Υπολογισμός της τιμής πολυωνύμου κ' των παραγώγων του σε γνωστό σημείο x_0 κ' το σύνθετο σχήμα Horner.

Τα πολυώνυμα παίζουν θεμελιώδη ρόλο στην θεωρία της Α.Α. γιατί με αυτά μπορούμε να προσεγγίσουμε τις περισσότερες γνωστές συν/σης.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad a_i \in \mathbb{R}$$

με $a_0 \neq 0 \Rightarrow \partial p$ = βαθμός του $p = n$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά την τιμή του p στο x_0 = γνωστός αριθμός δηλαδή

$$p(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^{n-k} = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n$$

<u>**1^ος^ τρόπος**</u> :

$a_0 x_0 \to a_0 x_0^2 \to \dots \to a_0 x_0^n$: $\underline{n}$ πολ/σμοί

$a_1 x_0 \to a_1 x_0^2 \to \dots \to a_1 x_0^{n-1}$: $\underline{n-1}$ πολ/σμοί

$\vdots$

$a_{n-2} x_0 \to a_{n-2} x_0^2$: $\underline{2}$ πολ/σμοί

$a_{n-1} x_0$: $\underline{1}$ πολ/σμός

$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-2} x_0^2 + a_{n-1} x_0 + a_n$: $\underline{n}$ προσθέσεις

<u>έτσι έχουμε ότι</u> :

$\# p(x_0)_1$ = αριθμός των πράξεων για τον υπολογισμό του $p(x_0)$ με τον 1^ο^ τρόπο $= (1+2+\dots+n)$ πολ/σμοί $+ (n)$ προσθ. $= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ πολ/σμοί $+ (n)$ προσθέσεις.

2^{os} τρόπος

$$x_0 \to x_0^2 \to x_0^3 \to \cdots \to x_0^n \quad : \underline{n-1} \text{ πολ/σμοί}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$\alpha_{n-1}x_0 \quad \alpha_{n-2}x_0^2 \quad \alpha_{n-3}x_0^3 \quad \cdots \quad \alpha_0 x_0^n \quad : \underline{n} \text{ πολ/σμοί}$$

$$p(x_0) = \alpha_0 x_0^n + \alpha_1 x_0^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x_0 + \alpha_n \quad : \underline{n} \text{ προσθέσεις.}$$

$$\# p(x_0)_2 = (2n-1) \text{ πολ/σμοί} + (n) \text{ προσθέσεις.}$$

3^{os} τρόπος

Έστω ότι $q(x) = \beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}$,

είναι το πολ/μο με την ιδιότητα $p(x) = (x - x_0)\,q(x) + r$ (14.1)

τότε $\boxed{p(x_0) = r}$ = το υπόλοιπο της διαίρεσης του $p(x)$ με το πολ/μο $x - x_0$

$$(14.1) \Rightarrow p(x) \equiv \beta_0 x^n + (\beta_1 - \beta_0 x_0)x^{n-1} + (\beta_2 - \beta_1 x_0)x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + (\beta_{n-1} - \beta_{n-2}x_0)x + (r - \beta_{n-1}x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \alpha_0 \\ \beta_1 - \beta_0 x_0 = \alpha_1 \\ \beta_2 - \beta_1 x_0 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \beta_{n-2}x_0 = \alpha_{n-1} \\ r - \beta_{n-1}x_0 = \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_0 = \alpha_0 \\ \beta_1 = \alpha_1 + \beta_0 x_0 & : \underline{1} \text{ πολ/μός}, \underline{1} \text{ προσ.} \\ \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 x_0 & : \underline{1} \text{ πολ/μος}, \underline{1} \text{ προσ.} \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \beta_{n-2}x_0 & : \underline{1} \text{ πολ/μος}, \underline{1} \text{ προσ.} \\ r = \alpha_n + \beta_{n-1}x_0 & : \underline{1} \text{ πολ/μος}, \underline{1} \text{ προσ.} \end{cases}$$

$$\# p(x_0)_3 = (n) \text{ πολ/σμοί} + (n) \text{ προσθέσεις}$$

> Ο αλγόριθμος του Horner δίνεται από την αναδρομική σχέση
> $$\beta_i = \alpha_i + \beta_{i-1}x_0, \quad i = 0(1)n \qquad (14.2)$$
> $$\beta_{-1} \equiv 0, \quad \beta_n \equiv r \equiv p(x_0)$$

Άσκηση 4 Δ.ο'. $\#p(x_0)_1 > \#p(x_0)_2 > \#p(x_0)_3 \quad , \forall n>2$

Σχηματικά η αναδρομική σχέση (14.2) δίνεται από την παρακάτω διάταξη

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\
x_0 & \downarrow & \beta_0 x_0 & \beta_1 x_0 & \cdots & \beta_{n-2} x_0 & \beta_{n-1} x_0 \\
\hline
 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \equiv r \equiv p(x_0) \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
 & \alpha_0 & \alpha_1+\beta_0 x_0 & \alpha_2+\beta_1 x_0 & & \alpha_{n-1}+\beta_{n-2}x_0 & \alpha_n+\beta_{n-1}x_0
\end{array}
\quad : (15.1)
$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το $p(-2)$ εάν
$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$.

Εδώ $x_0 = -2$

$$
(15.1) \Rightarrow
\begin{array}{c|cccccc}
 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & & -6 & 12 & -20 & 40 & -82 \\
\hline
 & 3 & -6 & 10 & -20 & 41 & -82
\end{array}
\Rightarrow \boxed{p(-2) = -82}
$$

Παρατηρούμε ότι: $p(x) = (x+2)(3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 20x + 41) - 82$

$\square$

Ο υπολογισμός των παραγώγων του $p(x)$ στο $x = x_0$

$$p(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n \quad , \alpha_0 \neq 0$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k = \text{Taylor για πολ/μο βαθμού } n, \text{ γύρω από το } x_0$$

$: (15.2)$

$$p(x) = (x-x_0)\, g_1(x) + r_0 \quad , \quad \partial p = n \ , \ \partial g_1 = n-1 \Rightarrow r_0 = \sigma\tau\alpha\vartheta$$

$$g_1(x) = (x-x_0)\, g_2(x) + r_1 \quad , \quad \partial g_1 = n-1 \ , \ \partial g_2 = n-2 \Rightarrow r_1 = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$g_{n-1}(x) = (x-x_0)\, g_n(x) + r_{n-1} \ , \quad \partial g_{n-1} = 1 \ , \ \partial g_n = 0 \Rightarrow r_{n-1} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$g_n(x) = (x-x_0)\cdot 0 + r_n \quad , \quad \partial g_n = 0 \qquad \Rightarrow r_n = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$\Downarrow$$

$$p(x) = (x-x_0)\, g_1(x) + r_0 = (x-x_0)\left\{(x-x_0)g_2(x) + r_1\right\} + r_0$$

$$= (x-x_0)^2 g_2(x) + (x-x_0)r_1 + r_0 = (x-x_0)^2\left\{(x-x_0)g_3(x) + r_2\right\} + (x-x_0)r_1 + r_0$$

$$= (x-x_0)^3 g_3(x) + (x-x_0)^2 r_2 + (x-x_0) r_1 + r_0$$

$$\vdots$$

$$= (x-x_0)^n \underbrace{g_n(x)}_{r_n} + (x-x_0)^{n-1} r_{n-1} + \cdots + (x-x_0) r_1 + r_0 \qquad (15.2) \Rightarrow$$

$$\boxed{r_K = \frac{1}{K!}\, p^{(K)}(x_0)} \Leftrightarrow \boxed{p^{(K)}(x_0) = r_K \cdot K! \ , \ K = 0(1)n}$$

τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολ/μων $g_K(x)$ με το $x-x_0$

Παράδειγμα Δίνεται το πολ/μο $p(x)=6x^4-53x^3+184x^2-295x+186$ με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος Horner να γραφτεί το ανάπτυγμα Taylor του $p(x)$ γύρω από το $x_0=2$ κ' να βρεθούν οι παράγωγοι $p^{(k)}(x_0)$ $k=0,\dots,4$

	6	-53	184	-295	186	
2		12	-82	204	-182	
	6	-41	102	-91	4	$= r_0 = p^{(0)}(2)/0! \Rightarrow \boxed{p(2)=4}$
2		12	-58	88		
	6	-29	44	-3		$= r_1 = p^{(1)}(2)/1! \Rightarrow \boxed{p^{(1)}(2)=-3}$
2		12	-34			
	6	-17	10			$= r_2 = p^{(2)}/2! \Rightarrow \boxed{p^{(2)}(2)=20}$
2		12				
	6	-5				$= r_3 = p^{(3)}/3! \Rightarrow \boxed{p^{(3)}(2)=-30}$
2						
	6					$= r_4 = p^{(4)}(2)/4! \Rightarrow \boxed{p^{(4)}(2)=144}$

$$p(x) = 4-3(x-2)+10(x-2)^2-5(x-2)^3+6(x-2)^4$$

Άσκηση 5 Με επανειλημμένες εφαρμογές του σχ. Horner γράψετε το πολ/μο $p(x)=3x^2-4x+5$ στην μορφή $p(x)=\alpha+\beta(x-2)+\gamma(x-2)^2$

Άσκηση 6 Εφαρμόζοντας το σχ. Horner να βρεθεί η τιμή της συν/σης $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{3x^2-2}$ κ' της πρώτης της παραγώγου στο $x_0=2$

<u>Άσκηση 8</u> Να βρεθεί με επανειλημμένες εφαρμογές του σχ. Horner η τιμή $p^{(3)}(-2)$ για $p(x)=x^5-x^3+x$

<u>Άσκηση 9</u> Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της τιμής της 2ης παραγώγου πολ/μου βαθμού n σε γνωστό σημείο με επανειλημμένες εφαρμογές του σχ. Horner.

<u>Άσκηση 10</u> Να βρεθεί κατά προσέγγιση το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα για την συν/ση $y=x_1x_2^2$, εαν τα μέγιστα απόλυτα σχετικά σφάλματα των x_1 κ' x_2 είναι 0.1 κ' 0.2 αντίστοιχα.

<u>Άσκηση 11</u> Εαν οι αριθμοί $x_1^*=1.00$ κ' $x_2^*=2.00$ δίνονται στρογγυλοποιημένοι σε 2 δψ, να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της εκφράσεως $x_1+x_2+x_1x_2$.

<u>Άσκηση 12</u> Να γραφτεί πρόγραμμα σε C++ που να βρίσκει τις τιμές των παραγώγων $p^{(k)}(x_0)$ για $k=0,\dots,n$ για γνωστή τιμή x_0 του πολ/μου

$p(x)=\alpha_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ (οι συν/στές του πολ/μου a_i, $0\le i\le n$ θα δίνονται στην αρχή του προγράμματος καθώς κ' ο βαθμός <u>n</u> κ' το σημείο x_0) με επανειλημμένες εφαρμογές του σχ. Horner.