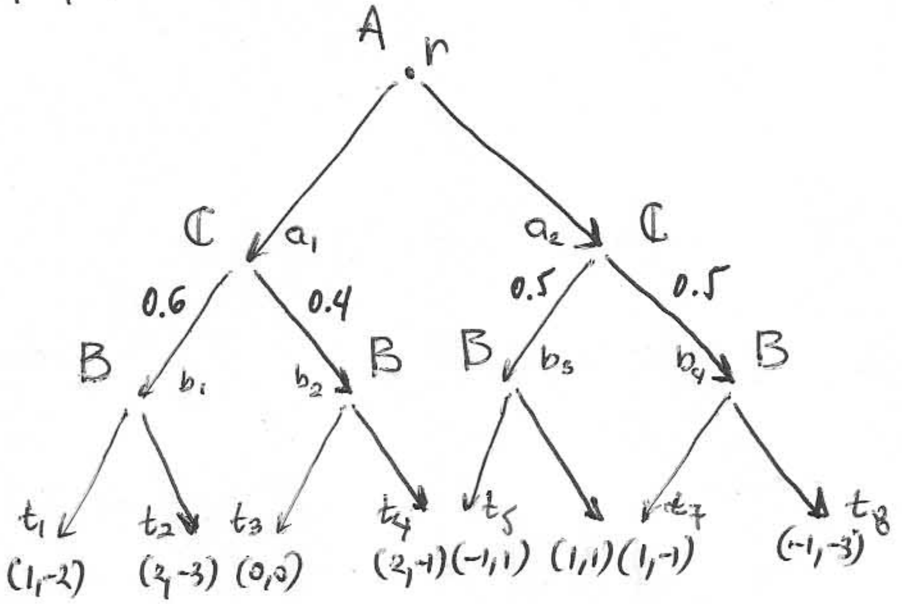
όπου: $U_i(w) \equiv (\vec{\gamma}(w))_i$

οι παίκτες

η τύχη

Παράδειγμα: Έστω παίγνιο $\Gamma = (T, \{\underbrace{A, B}, C\}, \{\Sigma_A, \Sigma_B\})$, τέλειας πληροφόρησης.

$T =$



$t_i \in \tau(T)$

Σ_A = Οι στρατηγικές του A είναι μόνο 2 = $\{L, R\}$

Σ_B = Οι στρατ. του B είναι 16 γιατί θα πρέπει να παίξει υπο-συνθήκη στις κινήσεις των άλλων 2 παικτών A κ' C

$= \{X_1 X_2 X_3 X_4 \mid X_i \in \{L, R\}\}$

$X_1 X_2 X_3 X_4 \in \Sigma_B \Leftrightarrow$

Ο B παίξει X_4 εάν A:R κ' C:R

Ο B παίξει X_3 εάν A:R, C:L

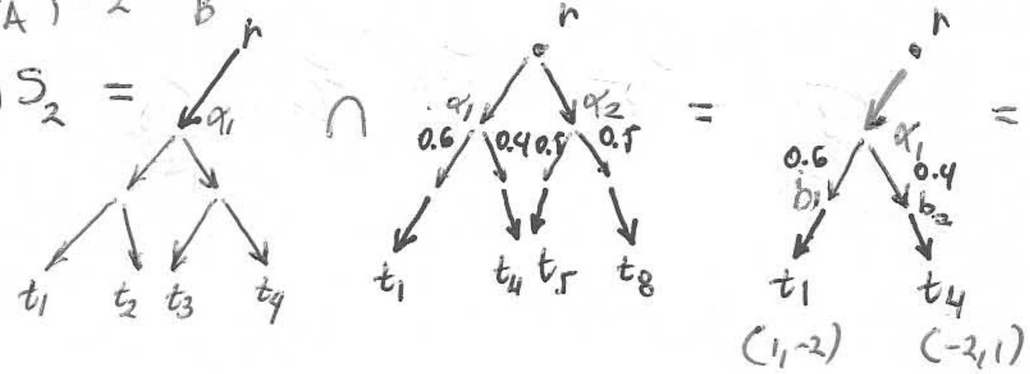
Ο B παίξει X_2 εάν A:L, C:R

Ο B παίξει X_1 εάν A:L, C:L

Έστω ότι ο A έχει στρατηγική $S_1 = L$ (συμβολικά A:L) κ' ο B στρατηγική $S_2 = LRLR$ (B:LRLR) τότε

$S_1 \in \Sigma_A,\ S_2 \in \Sigma_B$

Τέλος παιχνιδιού $= S_1 \cap S_2 =$



$= \gamma_{t_1}^r \cup \gamma_{t_4}^r$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(i) $S_1 \cap S_2$ = ένωση από paths που διακλαδώνονται στο $\mathbb{C}$

(ii) Το t_1 πραγματοποιείται με πιθανότητα $P(\alpha_1, b_1) = 0.6$ κ' το t_4 με $P(\alpha_1, b_2) = 0.4$.

- <u>Αναμενόμενη χρησιμότητα του A με στρατηγικές $S_1 = L$, $S_2 = LRLR$:</u>

$$\mathbb{E}\left[U_A(L, LRLR)\right] = \sum_{w \in \tau(L \cap LRLR)} P\{(L, LRLR); w\} \cdot U_A(w) = (0.6)(1) + (0.4)(-2) = -0.2$$

$$\tau(L \cap LRLR) = \{t_1, t_4\}$$

$$P\{(L, LRLR); t_1\} = \prod_{u \in \gamma_{t_1} \cap \mathbb{C}} P(u,v) = P(a_1, b_1) = 0.6$$

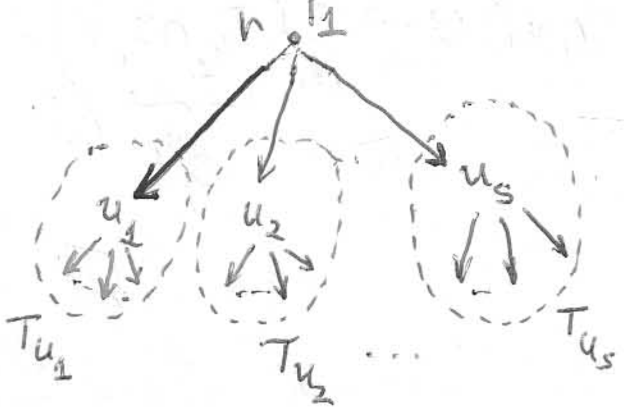
$$P\{(L, LRLR); t_4\} = \prod_{u \in \gamma_{t_2} \cap \mathbb{C}} P(u,v) = P(a_1, b_2) = 0.4$$

- <u>Ενώ του B θα είναι:</u>

$$\mathbb{E}\left[U_B(L, LRLR)\right] = (0.6)(-2) + (0.4)(1) = -0.8.$$

□

Είναι εμφανές ότι, εάν το r (που μπορεί να ανήκει σε κάποιον παίκτη P_i είτε στην τύχη C) έχει s παιδιά δηλ. $ch(r)=\{u_1,\dots,u_s\}$, το T μπορεί να περιγραφεί σαν $T = r \cup T_{u_1} \cup \dots \cup T_{u_s}$ όπου T_{u_i} το cutting του T στο u_i. Κάθε subtree T_{u_i} θεωρείται σαν το υπο-παίγνιο στο οποίο περιοριζόμαστε μετά την πρώτη κίνηση του παίκτη που κατέχει το r (κάποιος παίκτης P_i ή η τύχη C). Ας πούμε ότι $r \in P_1$ και ο P_1 παίζει με την στρατηγική S_1 και $(r,u_1)\in E(S_1)$.

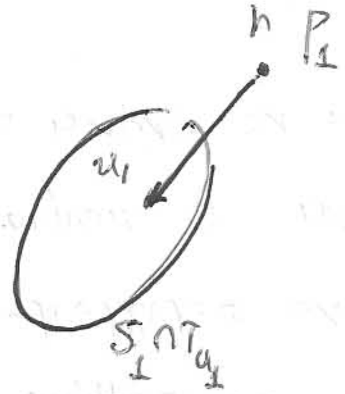


Δηλαδή: η πρώτη κίνηση του P_1 περιορίζει όλες τις επόμενες κινήσεις στο υποπαίγνιο $T_{u_1} \Rightarrow S_1 \cap T_{u_1}$

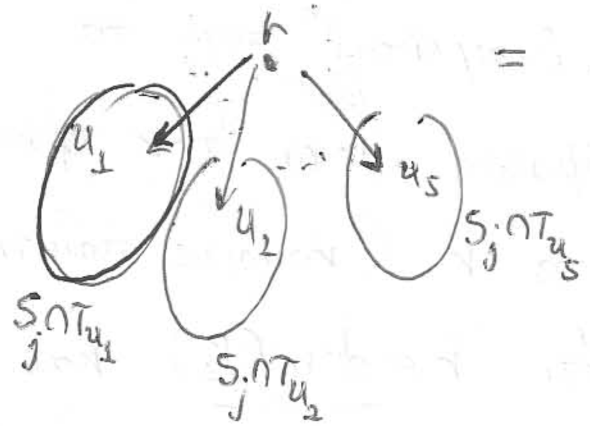
Έτσι εάν οι $P_1,\dots,P_N$ ξεκινούν με στρατηγικές $S_1\in\Sigma_1(T),\dots,S_N\in\Sigma_N(T)$, στο υποπαίγνιο T_{u_1} θα συνεχίσουν να παίζουν με στρατηγικές:

$$\overbrace{S_1\cap T_{u_1}}^{S_1}\in\Sigma_1(T_{u_1}),\dots,S_N\cap T_{u_1}\in\Sigma_N(T_{u_1}).$$

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η τομή των στρατηγικών $S_i\in\Sigma_i(T)$ $1\le i\le N$ που ακολουθούν οι παίκτες σε μια πραγματοποίηση έχει την αναπαράσταση



$$= S_1 = (r, u_1) \cup (\underbrace{S_1 \cap T_{u_1}}_{\text{η } S_1 \text{ περιορισμένη στο } T_{u_1}})$$



$$= S_j = \bigcup_{u_i \in Ch(r)} \left\{ (r, u_i) \cup (\overbrace{S_j \cap T_{u_i}}^{S_j^{u_i}}) \right\}, \quad \forall j \neq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcap_{i=1}^{N} S_i = (r, u_1) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{N} (\underbrace{T_{u_1} \cap S_i}_{S_i^{u_1}}) \right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} \bigcap_{i=1}^{N} S_i = \begin{cases} (r,u) \cup \left(\bigcap_i S_i^u \right) & ; \ r \notin C \\ \bigcup_{u \in ch(r)} \left[(r,u) \cup \left(\bigcap_i S_i^u \right) \right] & ; \ r \in C \end{cases} \\ \underline{\underline{\text{where}}}: \ S_i^u := S_i \cap T_u \in \Sigma_i(T_u). \\ \mathbb{E}(U_j(\underline{S})) = (1 - \delta_C(r)) \mathbb{E}(U_j(\underline{S}^u)) + \delta_C(r) \sum_{u \in ch(r)} P(r,u) \mathbb{E}(U_j(\underline{S}^u)) \end{gathered}}$$

$$\bigcap_{i=1}^{N} S_i = \begin{cases} (r,u) \cup \Big(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{N} (S_i \cap T_u)}_{S_i^u} \Big), & r \notin \mathbb{C} \quad : (38.1) \\ \bigcup_{u \in Ch(r)} \Big\{ (r,u) \cup \Big(\bigcap_{i=1}^{N} (S_i \cap T_u) \Big) \Big\}, & r \in \mathbb{C} \quad : (38.2) \end{cases}$$

$\boxed{\forall i, \forall u \in Ch(r) \quad (r,u) \in E(S_i)}$

$\# Ch(r)$ υπο-παίγνια

Έτσι αν η παραπάνω αναπαράσταση είναι γνωστή η πρόταση που ακολουθεί γίνεται προφανής.

<u>Πρόταση:</u> Έστω T tree game με N παίκτες $\{P_1, \dots, P_N\}$ κ' έστω $S_i \in \Sigma_i(T)$ $1 \le i \le N$ στρατηγικές, <u>τότε</u>:

(i) $$\mathbb{E}\big(U_j (S_1, \dots, S_N) \big) = \mathbb{E}\big(U_j (S_1 \cap T_u, \dots, S_N \cap T_u) \big) \quad : (38.3)$$

<u>Εάν</u> $r \notin \mathbb{C}$

(ii) $$\mathbb{E}\big(U_j (S_1, \dots, S_N) \big) = \sum_{u \in Ch(r)} P(r,u)\, \mathbb{E}\big(U_j (S_1 \cap T_u, \dots, S_N \cap T_u) \big) \quad : (38.4)$$

<u>Εάν</u> $r \in \mathbb{C}$

(i) Από την σχέση (38.1) βλέπουμε ότι οι στρατηγικές $S_i \in \Sigma_i(T)$ κ' $S_i \cap T_u \in \Sigma_i(T_u)$ θα οδηγήσουν στις ίδιες terminal κορυφές. Που σημαίνει την ίδια αναμενόμενη χρησιμότητα

(ii) Έχουμε $r \in \mathbb{C}$ κ' επειδή $\bigcap_{i=1}^{N} S_i = \bigcup_{n=1}^{m} \gamma_{w_n}^{r}$, θα έχουμε:

$$(34.1) \Rightarrow P\{(S_1, \dots, S_N); w_n\} = \prod_{\substack{u_i \in \gamma_{w_n} \cap \mathbb{C} \\ (u_i, v_i) \in E(\gamma_{w_n})}} P(u_i, v_i)$$

αλλά $\gamma_{w_n} = (r, u, \dots, w_n)$ η παραπάνω σχέση δίνει:

$$P\{(S_1,\dots,S_N);w_n\} = P(r,u)\,P\{(S_1\cap T_u,\dots,S_N\cap T_u);w_n\} \quad :(39.1)$$

Απο την σχεση (34.2) έχουμε:

$$\mathbb{E}(U_j(S_1,\dots,S_N)) = \sum_{w\in\tau(\cap_{i=1}^N S_i)} P\{(S_1,\dots,S_N);w\}\,U_j(w) \overset{(38.2)}{=}$$

$$= \sum_{u\in Ch(r)} \sum_{w\in\tau(\cap_{i=1}^N (S_i\cap T_u))} P\{(S_1,\dots,S_N);w\}\,U_j(w) \overset{(39.1)}{=}$$

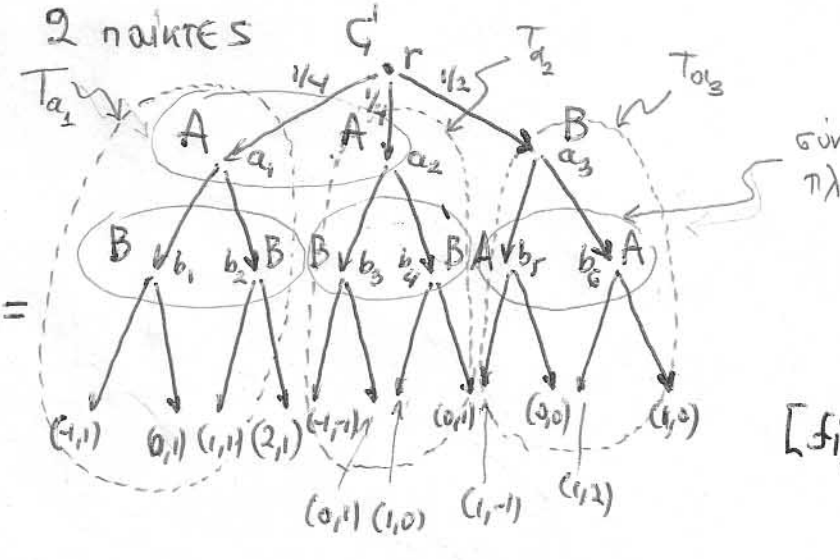
$$= \sum_{u\in Ch(r)} P(r,u)\left(\sum_{w\in\tau(\cap_{i=1}^N (S_i\cap T_u))} P\{(S_1\cap T_u,\dots,S_N\cap T_u);w\}\,U_j(w)\right)$$

$$= \sum_{u\in Ch(r)} P(r,u)\,\mathbb{E}(U_j(S_1\cap T_u,\dots,S_N\cap T_u))$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> 1.4.2 Το παρακάτω game tree έχει μια τυχαία κίνηση συγκεκριμένα $r\in\mathbb{C}$. Δεν είναι όμως παίγνιο τέλειας πληροφόρησης. Να βρεθούν οι στρατηγικές για κάθε έναν από τους 2 παίκτες

$T = r\cup T_{\alpha_1}\cup T_{\alpha_2}\cup T_{\alpha_3} =$



[fig 39]

Για τις στρατηγικές του Α:

Πρώτα περιοριζόμαστε στο υπο-παίγνιο $r\,UT_{\alpha_1}\,UT_{\alpha_2}$ τότε δοθέντος ότι C:L κ' C:M ο Α κάνει τις υπο-συνθήκη κινήσεις X και Y, με $X, Y \in \{L, R\}$. Επειδή όμως το $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ είναι σύνολο πληροφορίες για τον Α, απο τις 4 κινήσεις μονο 2 είναι επιτρεπτές κ' έτσι: $\Sigma_A(r\,UT_{\alpha_1}\,UT_{\alpha_2}) = \{LL, RR\}$

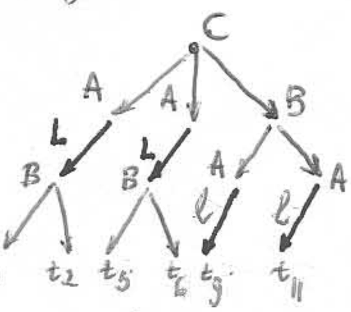
Στο υποπαίγνιο $r\,UT_{\alpha_3}$, δοθέντος ότι B:L κ' B:R ο Α κάνει τις υπο-συνθήκη κινήσεις X κ' Y με $X, Y \in \{L, R\}$ πάλι μονο 2 είναι επιτρεπτες επειδή το $\{b_5, b_6\}$ είναι σύνολο πληροφορίες για τον Α και έτσι:

$$\Sigma_A(r\,UT_{\alpha_3}) = \{ll, rr\}$$

Τελικά:

$$\Sigma_A(T) = \Sigma_A(r\,UT_{\alpha_1}\,UT_{\alpha_2}) \times \Sigma_A(r\,UT_{\alpha_3}) =$$
$$= \{LL, RR\} \times \{ll, rr\} = \{LLll, LLrr, RRll, RRrr\}$$

για παράδειγμα $\underbrace{(LL)(ll)}_{S_2} =$



Για τις στρατηγικές του Β: Στο υπο-παίγνιο $r\,UT_{\alpha_1}$ θα έχουμε (εαν πρώτα C:L) τότε εαν A:L κ' A:R ο Β σχε

Τις υπο συνθήκη κινήσεις X κ' Y με $X, Y \in \{L, R\}$:

$$\Sigma_B(r \cup T_{\alpha_1}) = \{LL, RR\}$$ (γιατί $\{b_1, b_2\}$ σύνολο πληροφορίας)

Στο υποπαίγνιο $r \cup T_{\alpha_2}$ ομοίως έχουμε:

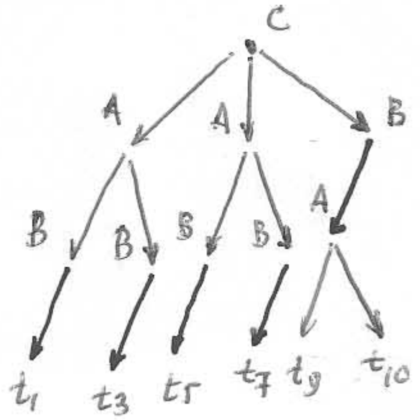
$$\Sigma_B(r \cup T_{\alpha_2}) = \{LL, RR\}$$

Στο υποπαίγνιο $\{r\} \cup T_{\alpha_3}$: $\Sigma_B(\{r\} \cup T_{\alpha_3}) = \{L, R\}$

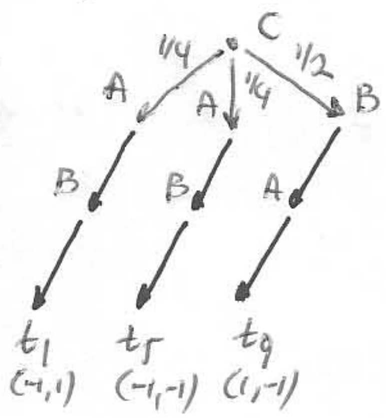
<u>Έτσι</u>: $\Sigma_B(T) = \Sigma_B(r \cup T_{\alpha_1}) \times \Sigma_B(r \cup T_{\alpha_2}) \times \Sigma_B(r \cup T_{\alpha_3})$

$$= \{(LL)(LL)(L), (LL)(LL)(R), (LL)(RR)(L), (LL)(RR)(R), (RR)(LL)(L), (RR)(LL)(R), (RR)(RR)(L), (RR)(RR)(R)\}$$

<u>Για παράδειγμα</u>: $\underbrace{(LL)(LL)(L)}_{s_2} =$



<u>Παρατηρούμε ότι</u>: $s_1 \cap s_2 =$



$P\{(s_1, s_2); t_1\} = 1/4$

$P\{(s_1, s_2); t_5\} = 1/4$

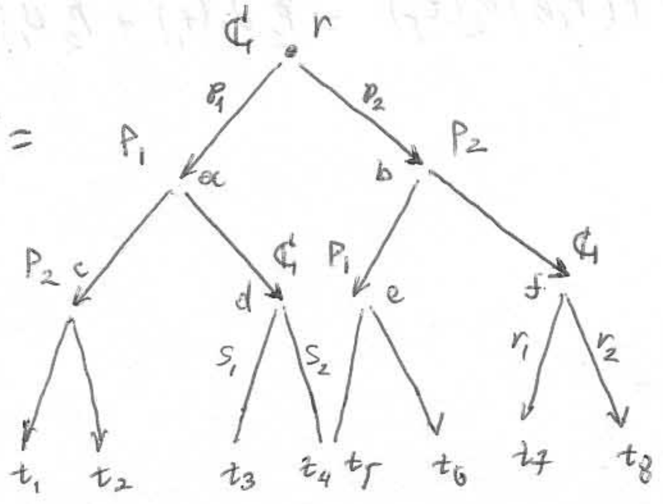
$P\{(s_1, s_2); t_9\} = 1/2$

$$\mathbb{E}(U_A(s_1, s_2)) = (0.25)(-1) + (0.25)(-1) + (0.5)(1) = 0.0$$

$$\mathbb{E}(U_B(s_1, s_2)) = (0.25)(1) + (0.25)(-1) + (0.5)(-1) = -0.5$$

□

Παράδειγμα: Έστω το παίγνιο τέλειας πληροφόρησης T

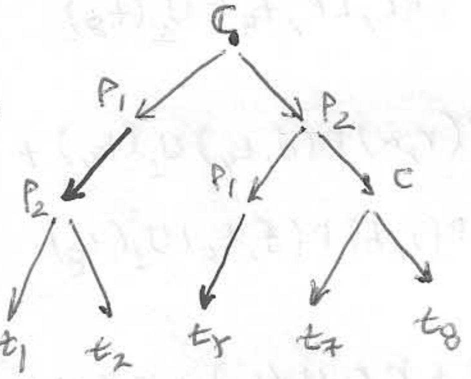
$T =$ 

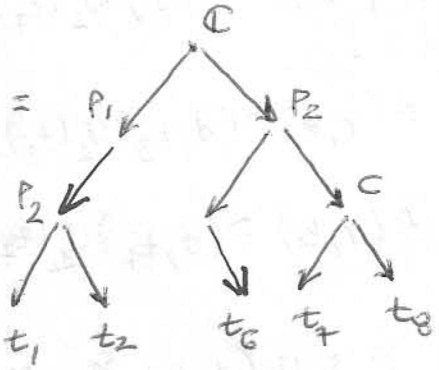
$P_1 = \{a, e\}$

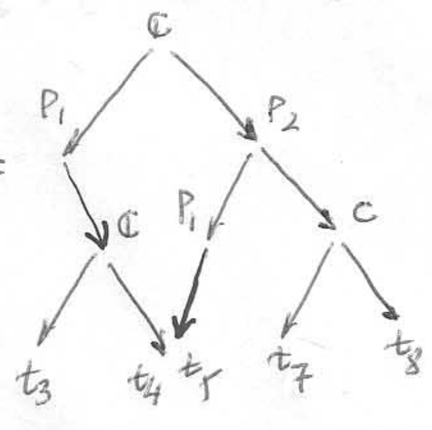
$P_2 = \{b, c\}$

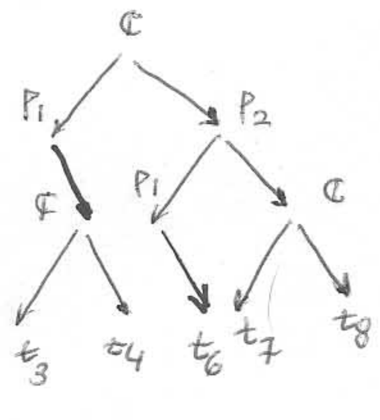
$\mathbb{C} = \{r, d, f\}$

Στρατηγικές P_1:

$LL =$ 

$LR =$ 

$RL =$ 

$RR =$ 

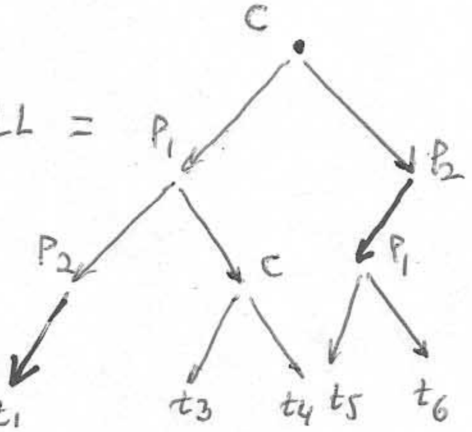
$XY \in \Sigma_1(T) = \{LL, LR, RL, RR\}$

Η κίνηση του P_1 είναι Y στο T_b

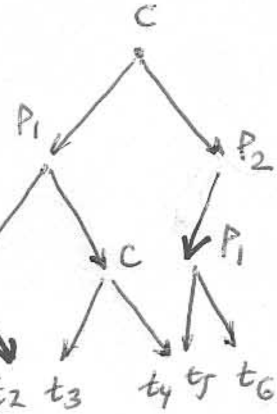
Η κίνηση του P_1 είναι X στο T_a

Στρατηγικές P_2 :

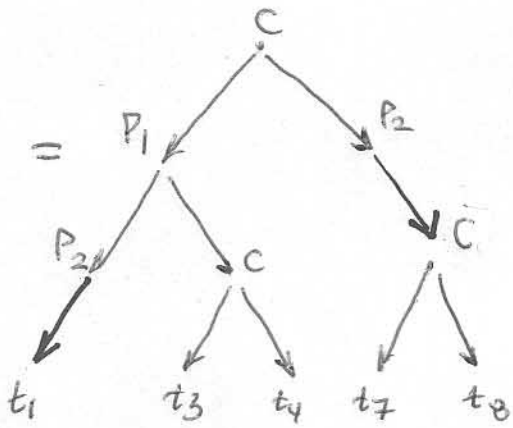
$LL =$



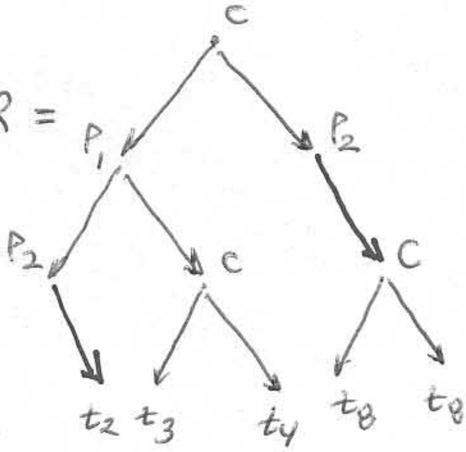
$RL =$



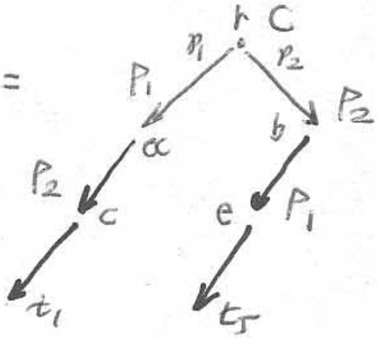
$LR =$



$RR =$



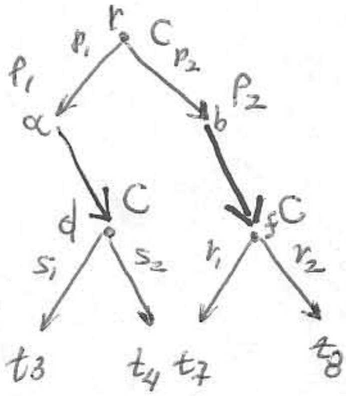
Εάν $S_1 = LL$, $S_2 = LL \Rightarrow S_1 \cap S_2 =$



$P\{t_1, t_5\} = P\{t_1\} + P\{t_5\} =$

$= p_1 + p_2 = 1$

Εάν $S_1 = RL$, $S_2 = LR \Rightarrow S_1 \cap S_2 =$



$P\{t_3, t_4, t_7, t_8\} = P\{t_3\} + P\{t_4\} +$

$P\{t_7\} + P\{t_8\} = p_1 s_1 + p_1 s_2 + p_2 r_1 + p_2 r_2 = 1$

$\square$

Αναμενόμενη χρησιμότητα
(Expected Utility)

Έστω ο "λαχνός" $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ με payoffs

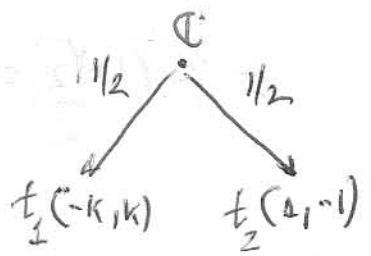
$$\xi \overset{d}{=} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} , \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Παίγνια με προσδοκώμενη τιμή $\mathbb{E}(\xi) = 0$ καθώς κ' παίγνια τα οποία "κοστίζουν" όσο κ' το $\mathbb{E}(\xi) > 0$ καλούνται δίκαια.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω 2 παίκτες P_1 κ' P_2

<u>Απο την μεριά του P_1</u>: $\xi_1 = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(\xi_1) = -\frac{1}{2}(k-1)$



<u>Απο την μεριά του P_2</u>: $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}(\xi_2) = \frac{1}{2}(k-1)$

Εάν $k=1$, $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ εάν όμως $k>1$ κ' ο P_2 είναι πρόθυμος να πληρώσει στον P_1 ποσό $\mathbb{E}(\xi_2)$ (η τιμή του παίγνιου για τον P_2) το παίγνιο γίνεται δίκαιο

$$\xi_1^* = \xi_1 + \mathbb{E}(\xi_2) \; , \; \xi_2^* = \xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_i^*) = 0 . \qquad \square$$

Ο κόσμος γενικά αρνείται να παίζει δίκαια παίγνια ιδίως αυτά που έχουν μεγάλη διασπορά και μικρό αριθμό επαναλήψεων, $\xi = \begin{pmatrix} -k & k \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ τότε για $k = 1€$ κάποιος ίσως

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left[U(\xi)\right] = \sum_{x \in \xi(\Omega)} U(x) P_{\xi}(x) < \infty$$

$$\mathbb{E}\left(\ln(\xi)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \ln(2^r) p q^{r-1} = p\ln(2) \sum_{r=1}^{\infty} r q^{r-1} = p\ln(2)\left(\frac{1}{1-q}\right)'$$

$$= \frac{p\ln(2)}{(1-q)^2} \xrightarrow[q \to \frac{1}{2}^+]{} \ln(4) < \infty$$

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{\xi}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{2^r} \cdot p q^{r-1} = p\sqrt{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(q\sqrt{2}\right)^{r-1} = \frac{p\sqrt{2}}{1 - q\sqrt{2}} \xrightarrow[q \to 1/2^+]{} \frac{\sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} < \infty$$

$$\mathbb{E}\left(\ln(\xi)\right) = \ln(4)$$

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{\xi}\right) = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

δεχόταν να στοιχηματίσει σε ένα μόνο ρίξιμο κέρματος, αλλά εάν $k = 1000$€ μάλλον θα το απέφευγε. (το 2^o παίγνιο εμπεριέχει μεγαλύτερο κίνδυνο).
Υπάρχουν παίγνια που κατά κάποιον τρόπο δεν αξίζουν την προσδοκώμενη τιμή τους.

<u>Παράδειγμα</u> (παράδοξο του St. Petersburg)

Παίγνιο: Ρίχνεται ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί κεφαλή. Εάν η κεφαλή εμφανιστεί στην $n^{οστή}$ ρίψη ο παίκτης λαμβάνει 2^n €

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & \dots & 2^n & \dots \\ p & pq & \dots & pq^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$(\text{τιμή του παιγνίου}) = \mathbb{E}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (p q^{n-1}) = \frac{2p}{1-2q} \xrightarrow[q \to 1/2^+]{} +\infty$$

<u>Εάν λοιπόν το παίγνιο είναι δίκαιο η προσδοκώμενη τιμή του θα είναι ∞.</u> Κανένας παίκτης δεν θα πλήρωνε πολλά για να παίξει αυτό το παίγνιο. Για παράδειγμα κανένας δεν θα έδινε ας πούμε 10^6€ για να παίξει, άν κ' $10^6 \ll \mathbb{E}(\xi)$

<u>Λύση Bernoulli για το παράδοξο</u>: Τα άτομα δεν ενδιαφέρονται για τα κέρδη του παιγνίου, αλλά μάλλον για την χρησιμότητα αυτών των κερδών.

Εάν κάποιος λοιπόν έχει συν/ση χρησιμότητας $U(x)$ και payoffs $x_1, x_2, \dots$ τότε μπορούμε να αποτιμήσουμε το προηγούμενο παίγνιο σαν $\mathbb{E}[U(\xi)] < \infty$. Σαφώς θα θα πρέπει $U'>0$ κ' U' μη αύξουσα (δηλαδή θα πρέπει η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος να φθίνει όταν το εισόδημα αυξάνει).

$p=q=1/2$

(i) $U(x)=\ln(x) \Rightarrow \mathbb{E}[U(\xi)] = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}\ln(2^r) = \frac{\ln(2)}{2}\sum_{r=1}^{\infty} r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1}\Big|_{x=1/2} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r\right)'\Big|_{x=1/2} = \left(\frac{x}{1-x}\right)'\Big|_{x=1/2} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/2} = 4 \Rightarrow \mathbb{E}[U(\xi)] = \ln(4) = U(4)$$

(ii) $U(x)=\sqrt{x} \Rightarrow \mathbb{E}[U(\xi)] = \sum_{r=1}^{\infty}\sqrt{2^r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^r = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = U(3+2\sqrt{2})$$

□

<u>Αρχή της αριστοποίησης:</u>

Εαν τα άτομα έχουν ορθολογικές προτιμήσεις (Neumann-Morgenstern), σε καθεστώς αβεβαιότητας, θα δράσουν στο να επιλέγουν το ενδεχόμενο που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη τιμή του δικού τους δείκτη χρησιμότητας $\mathbb{E}[U(\xi)] = \max$

<u>Αποστροφή κινδύνου κατά (NM):</u>

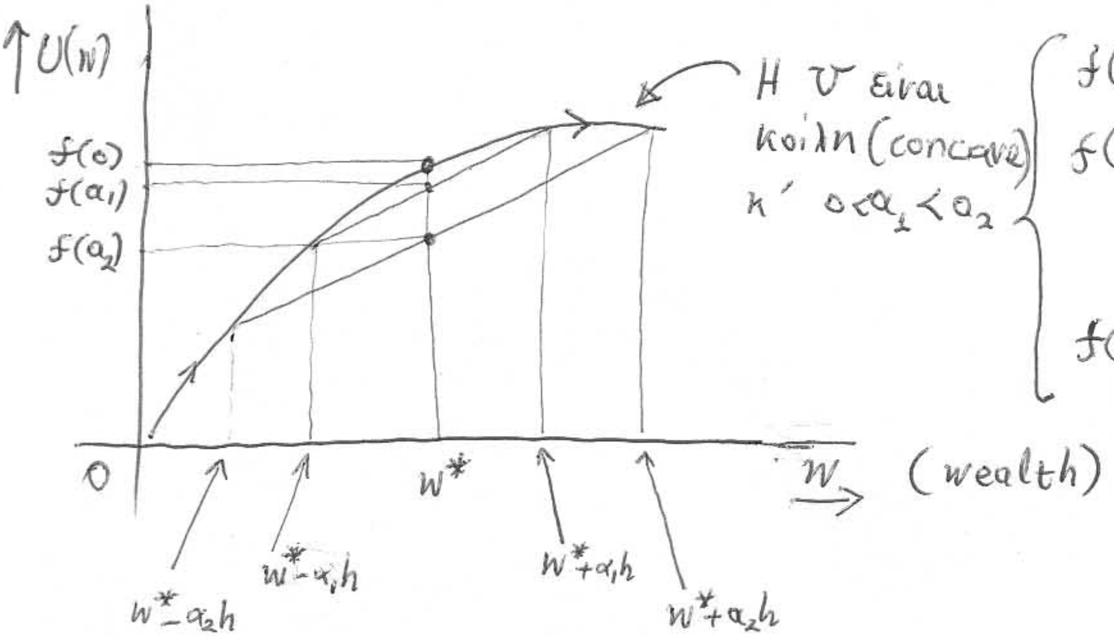
Τα άτομα που αρνούνται τα δίκαια παίγνια λέγονται αποστρεφόμενα τον κίνδυνο άτομα (risk averse)

αποστρέφονται τον κίνδυνο $\Leftrightarrow$ αντιμετωπίζουν κοίλη συν/ση χρησιμότητας U $\Leftrightarrow$ είναι πρόθυμα να πληρώσουν για να αποφύγουν τα δίκαια παίγνια (σίγουρα κ' τα μη δίκαια)

$\mathfrak{J}_a \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} w^*+ah & w^*-ah \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad Var(\mathfrak{J}_a)=a^2h^2 \quad \mathbb{E}(\mathfrak{J}_a)=w^*$

$$f(a) = \mathbb{E}\left[U(\mathfrak{J}_a)\right] = \frac{U(w^*+ah)+U(w^*-ah)}{2} \Rightarrow f'(a) = \frac{h}{2}\left[U'(w^*+ah)-U'(w^*-ah)\right]$$

$$U' \downarrow \Leftrightarrow U'(w^*+ah) < U'(w^*-ah) \Leftrightarrow f'(a)<0$$



Η U είναι κοίλη (concave) κ' $0<a_1<a_2$

$$\begin{cases} f(0) = U(w^*) \\ f(a_1) = \dfrac{U(w^*+a_1h)+U(w^*-a_1h)}{2} \\ \vdots \\ f(0) > f(a_1) > f(a_2) > \dots \end{cases}$$

Δηλ. όταν αυξάνεται το $\sigma^2_{\mathfrak{J}_a}$ μειώνεται το $\mathbb{E}(U(\mathfrak{J}_a))$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω άτομο με πλούτο (στο παρόν) $w=w^*$. Ο πλούτος του στο μέλλον ενδέχεται να μειωθεί κατά ένα ποσοστό $0<\epsilon<1$ $(w^* \longmapsto (1-\epsilon)w^*)$ με πιθανότητα $1-p$. Δηλαδή έστω τ.μ. $\eta \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} w^* & (1-\epsilon)w^* \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, εμφανώς το παίγνιο δεν είναι δίκαιο $\mathbb{E}(\eta)=w^*(1-\epsilon(1-p))>0$ κ' αναγκάζεται να παίξει. Εάν η συν/ση χρησιμότητας που αντιμετωπίζει είναι U, το άτομο προτίθεται να πληρώσει ασφάλεια $\mathbb{P}$, τέτοια ώστε $\mathbb{E}[U(\eta)] = U(w^*-\mathbb{P}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{p\,U(w^*) + (1-p)\,U((1-\epsilon)w^*) = U(w^*-\mathbb{P})}$$

<u>Δηλ.</u> $\mathbb{P}$ είναι το μέγεθος του ασφαλίστρου που θα κοστίσει το άτομο, αδιάφορο ανάμεσα στο να συμμετέχει στο παίγνιο ή να πληρώσει $\mathbb{P}$ με πιθανότητα 1.