Πεπερασμένες διαφορές (finite differences)

Έστω ότι μας δίνονται οι τιμές μιας συν/σεως $f(x)$ για συγκεκριμένες τιμές της ανεξ. μεταβλητής x, γραμμένες σε μια στήλη. Από τις τιμές αυτές κατασκευάζουμε τον πίνακα διαφορών (πδ)

4-(-2)

x	$f(x)$	$1^{ες}$ διαφ.	$2^{ες}$ διαφ.	$3^{ες}$ διαφ	$4^{ες}$ διαφ.
-3	-2				
		6			
-2	4		-7		
		-1		5	
0	3		-2		15
		-3		10	
1	0		8		
		5			
4	5				

8-(-2)   10-5

Παρατήρηση: Ένας πδ που κατασκευάζεται από $k+1$ τιμές της συν/σεως $f(x)$ εξαντλείται στην στήλη των διαφορών k-τάξης.

Ανάλογα με τον τρόπο συμβολισμού του πδ έχουμε 3 τύπους διαφορών τις (i) προς τα εμπρός (forward)
(ii) προς τα πίσω (backward)
(iii) κεντρικές (central)

(I) Προς τα εμπρός διαφορές (forward)

$$\Delta f_n \equiv \Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n) \equiv f_{n+1} - f_n \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) =$$
$$= f_{n+2} - 2 f_{n+1} + f_n$$

$$\Delta^3 f_n = \Delta(\Delta^2 f_n) = \Delta(f_{n+2} - 2 f_{n+1} + f_n) = \Delta f_{n+2} - 2\Delta f_{n+1} + \Delta f_n$$
$$= (f_{n+3} - f_{n+2}) - 2(f_{n+2} - f_{n+1}) + (f_{n+1} - f_n)$$
$$= f_{n+3} - 3 f_{n+2} + 3 f_{n+1} - f_n \qquad \text{κλπ.}$$

Δηλαδή οι προς τα εμπρός διαφορές κ-τάξης ορίζονται από τις προς τα εμπρός διαφορές (κ-1)-τάξης.

$$\boxed{\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n}$$

<u>Άσκηση 10</u> Δ.ό. : $\Delta^k f_n = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r f_{n+k-r}$ (με επαγωγή)

x_{n-2}	f_{n-2}				
		Δf_{n-2}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$		
		Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_{n-2}$	
x_n	f_n		$\Delta^2 f_{n-1}$		$\Delta^4 f_{n-2}$
		Δf_n		$\Delta^3 f_{n-1}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n$		
		Δf_{n+1}			
x_{n+2}	f_{n+2}				

οι ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος παραλλήλων με φορά από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά.

[Πίνακας 20]

(II) <u>Προς τα πίσω διαφορές</u> (backward)

$$\nabla f_n \equiv \nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1}) \equiv f_n - f_{n-1}$$

(∇ = ανάδελτα)

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} =$$
$$= (f_n - f_{n-1}) - (f_{n-1} - f_{n-2}) = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\nabla^3 f_n = \nabla(\nabla^2 f_n) = \nabla(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) = \nabla f_n - 2\nabla f_{n-1} + \nabla f_{n-2}$$
$$= (f_n - f_{n-1}) - 2(f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_{n-2} - f_{n-3})$$
$$= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

$$\boxed{\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n) = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}}$$

Άσκηση 10: Δ.ό.: $\nabla^k f_n = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r f_{n-r}$

x_{n-2}	f_{n-2}				
		∇f_{n-1}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$		
		∇f_n		$\nabla^3 f_{n+1}$	
x_n	f_n		$\nabla^2 f_{n+1}$		$\nabla^4 f_{n+2}$
		∇f_{n+1}		$\nabla^3 f_{n+2}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\nabla^2 f_{n+2}$		
		∇f_{n+2}			
x_{n+2}	f_{n+2}				

$\nabla^2 f_{n+1} = \Delta^2 f_{n-1}$

οι ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος παραλλήλων με φορά από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά!

[Πίνακας 21]

(III) Κεντρικές διαφορές (central)

εικονική τιμή: $x_{n+1/2} = x_n + h/2$ που δεν μας δίνεται

περιττή τάξη: $\delta f_{n+1/2} \equiv \delta f(x_{n+1/2}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) \equiv f_{n+1} - f_n \Rightarrow$

άρτια τάξη: $\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = \delta(f_{n+1/2} - f_{n-1/2}) = (f_{n+1} - f_n) -$
$- (f_n - f_{n-1}) = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$

Πως να υπολογίσουμε τις κεντρικές διαφορές.

εικονικές τιμές

τιμές που υπάρχουν στον πδ

$$\left.\begin{aligned} &\delta f_n = f_{n+1/2} - f_{n-1/2} \\ &\boxed{\delta f_{n+1/2} = f_{n+1} - f_{n} \equiv \Delta f_{n} \equiv \nabla f_{n+1}} \end{aligned}\right\}$$

Εικονικές τιμές

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1} \equiv \Delta^2 f_{n-1} \equiv \nabla^2 f_{n+1}} \\ &\delta^2 f_{n+1/2} = \delta(\delta f_{n+1/2}) = f_{n+3/2} - 2f_{n+1/2} + f_{n-1/2} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^3 f_n = \delta(\delta^2 f_n) = f_{n+3/2} - 3f_{n+1/2} + 3f_{n-1/2} - f_{n-3/2} \\ &\boxed{\delta^3 f_{n+1/2} = \delta(\delta^2 f_{n+1/2}) = f_{n+2} - 3f_{n+1} + 3f_n - f_{n-1} = \Delta^3 f_{n-1} = \nabla^3 f_{n+2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{2k-1} f_n = \dots \\ &\delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \sum_{r=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{r} (-1)^r f_{n+2k-2-r} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{2k} f_n = \sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} (-1)^r f_{n+k-r} \\ &\delta^{2k} f_{n+1/2} = \dots \end{aligned}\right\}$$

περιττή τάξη: $\delta^3 f_{n+1/2} = \delta(\delta^2 f_{n+1/2}) = \delta(f_{n+3/2} - 2\delta f_{n+1/2} + f_{n-1/2})$

$$= (f_{n+2} - f_{n+1}) - 2(f_{n+1} - f_n) + (f_n - f_{n-1})$$

$$= f_{n+2} - 3f_{n+1} + 3f_n - f_{n-1} \quad \text{etc...}$$

περιττή τάξη	$\delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \delta(\delta^{2k-2} f_{n+1/2}) = \delta^{2k-2} f_{n+1} - \delta^{2k-2} f_n$
άρτια τάξη	$\delta^{2k} f_n = \delta(\delta^{2k-1} f_n) = \delta^{2k-1} f_{n+1/2} - \delta^{2k-1} f_{n-1/2}$

Άσκηση 11: Δ.ό.

$$\begin{cases} \delta^{2k} f_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} (-1)^r f_{n+k-r} \\ \delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \displaystyle\sum_{r=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{r} (-1)^r f_{n+2k-2-r} \end{cases}$$

$\delta^2 f_n = \nabla^2 f_{n+1} = \Delta^2 f_{n-1}$

x_{n-2}	f_{n-2}				
		$\delta f_{n-3/2}$			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\delta^2 f_{n-1}$		
		$\delta f_{n-1/2}$		$\delta^3 f_{n-1/2}$	
x_n	f_n		$\delta^2 f_n$		$\delta^4 f_n$
		$\delta f_{n+1/2}$		$\delta^3 f_{n+1/2}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\delta^2 f_{n+1}$		
		$\delta f_{n+3/2}$			
x_{n+2}	f_{n+2}				

ίδιοι δείκτες εμφανίζονται κατά μήκος της ίδιας οριζόντιας γραμμής.

[Πίνακας 22]

Παρατήρηση: Οι τρεις προηγούμενοι πίνακες περιέχουν τις ίδιες τιμές δηλ. [Πίνακας 20] ≡ [Πίνακας 21] ≡ [Πίνακας 22] το μόνο που αλλάζει είναι ο συμβολισμός.

Στο επόμενο θεωρούμε ότι το <u>βήμα πινακοποίησης</u> είναι σταθερό (κ/ ίσο με $h>0$) δηλαδή:

$$x_{n-2} = x_n - 2h$$
$$x_{n-1} = x_n - h$$
$$x_n = x_n$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$x_{n+2} = x_n + 2h \quad \text{κλπ.}$$

<u>Θεώρημα</u> Οι διαφορές m-τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού m είναι σταθερές.

$$f(x) = (f)_m x^m + (f)_{m-1} x^{m-1} + \dots + (f)_1 x + (f)_0 \quad , \quad \partial f = m \, , \quad (f)_m \neq 0$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (f)_m \cdot m \cdot h x^{m-1} + \{\text{όροι με βαθμό} \leq m-2\}$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = (f)_m \cdot m(m-1) h^2 x^{m-2} + \{\text{όροι με βαθ.} \leq m-3\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta^{m-1} f(x) = \Delta^{m-2} f(x+h) - \Delta^{m-2} f(x) = (f)_m \cdot m(m-1)\cdots(2) \cdot h^{m-1} x + \{\text{όροι με βαθ} \leq 0\}$$

$$\Delta^m f(x) = \Delta^{m-1} f(x+h) - \Delta^{m-1} f(x) = (f)_m \cdot m! \, h^m$$

σταθερό

$$\partial(\Delta^k f) = \partial(\Delta(\Delta^{k-1} f)) = \partial(\Delta^{k-1} f) - 1 = [\partial(\Delta^{k-2} f) - 1] - 1 = \dots = \partial f - k =$$
$$= m - k.$$

συν/στής μεγιστοβαθμίου όρου

$$(\Delta^k f)_{m-k} = (\Delta(\Delta^{k-1} f))_{m-k} = (\Delta^{k-1} f)_{m-k+1} (\partial \Delta^{k-1} f) \cdot h =$$
$$= (\Delta^{k-1} f)_{m-k+1} \cdot (m-k+1) h = \left[(\Delta^{k-2} f)_{m-k+2} (m-k+2) h \right] (m-k+1) h = \dots$$

$$\Delta f(x) = \alpha_0\left[(x+h)^m - x^m\right] + \alpha_1\left[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\right] + \cdots + \alpha_{m-1}\left[(x+h) - x\right]$$

$$= \alpha_0 m h x^{m-1} + O(x^{m-2})$$

$$\Delta^2 f(x) = \alpha_0 m h\left[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\right] + O(x^{m-3})$$

$$= \alpha_0 m(m-1)h^2 x^{m-2} + O(x^{m-3})$$

$$\vdots$$

σταθερά.

$$\Delta^{m-1} f(x) = \alpha_0\, m(m-1)\cdots(2)\cdot h^{m-1} x + \text{const.}$$

$$\Delta^m f(x) = \alpha_0\, m(m-1)\cdots(2)\, h^{m-1}\left[(x+h) - x\right] + 0$$

$$= \alpha_0\, m!\, h^m$$

$$\ldots = (f)_m \cdot m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1) h^k \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial(\Delta^m f) &= m - m = 0 \\ (\Delta^m f)_0 &= (f)_m \cdot m! \cdot h^m \end{aligned}}$$

<u>Παρατηρήσεις</u> (i) Οι 3 τύποι πεπερασμένων διαφορών συμπίπτουν έτσι στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιούμε χάριν ευκολίας προς τα εμπρός διαφορές.

(ii) Οι διαφορές $(m+1)$-τάξης ή ανώτερης ενός πολυωνύμου βαθμού m είναι ίσες με 0.

<u>Παράδειγμα</u>: Δίνονται οι τιμές της συν/σης $f(x)=x^3$ στα σημεία $x = 1(1)6$. Κατασκευάστε τον πίνακα διαφορών.

x	$f(x)$					
1	1					
		7				
2	8		12			
		19		6		
3	27		18		0	
		37		6		0
4	64		24		0	
		61		6		
5	125		30			
		91				
6	216					

Δ

<u>Άσκηση 12</u> Δίνεται η συν/ση $f(x)=2x^4-1$. Να κατασκευαστεί πίνακας διαφορών για τις τιμές $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = 0$, $h=1$, $i = -1(1)4$. Από τον πίνακα να βρεθούν οι τιμές:

$\delta f_{3/2}$, $\nabla^2 f_3$, $\Delta^3 f_1$

Μετάδοση σφαλμάτων σε πίνακα διαφορών

Υποθέτουμε ότι σε μια από τις τιμές της συν/σης υπάρχει σφάλμα ϵ.

x_{n-4}	f_{n-4}					
		Δf_{n-4}				
x_{n-3}	f_{n-3}		$\Delta^2 f_{n-4}$			
		Δf_{n-3}		$\Delta^3 f_{n-4}$		$+\epsilon$
x_{n-2}	f_{n-2}		$\Delta^2 f_{n-3}$		$\Delta^4 f_{n-4}+\epsilon$	
		Δf_{n-2}		$\Delta^3 f_{n-3}+\epsilon$		-5ϵ
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}+\epsilon$		$\Delta^4 f_{n-3}-4\epsilon$	
		$\Delta f_{n-1}+\epsilon$		$\Delta^3 f_{n-2}-3\epsilon$		$+10\epsilon$
x_n	$f_n+\epsilon$		$\Delta^2 f_{n-1}-2\epsilon$		$\Delta^4 f_{n-2}+6\epsilon$	
		$\Delta f_n-\epsilon$		$\Delta^3 f_{n-1}+3\epsilon$		-10ϵ
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n+\epsilon$		$\Delta^4 f_{n-1}-4\epsilon$	
		Δf_{n+1}		$\Delta^3 f_n-\epsilon$		$+5\epsilon$
x_{n+2}	f_{n+2}		$\Delta^2 f_{n+1}$		$\Delta^4 f_n+\epsilon$	
		Δf_{n+2}		$\Delta^3 f_{n+1}$		$-\epsilon$
x_{n+3}	f_{n+3}		$\Delta^2 f_{n+2}$			
		Δf_{n+3}				
x_{n+4}	f_{n+4}					

Πίνακας 25

Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί π.δ. για την εύρεση του απομονωμένου σφάλματος που υπάρχει σε μία από τις τιμές της συν/σης $f(x)$ που δίνεται στο πίνακα

x	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$f(x)$	-28	-9	-2	-1	1	7	26	63	124	215

όταν είναι γνωστό ότι αυτή είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-13	-28				
		19			
-12	-9		-12		
		7		6	
-11	-2		-6		1
		1		7	
-10	-1		1		-4
		2		3	
-9	1		4		6
		6		9	
-8	7		13		-4
		19		5	
-7	26		18		1
		37		6	
-6	63		24		0
		61		6	
-5	124		30		
		91			
-4	215				

Σύμφωνα με την θεωρία θα έπρεπε $\Delta^3 f(x) = (f)_3 \cdot 3!(1)^3 = c, \forall x$ όπου $(f)_3$ ο συν/στής του μεγιστοβαθμίου όρου $h=1$ $m=3$ (ο βαθμός).

(Πίνακας 25)

$$\begin{cases} c+\epsilon = 7 \\ c-3\epsilon = 3 \\ c+3\epsilon = 9 \\ c-\epsilon = 5 \end{cases}$$

Το 4x2 συστ. είναι συμβατό με λύση: $\boxed{c = 6,\ \epsilon = 1}$

$$\Rightarrow f(-9)^* = 1 = f(-9) + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(-9) = 0}$$

$$\Delta^3 f(x) = 6 = (f)_3 \cdot 3! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(f)_3 = 1}$$

◻

Σφάλματα που οφείλονται στα σφάλματα στρογγυλοποίησης των τιμών της συν/σης.

Υποθέτουμε ότι οι τιμές της συν/σης είναι στρογγυλοποιημένες σε <u>K</u> δψ, δηλαδή ισοδύναμα:

$$|\epsilon_n^{(0)}| = |f_n^* - f_n| \leq 0.5 \times 10^{-k}, \forall n$$