<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι εάν $m_{kl} \in Saddle(M)$ (i) τότε τα k και l είναι βέλτιστες στρατηγικές των row κ' column παικτών αντίστοιχα. Και (ii) $v_r(M) = v_c(M) = m_{kl}$

$$(78.1) \Rightarrow v_r(M) = \max_{\underline{p}} \min_{j} \mathbb{E}(\underline{p}, j) \geq \max_{\substack{i \\ \Sigma_{r,M} \subset M_{r,M}}} \min_{j} \underbrace{\mathbb{E}(i,j)}_{m_{ij}} = u_r(M) : (79.1)$$

$$(78.4) \Rightarrow v_c(M) = \min_{\underline{q}} \max_{i} \mathbb{E}(i, \underline{q}) \leq \min_{\substack{j \\ \Sigma_{c,M} \subset M_{c,M}}} \max_{i} \mathbb{E}(i,j) = u_c(M) : (79.2)$$

$$(66.2) \Rightarrow m_{kl} = u_r(M) = u_c(M) \ : (79.3)$$

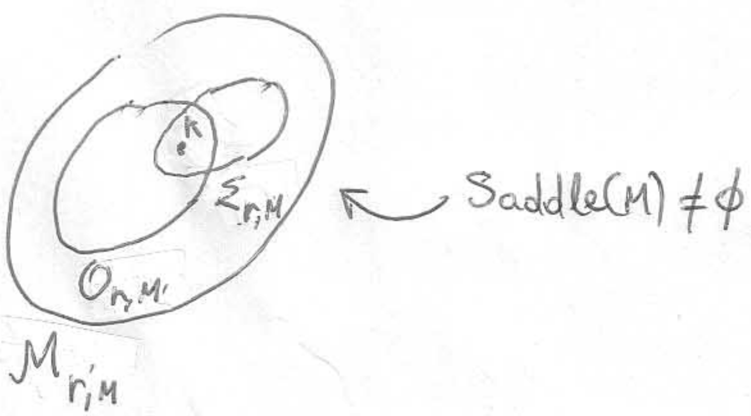
$$\left.\begin{array}{l} (79.1)(79.2)(79.3) \Rightarrow \quad v_c(M) \leq m_{kl} \leq v_r(M) \\ (74.1) \Rightarrow \quad v_c(M) \geq v_r(M) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v_r(M) = m_{kl} = v_c(M)}$$

<u>Για το (i) παρατηρούμε ότι:</u>

$$v_r(M) = m_{kl} = \min_{j} m_{kj} = \min_{j} \mathbb{E}(k,j) \Rightarrow k \in O_{r,M}$$

$$v_c(M) = m_{kl} \underset{\uparrow\, m_{kl} \in Saddle(M)}{=} \max_{i} m_{il} = \max_{i} \mathbb{E}(i,l) \Rightarrow l \in O_{c,M}$$

□



Γραμμές κ' στήλες κάτω από κυριαρχία.

Είναι δυνατό να υπάρχουν αμιγείς (καθαρές) στρατηγικές που ποτέ δεν θα παρουσιαστούν μέσα σε μια optimal μικτή στρατηγική. (θα "παρουσιάζονται" με πιθανότητα 0)

<u>Ορσ</u> (i) $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ η γραμμή i <u>κυριαρχεί</u> στη k εάν

$$m_{ij} \geq m_{kj} \quad , \forall\, 1 \leq j \leq n \iff i \underset{r}{\geq} k$$

(ii) η στήλη j κυριαρχεί στην ℓ εάν

$$m_{ij} \leq m_{i\ell} \quad (\Leftrightarrow -m_{ij} \geq -m_{i\ell}) \quad \forall\, 1 \leq i \leq m \iff j \underset{c}{\geq} \ell$$

Το να έχουμε optimal στρατηγικές (διακριτές κατανομές) με μηδενικές συν/τες είναι μάλλον ανούσιο. Έτσι αν $i \underset{r}{\geq} k$ αφαιρούμε την k γραμμή κ' αν $j \underset{c}{\geq} \ell$ αφαιρούμε από τον M την ℓ στήλη. Για παράδειγμα:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad -2} \\ 2 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix}, \ 2 \underset{r}{>} 1 \qquad m_{2j} \geq m_{1j}$$

$$\Sigma_{r,M} = \{1,2,3\} \qquad \Sigma_{c,M} = \{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow \quad M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{0} \\ -1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \ 2 \underset{c}{\geq} 3 \qquad -m_{i2} \geq -m_{i3}$$

$$\Sigma_{r,M'} = \{2,3\} \qquad \Sigma_{c,M'} = \{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_{r,M''} = \{2,3\} \quad \Sigma_{c,M''} = \{1,2\}}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Πριν μειώσουμε την διάσταση του παιγνίου (από $M \longmapsto M'$) δεν υπήρχε κυριαρχία στήλης σε άλλη στήλη!

έχουμε λοιπόν:

$$\left(\underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M} \ \underline{\text{και}} \ k \underset{r}{<} i\right) \Rightarrow (\underline{r})_k = 0 ,$$

$$\left(\underline{s} \in \mathcal{O}_{c,M} \ \underline{\text{και}} \ \ell \underset{c}{<} j\right) \Rightarrow (\underline{s})_\ell = 0 ,$$

κ' η λύση του παιγνίου (ορσ σελ. 75) δεν επηρεάζεται εαν απαλείψουμε κυριαρχούμενες γραμμές κ' στήλες

<u>Ορσ</u>: (i) Έστω μικτή στρατηγική $\underline{p}$ του row-παίκτη ($\underline{p} \in \mathcal{M}_{r,M}$) τότε η $i \in \Sigma_{r,M}$ <u>είναι ενεργή</u> (<u>active</u>) στην $\underline{p}$ εαν $(\underline{p})_i > 0$.

(ii) Έστω $\underline{s} \in \mathcal{M}_{r,M}$ τότε η $j \in \Sigma_{c,M}$, <u>είναι ενεργή</u> στην $\underline{s}$ εαν $(\underline{s})_j > 0$.

$$\Downarrow$$

Μια κυριαρχούμενη στρατηγική είναι ανενεργή σε μια βέλτιστη στρατηγική.

<u>Θεώρημα</u>: Εαν $v_r(M) = v_c(M)$ (<u>δηλ.</u> το minimax σε ισχύ) κ' $\underline{r} \in \mathcal{M}_{r,M}$, $\underline{s} \in \mathcal{M}_{c,M}$, τότε $\underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M}$ και $\underline{s} \in \mathcal{O}_{c,M}$ εαν κ' μονον εαν ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω δύο προτάσεις

(π_1): $\mathbb{E}(k, \underline{s}) < \max\limits_i \mathbb{E}(i, \underline{s})$ <u>και</u> ταυτόχρονα $(\underline{r})_k = 0$

(π_2): $\mathbb{E}(\underline{r}, \ell) > \min\limits_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)$ <u>και</u> ταυτόχρονα $(\underline{s})_\ell = 0$

Έστω ότι $\underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M}$, $\underline{s} \in \mathcal{O}_{c,M}$ και για $k \in \mathcal{I}$, $r_k = (\underline{r})_k > 0$ με $\mathbb{E}(k, \underline{s}) < \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s})$ τότε:

$$\mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \sum_i (\underline{r})_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \overbrace{(\underline{r})_k}^{>0} \underbrace{\mathbb{E}(k, \underline{s})}_{< \max_i \mathbb{E}(i,s)} + \sum_{i \notin \mathcal{I}} (\underline{r})_i \underbrace{\mathbb{E}(i, \underline{s})}_{= \max_i \mathbb{E}(i,s)}$$

$$< \left(\max_i \mathbb{E}(i, \underline{s})\right) \overbrace{\sum_{i=1}^{m} (\underline{r})_i}^{1} \overset{\underline{s} \in \mathcal{O}_{c,M}}{=} v_c(M) \quad \text{άτοπο.}$$

Παρατήρηση: (i) Εάν $\mathbb{E}(k, \underline{s}) < \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s})$, $\forall k \in \mathcal{I} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(i', \underline{s}) = \max_i \mathbb{E}(i, s), \ \forall i' \notin \mathcal{I}.$$

(ii) Εάν $\mathbb{E}(\underline{r}, \ell) > \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)$, $\forall \ell \in \mathcal{J} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\underline{r}, j') = \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j), \ \forall j' \in \mathcal{J}.$$

και πάλι εάν $\mathbb{E}(\underline{r}, \ell) > \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)$, $\forall \ell \in \mathcal{J}$ με $q_\ell = (\underline{s})_\ell > 0$

$$\mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \sum_j (\underline{s})_j \mathbb{E}(\underline{r}, j) = \sum_{\ell \in \mathcal{J}} \overbrace{(\underline{s})_\ell}^{>0} \underbrace{\mathbb{E}(\underline{r}, \ell)}_{> \min_j \mathbb{E}(r,j)} + \sum_{j' \notin \mathcal{J}} (\underline{s})_{j'} \underbrace{\mathbb{E}(r, j')}_{= \min_j \mathbb{E}(r,j)}$$

$$> \left(\min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)\right) \overbrace{\sum_{j=1}^{n} (\underline{s})_j}^{1} \overset{\underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M}}{=} v_r(M)$$

καταλήγουμε κ' πάλι σε άτοπο.

Αντίστροφα: Εάν ισχύει $\mathbb{E}(k, \underline{s}) < \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s})$, $\underline{s} \in \mathcal{M}_{c,M}$ $\forall k \in \mathcal{I}$ με $r_k = (\underline{r})_k = 0$, τότε:

$$\mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \sum_i (\underline{r})_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) = \sum_{i \notin \mathcal{I}} (\underline{r})_i \mathbb{E}(i, s) \overset{(i)}{=} \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) \geq$$

$$\geq \min_s \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) \equiv v_c(M) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) \geq v_c(M) \quad : (83.1)$$

ενώ εάν ισχύει $\mathbb{E}(\underline{r}, \ell) > \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)$

$\forall \ell \in \mathcal{J}$ με $s_\ell = (\underline{s})_\ell = 0$ τότε:

$$\mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \sum_j (\underline{s})_j \, \mathbb{E}(\underline{r}, j) = \sum_{j \notin \mathcal{J}} (\underline{s})_j \, \mathbb{E}(\underline{r}, j) \overset{(ii)}{=} \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j) \leq$$

$$\leq \max_{\underline{r}} \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j) \equiv v_r(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j) \leq v_r(M) \quad : (83.2)$$

$$(83.1)(83.2) \Rightarrow v_c(M) \leq \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) \leq v_r(M) \Rightarrow$$

$v_c(M) = v_r(M)$

$$\Rightarrow \quad v_c(M) = \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = v_r(M) \iff \underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M}, \ \underline{s} \in \mathcal{O}_{c,M}$$

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι $\mathbb{E}(\underline{p},\underline{q}) = \underline{p}\, M\, \underline{q}^T$

<u>όπου</u> $\underline{p} \in \mathbb{R}^{1\times m}$, $\underline{q} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\underline{q}^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\underline{p}\, M\, \underline{q}^T = (p_1 \cdots p_m) \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} p_i m_{i1} \cdots \sum_{i=1}^{m} p_i m_{m1} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i m_{ij} \right) q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j m_{ij} \equiv \mathbb{E}(\underline{p},\underline{q}).$$

∎

Άσκηση Δίνεται το matrix game

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εάν ο row παίκτης παίζει πάντα με στρατηγική $\underline{r} = \underline{e}_3$ ποιά θα πρέπει να είναι η στρατηγική του column παίκτη ?

$$\inf_{\underline{q}} (0 \;\; 0 \;\; 1)\, M \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \inf_{\underline{q}} \underbrace{q_1 + 2q_2 + q_3}_{q_3 = 1 - q_1 - q_2} =$$

$$= \inf_{\underline{q}} 1 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 0$$

$$q_3 = 1 - q_1, \quad \forall\, 0 \leq q_1 \leq 1$$

$$(0 \;\; 0 \;\; 1)\, M \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} = 1, \quad \forall\; q_1 \in [0,1]$$

$$(1 \;\; 0 \;\; 0)\, M \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 1-q \end{pmatrix} = 1, \quad \forall\; q \in [0,1]$$

$$u_r(M) = 1, \quad u_c(M) = 2$$

Άσκηση: Στο matrix game, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, δείξτε ότι το ζεύγος στρατηγικών $\underline{r} = (0,0,1)$ κ' $\underline{s} = (2/3, 0, 1/3)$ είναι optimal. Ποιά η λύση του παιχνιδιού;

(Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της σελ 81)

$$\mathbb{E}(1,\underline{s}) = \mathbb{E}((1,0,0),(2/3,0,1/3)) = (1,0,0)\, M \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathbb{E}(2,\underline{s}) = \mathbb{E}((0,1,0),(2/3,0,1/3)) = -1/3$$

$$\mathbb{E}(3,\underline{s}) = \mathbb{E}((0,0,1),(2/3,0,1/3)) = 1$$

$$\mathbb{E}(\underline{r},1) = \mathbb{E}((0,0,1),(1,0,0)) = (0,0,1)\, M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathbb{E}(\underline{r},2) = \mathbb{E}((0,0,1),(0\ 1\ 0)) = 2$$

$$\mathbb{E}(\underline{r},3) = \mathbb{E}((0\ 0\ 1)(0\ 0\ 1)) = 1$$

Παρατηρούμε ότι: (i) $\underbrace{\mathbb{E}(2,\underline{s})}_{-1/3} < \underbrace{\max_i \mathbb{E}(i,\underline{s})}_{1}$ και $(\underline{r})_2 = 0$

εδώ $I = \{2\}$ κ' $\forall i' \notin I$ $\mathbb{E}(i',\underline{s}) = \max_i \mathbb{E}(i,\underline{s})$

πράγματι $\mathbb{E}(1,\underline{s}) = \mathbb{E}(3,\underline{s}) = \max_i \mathbb{E}(i,\underline{s})$

(ii) $\overbrace{\mathbb{E}(\underline{r},2)}^{2} > \overbrace{\min_j \mathbb{E}(\underline{r},j)}^{1}$ και $(\underline{s})_2 = 0$

εδώ $J = \{2\}$ κ' $\forall j' \notin J$ $\mathbb{E}(\underline{r},j') = \min_j \mathbb{E}(\underline{r},j)$

πράγματι $\mathbb{E}(\underline{r},1) = \mathbb{E}(\underline{r},3) = \min_j \mathbb{E}(\underline{r},j)$

(i) κ' (ii) $\Rightarrow$ $\underline{r}$ κ' $\underline{s}$ óptimal,

ενώ η τιμή του παιχνιου είναι :

$$v(M) = \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = (0,0,1)\, M \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 1 = \max_i \mathbb{E}(i, \underline{s}) = \min_j \mathbb{E}(\underline{r}, j)$$

$\square$

Άσκηση Εάν $\underline{r}$ κ' $\underline{u}$ είναι optimal στρατηγικές του row παίκτη τότε και κάθε κυρτός γραμμικός συνδυασμός των $\underline{r}$ κ' $\underline{u}$ είναι optimal στρατηγική του row παίκτη.

Έστω $\underline{s}$ optimal στρατηγική του column παίκτη. Τότε

$$\mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = \mathbb{E}(\underline{u}, \underline{s}) = v_r(M) = v_c(M) = v(M) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\mathbb{E}(\underbrace{t\underline{r} + (1-t)\underline{u}}_{\alpha}, \underline{s}) = [t\underline{r} + (1-t)\underline{u}]\, M \underline{s}^T = t(\underline{r} M \underline{s}^T) + (1-t)(\underline{u} M \underline{s}^T)$$

όμως $\underline{r} M \underline{s}^T = \mathbb{E}(\underline{r}, \underline{s}) = v(M)$ και $\underline{u} M \underline{s}^T = \mathbb{E}(\underline{u}, \underline{s}) = v(M)$

και έτσι $\mathbb{E}(\underline{\alpha}, \underline{s}) = v(M) \Leftrightarrow \underline{\alpha}$ είναι optimal στρατηγική για κάθε $t \in [0,1]$.

$\square$

Άσκηση Έστω $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrix game κ' $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ τότε εάν $M' = (\alpha m_{ij} + c)$ έχουμε

$$v_r(M') = \alpha\, v_r(M) + c \qquad κ' \quad v_c(M') = \alpha\, v_c(M) + c.$$

Τι γίνεται όταν $\alpha < 0$?

$$\underline{p}\, M'\, \underline{q}^T = (p_1 \cdots p_m) \begin{pmatrix} \alpha m_{11} + c & \cdots & \alpha m_{1n} + c \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha m_{m1} + c & \cdots & \alpha m_{mn} + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(\alpha m_{i1} + c) \;\cdots\; \sum_{i=1}^{m} p_i(\alpha m_{in} + c) \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\alpha \sum_{i=1}^{m} p_i m_{i1} + c \;\cdots\; \alpha \sum_{i=1}^{m} p_i m_{in} + c \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\alpha \sum_{i=1}^{m} p_i m_{ij} + c \right) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j m_{ij} + c = \alpha\, \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) + c. \Rightarrow \boxed{\underline{p}\, M' \underline{q}^T = \alpha\, \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) + c}$$

$\underline{\underline{\alpha > 0}} \Rightarrow v_r(M') = \max\limits_{\underline{p}} \min\limits_{\underline{q}} \left(\alpha\, \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) + c \right) = \alpha \cdot \left(\max\limits_{\underline{p}} \min\limits_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) \right) + c$

$= \alpha \cdot v_r(M) + c.$

$\underline{\underline{\text{ομοίως}}}$: $v_c(M') = \alpha \cdot v_c(M) + c$ όταν $\alpha > 0$.

$\underline{\underline{\alpha < 0}} \Rightarrow v_r(M') = \max\limits_{\underline{p}} \min\limits_{\underline{q}} \left(-|\alpha|\, \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) + c \right) =$

$= -|\alpha| \cdot \min\limits_{\underline{p}} \max\limits_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) + c \quad : (87.1)$

Παρατηρούμε ότι <u>στην ειδική περίπτωση που</u>: $M = M^T$ θα έχουμε: $\mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{p} M \underline{q}^T = (\underline{p} M \underline{q}^T)^T = \underline{q} M^T \underline{p}^T = \underline{q} M \underline{p}^T = \mathbb{E}(\underline{q}, \underline{p})$
(τότε το $\mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q})$ είναι μια τετραγωνική μορφή) και

$\min\limits_{\underline{p}} \max\limits_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{p}, \underline{q}) = \min\limits_{\underline{p}} \max\limits_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{q}, \underline{p}) = v_c(M)$

<u>δηλαδή</u> μόνο όταν $M = M^T$ κ' $\alpha < 0 \overset{(87.1)}{\Rightarrow} v_r(M') = \alpha \cdot v_c(M) + c.$

αντίστοιχα θα έχουμε ότι: $v_c(M') = \alpha\, v_r(M) + c$

Άσκηση: Δείξτε ότι οι μικτές στρατηγικές

$$\underline{p} = \left(5/52,\ 0,\ 11/52,\ 17/26,\ 1/26\right)$$

$$\underline{q} = \left(21/52,\ 3/13,\ 0,\ 3/52,\ 4/13\right)$$

είναι optimal στρατηγικές για το $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ποια η αναμενόμενη τιμή του παιγνίου;

i	$\mathbb{E}(i, \underline{q})$
1	$19/52$
2	$-12/13$
3	$19/52$
4	$19/52$
5	$19/52$

j	$\mathbb{E}(\underline{p}, j)$
1	$19/52$
2	$19/52$
3	$29/26$
4	$19/52$
5	$19/52$

<u>όμως</u>:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{E}(2, \underline{q}) = -12/13 < \max\limits_{i} \mathbb{E}(i, \underline{q}) = 19/52 & \text{και } (\underline{p})_2 = 0 \\ \mathbb{E}(\underline{p}, 3) = 29/26 > \min\limits_{j} \mathbb{E}(\underline{p}, j) = 19/52 & \text{και } (\underline{q})_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p} \in \mathcal{O}_{r,M} \text{ και } \underline{q} \in \mathcal{O}_{c,M} \Rightarrow$$

$$v(M) = \underline{p} M \underline{q}^T = 19/52. \qquad \blacksquare$$

ΜΙΚΡΑ ΠΑΙΓΝΙΑ (Small games)

<u>Ορσ:</u> Τα μικρά παίγνια είναι matrix games της μορφής, $M \in \mathbb{R}^{2\times n}$ είτε $M \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, όπου δηλαδή τουλάχιστον ένας παίκτης <u>έχει μόνο 2</u> καθαρές στρατηγικές.

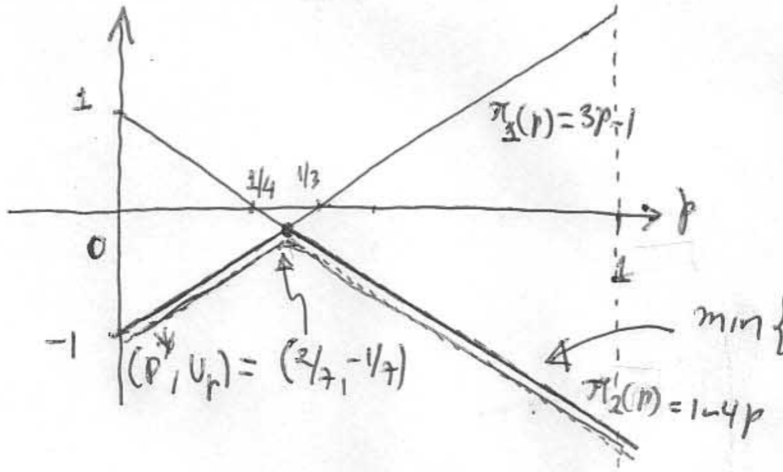
<u>Παράδειγμα:</u> Το παίγνιο $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ δεν έχει σαγματικά σημεία

$$v_r(M) = \max_{\underline{p}} \min_{j} \mathbb{E}(\underline{p}, j) = \max_{\underline{p}} \min \{\mathbb{E}(\underline{p},1), \mathbb{E}(\underline{p},2)\}$$

$$= \max_{0\le p\le 1} \min \{\mathbb{E}((p,1-p),(1,0)), \mathbb{E}((p,1-p),(0,1))\}$$

<u>θέτουμε:</u>
$$\begin{cases} \pi_1(p) = \mathbb{E}((p,1-p),(1,0)) = (p,1-p)M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3p-1 \\ \pi_2(p) = \mathbb{E}((p,1-p),(0,1)) = (p,1-p)M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1-4p \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_r(M) = \max_{0\le p\le 1} \min\{\pi_1(p), \pi_2(p)\} = \pi_1(2/7) = \pi_2(2/7) = -1/7 \Rightarrow$$



$\Rightarrow \underline{p} = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$ είναι optimal μικτή στρατηγική για τον τον παίκτη.

$$\min\{\pi_1(p), \pi_2(p)\} = \begin{cases} 3p-1, & 0\le p\le 2/7 \\ 1-4p, & 2/7\le p\le 1 \end{cases}$$

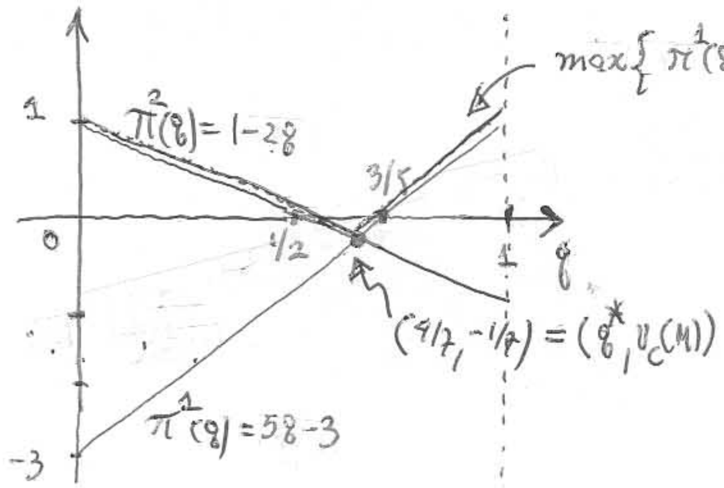
$$v_c(M) = \min_{\underline{q}} \max_{i} \mathbb{E}(i, \underline{q}) = \min_{0\le q\le 1} \max\{\mathbb{E}((1,0),(q,1-q)), \mathbb{E}((0,1),(q,1-q))\}$$

<u>θέτουμε:</u>
$$\begin{cases} \pi^1(q) = \mathbb{E}((1,0),(q,1-q)) = 5q-3 \\ \pi^2(q) = \mathbb{E}((0,1),(q,1-q)) = 1-2q \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_c(M) = \min_{0 \le q \le 1} \max\{ \pi^1(q), \pi^2(q) \} = \pi^1(4/7) = \pi^2(4/7) = -1/7$$

δηλαδή η μικτή στρατηγική $\underline{q} = (4/7, 3/7)$ είναι optimal για τον column παίκτη.

<u>παρατηρούμε ότι:</u> $v_r(M) = -1/7 = v_c(M) = \mathbb{E}((2/7, 5/7), (4/7, 3/7))$



$$\max\{\pi^1(q), \pi^2(q)\} = \begin{cases} 1-2q, & 0 \le q \le 4/7 \\ 5q-3, & \frac{4}{7} \le q \le 1 \end{cases}$$

$\square$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $M = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$ κ' $Saddle(M) = \emptyset$, τότε

(i) οι ευθείες $\pi_1(p)$ κ' $\pi_2(p)$ τέμνονται στο $(0,1)$ κ' $\pi_1(p^*) = \pi_2(p^*) = v_r(M)$ (ii) Αντίστοιχα οι ευθείες $\pi^1(q)$ κ' $\pi^2(q)$ τέμνονται στο $(0,1)$ κ' $\pi^1(q^*) = \pi^2(q^*) = v_c(M)$

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω ότι οι π_1 κ' π_2 δεν τέμνονται στο $(0,1)$, τότε $\pi_1(p) > \pi_2(p)$ <u>είτε</u> $\pi_1(p) < \pi_2(p)$, $\forall p \in [0,1]$.

Εάν $\pi_1(p) > \pi_2(p) \Leftrightarrow \mathbb{E}((p, 1-p), (1,0)) > \mathbb{E}((p, 1-p), (0,1)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha p + c(1-p) > bp + d(1-p) \Rightarrow \begin{cases} c > d, & p = 0 \\ \alpha > b, & p = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{b, d\} \in Saddle(M)$: <u>άτοπο</u> διότι $Saddle(M) = \emptyset$.

Εαν υποθέταμε ότι $\pi_1(p) < \pi_2(p)$ κ' πάλι θα καταλήγαμε σε άτοπο.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι π_1 κ' π_2 τέμνονται στο $(0,1)$, $\pi_1(p^*) = \pi_2(p^*)$ έτσι ώστε $p^* \in (0,1)$. Θα δείξουμε ότι στο p^* η συν/ση $\min\{\pi_1(p), \pi_2(p)\}$ παίρνει μέγιστη τιμή.

Έστω ότι $\pi_1(p) < \pi_2(p) \quad \forall p \in [0, p^*) \overset{p=0}{\Rightarrow} c < d$

εαν $\alpha - c \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq c$

$\Big\} \Rightarrow c \in \text{Saddle}$ άτοπο

δηλαδή εαν $\pi_1(p) < \pi_2(p)$ θα πρέπει $\alpha > c \quad : (91.0)$

κ' η κλίση του $\pi_1(p) = (\alpha - c)p + c$ είναι θετική : (91.1)

Η κλίση της ευθείας π_2 θα πρέπει να είναι αρνητική : (91.2)

$(\pi_2(p) = (b-d)p + d)$ διότι αν ήταν μη αρνητική, θα είχαμε $b \geq d \underset{(91.0)}{\Longrightarrow} \min\{\alpha, b\} \in \text{Saddle}(M)$ άτοπο

$$(91.1)(91.2) \Rightarrow \max_{0 \leq p \leq 1} \min\{\pi_1(p), \pi_2(p)\} = \pi_1(p^*) = \pi_2(p^*)$$

(ομοίως η (ii)). $\square$

Άσκηση :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή του παιχνιδιού. Ποιές οι optimal στρατηγικές για row κ' column παίκτες?

Είναι προφανές ότι Saddle(M) = ∅. Παρατηρούμε ότι η γραμμή 2 κυριαρχείται από την 1 κ' την απαλείφουμε

$1 \underset{r}{>} 2$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \underset{c}{>} 3$ στο M' η στήλη 3 κυριαρχείται από την στήλη 1 κ' την απαλείφουμε

Έτσι παίρνουμε: $M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ με $\begin{cases} \pi_1(p) = 2p - 1 \\ \pi_2(p) = -2p + 2 \end{cases}$ και

$$\begin{cases} \pi^1(q) = q \\ \pi^2(q) = -3q + 2 \end{cases}$$

δηλαδή: $\left.\begin{array}{l} \pi_1(3/4) = \pi_2(3/4) = 1/2 = v_r(M) \\ \pi^1(1/2) = \pi^2(1/2) = 1/2 = v_c(M) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v(M) = 1/2 = v_r(M) = v_c(M)}$$

Οι optimal στρατηγικές είναι:

$$\begin{array}{l} \underline{p}'' = (3/4, 1/4) \in \mathcal{O}_{r,M''} \\ \underline{q}'' = (1/2, 1/2) \in \mathcal{O}_{c,M''} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{p} = (3/4, 0, 1/4) \in \mathcal{O}_{r,M} \\ \underline{q} = (1/2, 1/2, 0) \in \mathcal{O}_{c,M} \end{array}$$

□

ΛΥΣΗ ΜΙΚΡΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΓΙΑ $n, m > 2$

Όταν έχουμε $M \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ ή $M \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ κ' $n, m > 2$ η λύση είναι συνδυασμός της προηγούμενης "γραφικής μεθόδου" κ' του θεωρήματος στην σελίδα 81

Παράδειγμα (2x3) $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Saddle(M) = ∅

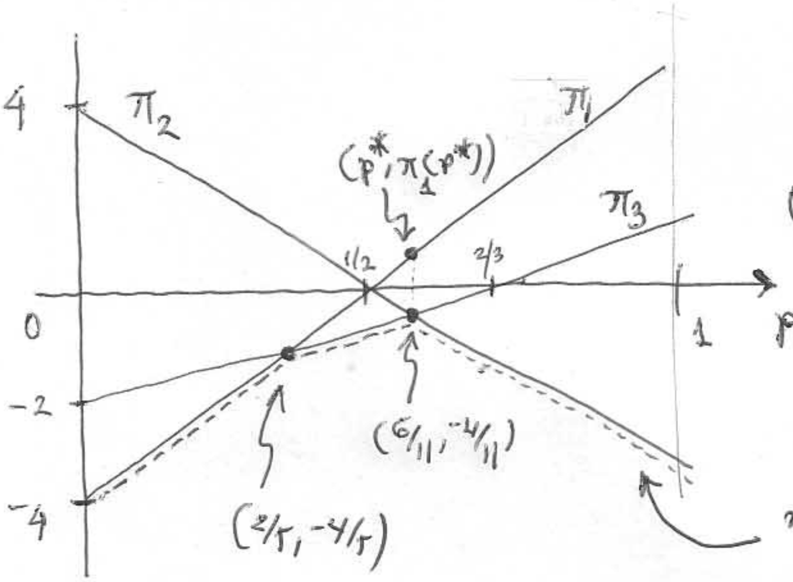
Εδώ δεν μπορούμε να μειώσουμε την διάσταση του παιγνίου εφόσον δεν έχουμε κανενός είδους κυριαρχία.

$$v_r(M) = \max_{\underline{p}} \min_{j} \mathbb{E}(\underline{p}, j) = \max_{0 \le p \le 1} \min\{\pi_1(p), \pi_2(p), \pi_3(p)\}$$

$$\pi_1(p) = \mathbb{E}\big((p, 1-p), (1,0,0)\big) = (p, 1-p)\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8p-4$$

$$\pi_2(p) = \mathbb{E}\big((p, 1-p), (0,1,0)\big) = -8p+4$$

$$\pi_3(p) = \mathbb{E}\big((p, 1-p), (0,0,1)\big) = 3p-2$$



$$U_r(M) = \max_{0 \le p \le 1} \min_{j} \pi_j(p) = \pi_2(6/11) = \pi_3(6/11) = -\frac{4}{11}$$

p^*

$\Uparrow$

$$\min_{j} \pi_j(p) = \begin{cases} \pi_1(p), & 0 \le p \le 2/5 \\ \pi_3(p), & 2/5 \le p \le 6/11 \\ \pi_2(p), & 6/11 \le p \le 1 \end{cases}$$

$$\pi_1(p^*) > \min_{j} \pi_j(p^*) \Leftrightarrow \mathbb{E}\big((p^*, 1-p^*), (1,0,0)\big) > \min_{j} \mathbb{E}(\underline{p}^*, j) \overset{(\Theta.\ \sigma\varepsilon\lambda\ 81)}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow$ { Η στήλη 1 θα είναι ανενεργή σε κάθε optimal στρατηγική του column παίκτη. $\Rightarrow (\underline{q})_1 = 0$: (93.1)

$$U_c(M) = \min_{\underline{q}} \max_{i} \mathbb{E}(i, \underline{q}) = \min_{\underline{q}} \max \Big\{ \overbrace{\mathbb{E}\big((1,0), (q_1, q_2, 1-q_1-q_2)\big)}^{\pi^1(q_1, q_2)}, \underbrace{\mathbb{E}\big((0,1), (q_1, q_2, 1-q_1-q_2)\big)}_{\pi^2(q_1, q_2)} \Big\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi^1(q_1, q_2) = 3q_1 - 5q_2 + 1 \\ \pi^2(q_1, q_2) = -2q_1 + 6q_2 - 2 \end{cases}$$

(93.1) $\Rightarrow$ Θέτουμε $q_1 = 0$ τότε:

$$v_c(M) = \min_{0 \le q_2 \le 1} \max\{1 - 5q_2, 6q_2 - 2\} = -\frac{4}{11}, \quad q_2^* = \frac{3}{11}$$

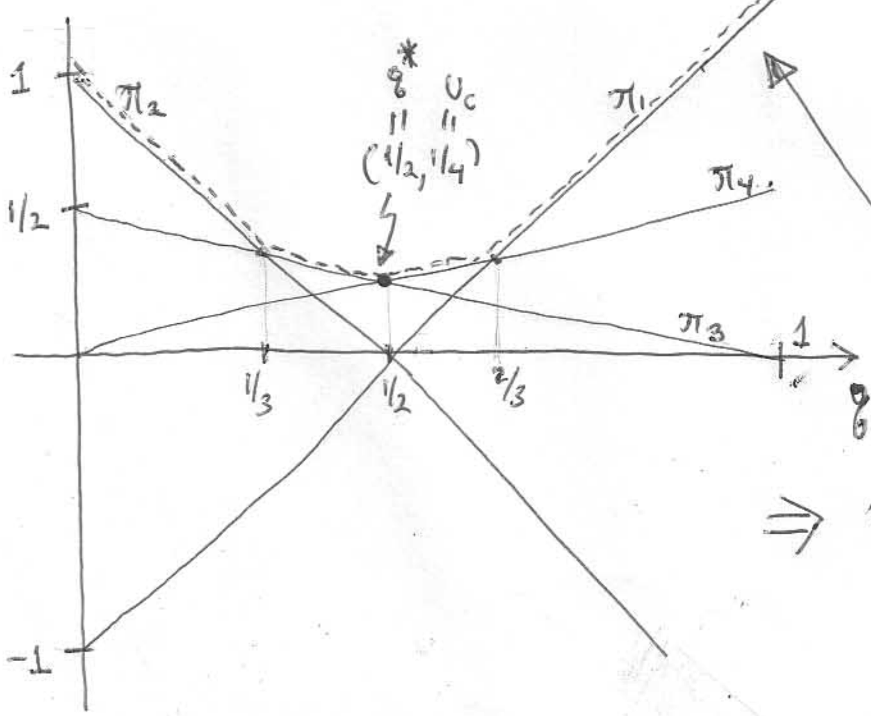
Δηλ. η optimal στρατηγική του column παίκτη θα είναι $\underline{q} = (0, \frac{3}{11}, \frac{8}{11})$ ενώ η optimal του row $\underline{p} = (\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$ κ' η τιμή του παιγνίου $v(M) = -4/11 = v_r(M) = v_c(M)$ $\square$

Παράδειγμα (4x2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή $n=2$, η γραφική μέθοδος εφαρμόζεται στον column παίκτη.

$$v_c(M) = \min_{\underline{q}} \max_i \mathbb{E}(i, \underline{q}) = \min_{0 \le q \le 1} \left\{ \max_{1 \le i \le 4} \pi^i(q) \right\}$$



$$\pi^1(q) = 2q - 1$$
$$\pi^2(q) = -2q + 1$$
$$\pi^3(q) = -q/2 + 1/2$$
$$\pi^4(q) = q/2$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_i \pi^i(q) = \begin{cases} \pi_2(q), & 0 \le q \le 1/3 \\ \pi_3(q), & 1/3 \le q \le 1/2 \\ \pi_4(q), & 1/2 \le q \le 2/3 \\ \pi_1(q), & 2/3 \le q \le 1 \end{cases}$$

$$v_c(M) = \underset{\overset{\shortparallel}{g^*}}{\pi^3(1/2)} = \pi^4(1/2) = 1/4$$

Παρατηρούμε ότι:
$$\left.\begin{aligned} 0 &= \pi^1(g^*) < \max_i \pi^i(g^*) = 1/2 \\ 0 &= \pi^2(g^*) < \max_i \pi^i(g^*) = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Οι γραμμές 1 κ' 2 θα είναι} \\ \text{ανενεργές σε κάθε optimal} \\ \text{strategy του row παίκτη.} \end{array} \right. \Leftrightarrow (\underline{p})_1 = (\underline{p})_2 = 0$

$$v_r(M) = \max_{\underline{p}} \min_{1 \le j \le 2} \mathbb{E}(\underline{p}, j) = \max_{\underline{p}} \min \{ \underbrace{\mathbb{E}(\underline{p}, (1,0))}_{\pi_1(\underline{p})}, \underbrace{\mathbb{E}(\underline{p}, (0,1))}_{\pi_2(\underline{p})} \}$$

$$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3, 1-p_1-p_2-p_3)$$

$$\pi_1(p) = (p_1, p_2, p_3, 1-p_1-p_2-p_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+p_1-3p_2-p_3}{2}$$

$$\pi_2(p) = \frac{-2p_1+2p_2+p_3}{2}$$

$$\Downarrow (p_1 = p_2 = 0)$$

$$v_r(M) = \max_{0 \le p_3 \le 1} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{p_3}{2}, \frac{p_3}{2} \right\} = 1/4, \quad p_3^* = 1/2$$

Τελικά:
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{p} = (0, 0, 1/2, 1/2) \in \mathcal{O}_{r,M} \\ \underline{g} = (1/2, 1/2) \in \mathcal{O}_{c,M} \\ v(M) = 1/4 \end{array} \right.$$

□

Ορσ Ένα matrix game είναι τίμιο εάν έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή, δηλαδή, $v_r(M)=v_c(M)=v(M)=0$. Ενώ ευνοεί τον row παίκτη εάν $v(M)>0$ και ευνοεί τον column παίκτη εάν $v(M)<0$.

Άσκηση: Έστω το matrix game $M(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Πότε το παίγνιο είναι τίμιο, πότε ευνοεί τον row ή τον column παίκτη.

(i) $1\leq\alpha\leq 2 \Rightarrow \alpha\in \mathrm{Saddle}(M)$

(ii) $\alpha\geq 2 \Rightarrow 2\in \mathrm{Saddle}(M)$

(iii) $\alpha<1 \Rightarrow \mathrm{Saddle}(M)=\emptyset$

$$v_r(M)=\max_{\underline{p}}\min_{j}\mathbb{E}(\underline{p},j) = \max_{0\leq p\leq 1}\min\{\pi_1(p),\pi_2(p)\}$$

$\underline{p}=(p,1-p)$

$$\pi_j(p)=(p,1-p)M\underline{e}_j^T = \begin{cases}(\alpha-1)p+1, & j=1\\ 3p-1, & j=2\end{cases}$$

$$\pi_1(p^*)=\pi_2(p^*) \Rightarrow p^*=\frac{2}{4-\alpha} \Rightarrow v_r(M)=\pi_j(p^*)=\frac{2+\alpha}{4+\alpha}$$

$$v_c(M)=\min_{\underline{q}}\max_{i}\mathbb{E}(i,\underline{q}) = \min_{0\leq q\leq 1}\max\{\pi^1(q),\pi^2(q)\}$$

$\underline{q}=(q,1-q)$

$$\pi^i(q)=\underline{e}_i M\underline{q}^T = \begin{cases}(\alpha-2)q+2, & i=1\\ 2q-1, & i=2\end{cases}$$

$$\pi^1(q^*)=\pi^2(q^*) \Rightarrow q^*=\frac{3}{4-\alpha} \Rightarrow v_c(M)=\pi^i(q^*)=\frac{2+\alpha}{4+\alpha}$$

Επομένως έχουμε $v(M) = v_r(M) = v_c(M) = \frac{2+a}{4+a}$, $\alpha < 1$

$v(M) = 0 \Rightarrow \alpha = -2$

$v(M) < 0 \Leftrightarrow -4 < \alpha < -2$

$v(M) > 0 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 1$ είτε $\alpha < -4$

$\square$

<u>Άσκηση</u>: Το ίδιο όπως κ' στην προηγούμενη άσκηση, αλλά για $M(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Άσκηση</u>: Να λυθούν τα μικρά παίγνια:

(i) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Συμμετρικά Παίγνια

Ένα matrix game είναι κ' συμμετρικό όταν η εναλλαγή του ρόλου των παικτών, <u>δεν απαιτεί</u> από τους παίκτες αλλαγή των <u>optimal</u> στρατηγικών τους.

<u>Παραδείγματα συμμ. matrix παιγνίων</u>:

(i) Το παίγνιο στην σελ. 10 (2-fingers-morra) <u>είναι</u> συμμετρικό

(ii) Το παίγνιο στην σελ. 51 (πέτρα-ψαλίδι-χαρτί) <u>είναι</u> συμμετρικό

(iii) Το σκάκι <u>δεν είναι</u> συμμετρικό εφόσον τα άσπρα πιόνια κινούνται πάντα πρώτα.

Στις παραπάνω 2 συμμετρικές περιπτώσεις έχουμε

(i) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} : (98.1)$ [σελ 51]

(ii) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} : (98.2)$ [σελ 53]

<u>Παρατηρήσεις</u> (i) Σε ένα συμμετρικό παίγνιο M = τετραγωνικός κ' αντισυμμετρικός <u>δηλ</u> $M = -M^T$ από όπου $m_{ii} = 0, \ \forall i$

(ii) Διαισθητικά υποπτευόμαστε ότι θα πρέπει το συμμετρικό παίγνιο να είναι κ' τίμιο

<u>Θεώρημα</u>: Τα συμμετρικά matrix games είναι τίμια (δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε $v_r(M) = v_c(M) = v(M) = 0$ ακριβώς όταν $M = -M^T$)

$$\underline{E}(\underline{p}, \underline{q}) = \underline{p} M \underline{q}^T = (\underline{p} M \underline{q}^T)^T = \underline{q} M^T \underline{p}^T = -\underline{q} M \underline{p}^T = -\underline{E}(\underline{q}, \underline{p}) : (98.3)$$

$$v_r(M) = \max_{\underline{p}} \min_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{p},\underline{q}) \overset{(98.3)}{=} \max_{\underline{p}} \left\{ - \max_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{q},\underline{p}) \right\}$$

$$= - \min_{\underline{p}} \max_{\underline{q}} \mathbb{E}(\underline{q},\underline{p}) = - v_c(M) \quad : (99.1)$$

Από το minimax θεώρημα $v_r(M) = v_c(M) \overset{(99.1)}{\Rightarrow} v_c(M) = 0$

$\Rightarrow v_r(M) = v_c(M) = v(M) = 0.$ □

<u>Άσκηση</u> Δείξτε σε symmetric matrix games εάν $\underline{r}$ είναι optimal στρατηγική του row παίκτη τότε $\underline{r}$ είναι κ' optimal στρατηγική του column παίκτη.

$$\underline{r} \in \mathcal{O}_r(M) \Leftrightarrow v_r(M) = \min_j \mathbb{E}(\underline{r},j) \overset{(98.3)}{=} \min_j \left(-\mathbb{E}(j,\underline{r})\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} = -\max_j \mathbb{E}(j,\underline{r}) \overset{m=n}{=} -\max_i \mathbb{E}(i,\underline{r}) \\ (99.1) \Rightarrow v_r(M) = -v_c(M) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c(M) = \max_i \mathbb{E}(i,\underline{r}) \Leftrightarrow \underline{r} \in \mathcal{O}_{r,M}$$

□

ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ MATRIX GAMES

Εάν $\underline{r} \in \mathcal{O}_r(M) \Leftrightarrow v_r(M) = \min_j \mathbb{E}(\underline{r},j) = 0$ (από το προηγ. θεώρημα)

κ' επειδή $(m=n)$ $\mathbb{E}(\underline{r},j) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{r})_i \mathbb{E}(i,j) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{r})_i m_{ij}$ θα πρέπει

$$\mathbb{E}(\underline{r}, j) = \sum_{i=1}^{n} (\underline{r})_i \cdot m_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$$

(κ' θα υπάρχουν j^* για τα οποία $\mathbb{E}(\underline{r}, j^*) = 0 = \min_{j} \mathbb{E}(\underline{r}, j)$)

Για παράδειγμα: (i) Έστω $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (M^T = -M) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\underline{r}, j) = \underline{r} M \underline{e}_j^T = (r_1 \;\; r_2 \;\; r_3) M \underline{e}_j^T =$$

$$= (r_2 - 2r_3, -r_1 + 3r_3, 2r_1 - 3r_2) \cdot \underline{e}_j^T = \begin{cases} r_2 - 2r_3 & ; j = 1 \\ -r_1 + 3r_3 & ; j = 2 \\ 2r_1 - 3r_2 & ; j = 3 \end{cases} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_2 - 2r_3 \geq 0 & (1) \; * \\ -r_1 + 3r_3 \geq 0 & (2) \; * \\ 2r_1 - 3r_2 \geq 0 & (3) \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1 & (4) \; * \\ r_1 \geq 0 & (5) \\ r_2 \geq 0 & (6) \\ r_3 \geq 0 & (7) \end{cases}$$

Κάνοντας (1) κ' (2) ισότητες $\xRightarrow{(4)}$ $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/3$, $r_3 = 1/6$

$\underbrace{(3), (5), (6), (7)}_{\text{ικανοποιούνται}}$ $\square$

(ii) Έστω $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} r_2 \qquad + r_4 \geq 0 & :(1) \\ -r_1 \quad + r_3 - 2r_4 \geq 0 & :(2) \\ -r_2 \qquad + 2r_4 \geq 0 & :(3) \\ -r_1 + 2r_2 - 2r_3 \qquad \geq 0 & :(4) \end{array}\right\} \Leftarrow \underline{r} M \underline{e}_j^T \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1 \quad :(5)$$

$$r_j \geq 0 \quad :(6)$$

Εαν κάναμε την (1) ισότητα θα είχαμε $r_2 + r_4 = 0 \underset{r_j \geq 0}{\Longrightarrow} r_2 = r_4 = 0 \underset{(4)}{\Longrightarrow} r_1 + 2r_3 \leq 0 \underset{r_j \geq 0}{\Longrightarrow} r_1 = r_3 = 0$ $\Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ <u>άτοπο</u>

$\Downarrow$

<u>Θα πρέπει λοιπόν</u>: $r_2 + r_4 > 0 \quad :(1')$

Κάνοντας τις (2), (3) κ' (4) ισότητες $\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ $r_1 = 0$, $r_2 = 2/5$, $r_3 = 2/5$, $r_4 = 1/5$

Που ικανοποιούν (1') κ' (6) □

<u>(iii)</u> Έστω $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} r_2 \qquad - r_4 \geq 0 & :(1) \\ -r_1 \quad + 2r_3 \qquad \geq 0 & :(2) \\ -2r_2 \qquad + 2r_4 \geq 0 & :(3) \\ r_1 \quad - 2r_3 \qquad \geq 0 & :(4) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)(3) \Rightarrow r_2 = r_4 \\ (2)(4) \Rightarrow r_1 = 2r_3 \end{array}\right\} \overset{\sum_j r_j = 1}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} r_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} r_4 \\ r_1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} r_4 \\ r_2 = r_4 \end{array}$$

Δηλαδή έχουμε ∞ λύσεις, μία για $\forall r_4 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $\square$
(διότι: $0 \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}r_4 \leq 1$, $0 \leq \frac{2}{3} - \frac{4}{3}r_4 \leq 1$)

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι το 2-finger-morra έχει ∞ λύσεις

$$(98.2) \Rightarrow \begin{array}{rlr} -2r_2 + 3r_3 & \geq 0 & :(1) \\ 2r_1 \qquad\qquad -3r_4 & \geq 0 & :(2) \\ -3r_1 \qquad\qquad 4r_4 & \geq 0 & :(3) \\ 3r_2 - 4r_3 & \geq 0 & :(4) \\ \sum_{j=1}^{4} r_j & = 1 & :(5) \\ r_j & \geq 0 & :(6) \end{array}$$

θέτω (2) κ' (3) ισότητες $\Leftrightarrow r_1 = r_4 = 0 \overset{(1)(4)(5)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2r_2 + 3r_3 \geq 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} 3r_2 - 4r_3 \geq 0 \\ r_2 + r_3 = 1 \end{array}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{4r_3}{3} \leq r_2 \leq \frac{3r_3}{2} \\ r_3 = 1 - r_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{4r_2}{3} \leq r_2 \leq \frac{3}{2} - \frac{3r_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq r_2 \leq \frac{3}{5}$$

<u>πιο συγκεκριμένα</u>: $r_2 = 4/7$, $r_3 = 3/7 \Rightarrow \begin{cases} -2r_2 + 3r_3 > 0 \\ 3r_2 - 4r_3 = 0 \end{cases}$

$r_2 = 3/5$, $r_3 = 2/5 \Rightarrow \begin{cases} -2r_2 + 3r_3 = 0 \\ 3r_2 - 4r_3 > 0 \end{cases}$

$\frac{4}{7} < r_2 < \frac{3}{5}$, $r_3 = 1 - r_2 \Rightarrow \begin{cases} -2r_2 + 3r_3 > 0 \\ 3r_2 - 4r_3 > 0 \end{cases}$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι το πέτρα-ψαλίδι-χαρτί έχει μοναδική λύση.

$$(98.1) \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} r_2 - r_3 \geq 0 & :(1) \\ -r_1 + r_3 \geq 0 & :(2) \\ r_1 - r_2 \geq 0 & :(3) \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1 & :(4) \\ r_j \geq 0 & :(5) \end{array}$$

Η μοναδική λύση βρίσκεται εάν κάνουμε (1), (2) κ' (3) ισότητες. Τότε: (4) $\Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$.

□

<u>Άσκηση</u>: Να λυθεί το $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$4 \underset{c}{\geq} 2 \Rightarrow 4 \underset{r}{>} 2$

(Υπάρχει κυριαρχία $\Rightarrow$ μειώστε την διάσταση σε 3×3)

□

<u>Άσκηση</u>: Να λυθεί το $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(Υπάρχει κυριαρχία που κάνει το παίγνιο $\overset{4\times4}{\text{συμμετρικό}}$)

□