Θέτουμε: $\epsilon_n^{(m)} \equiv$ σφάλμα στρογγυλοποίησης της τιμής $\Delta^m f_n$, $m = 0,1,2,\ldots$

$$|\epsilon_n^{(1)}| = |\Delta f_n^* - \Delta f_n| = |(f_{n+1}^* - f_n^*) - (f_{n+1} - f_n)| = |(f_{n+1}^* - f_{n+1}) - (f_n^* - f_n)|$$
$$= |\epsilon_{n+1}^{(0)} - \epsilon_n^{(0)}| \le |\epsilon_{n+1}^{(0)}| + |\epsilon_n^{(0)}| \le 0.5\times 10^{-k} + 0.5\times 10^{-k} =$$
$$= 10^{-k}, \ \forall n$$

$$|\epsilon_n^{(m)}| = |\Delta^m f_n^* - \Delta^m f_n| = \left|\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-1)^r f_{n+m-r}^* - \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-1)^r f_{n+m-r}\right|$$
$$= \left|\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-1)^r (f_{n+m-r}^* - f_{n+m-r})\right| \le \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|\epsilon_{n+m-r}^{(0)}| \le$$
$$\le \left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\right) 0.5\times 10^{-k} = 2^{m-1}\times 10^{-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|\epsilon_n^{(m)}| \le 2^{m-1}\times 10^{-k}} \quad : (27.1)$$

Παράδειγμα Δίνεται η συν/ση $f(x) = x^3$ πινακοποιημένη στα σημεία $x = 2.5(0.2)3.5$ κ' στρογγυλοποιημένη σε 2 δψ (i) Να βρεθεί το ελάχιστο φράγμα για το απόλυτο σφάλμα στις 4^{ες} διαφορές της συν/σης που προέρχεται απο τα σφάλματα στρογγυλοποίησης.

(ii) Να κατασκευαστεί ο ΠΔ κ' να επαληθευθεί η (i)

x	$f(x)^*$	$\Delta f(x)^*$	$\Delta^2 f(x)^*$	$\Delta^3 f(x)^*$	$\Delta^4 f(x)^*$
2.5	15.62				
		4.06			
2.7	19.68		0.65		
		4.71		0.04	
2.9	24.39		0.69		0.02 ← $\epsilon_1^{(4)}$
		5.40		0.06	
3.1	29.79		0.75		−0.02 ← $\epsilon_2^{(4)}$
		6.15		0.04	
3.3	35.94		0.79		
		6.94			
3.5	42.88				

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^3(x^3) &= 1\cdot 3!\,(0.2)^3\\ &= 0.048\end{aligned}}$$

$$|\epsilon_n^{(0)}| = |f_n^* - f_n| \leq 0.5\times 10^{-2} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\epsilon_n^{(4)}| = |\Delta^4 f_n^* - \Delta^4 f_n| \leq 2^{4-1}\times 10^{-2} = 0.08 \\ |0.02|,\ |-0.02| \leq 0.08 \end{cases}$$

$$\Delta^4 f_n^* = \underbrace{\Delta^4 f_n}_{0} + \epsilon_n^{(4)} = \epsilon_n^{(4)} \qquad \square$$

Οι γραμμικοί τελεστές διαφορών Δ, ∇ και δ

Ένας τελεστής T είναι γραμμικός όταν ικανοποιεί την σχέση $T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha Tf(x) + \beta Tg(x)$. Για παράδειγμα

$$\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = [\alpha f(x+h) + \beta g(x+h)] - [\alpha f(x) + \beta g(x)] =$$

$= \alpha\left[f(x+h)-f(x)\right]+\beta\left[g(x+h)-g(x)\right] = \alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)$

<u>Ορισμός</u> Ορίζουμε 2 νέους τελεστές:

(i) $E \equiv$ ο τελεστής της μετατόπισης

$$Ef(x) = f(x+h) \quad \text{ή} \quad Ef_n = f_{n+1}$$

(ii) $Df(x) = f'(x)$, $D \equiv$ ο τελεστής της παραγώγισης.

<u>Άλγεβρα τελεστών</u>

$T_i : C^\infty \to C^\infty$ <u>όπου</u> C^∞ = το σύνολο των συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους.

(i) $T_1 = T_2 \Leftrightarrow \forall f \in C^\infty, \forall x \in \mathbb{R} \quad T_1 f(x) = T_2 f(x)$

(ii) $T = T_1 \pm T_2 \Leftrightarrow \forall f \in C^\infty, \forall x \in \mathbb{R} \quad Tf(x) = T_1 f(x) \pm T_2 f(x)$

(iii) $T = T_1 T_2 \Leftrightarrow \forall f \in C^\infty, \forall x \in \mathbb{R} \quad Tf(x) = T_1(T_2 f(x))$

(iv) $\mathbb{1}$ = ταυτοτικός τελεστής $\Leftrightarrow \forall f \in C^\infty, \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{1} f(x) = f(x)$

(v) Ο δεξιός αντίστροφος T^{-1} του T <u>εάν υπάρχει</u> ικανοποιεί την σχέση $TT^{-1} = \mathbb{1}$. Εάν ο δεξιός αντίστροφος είναι κ' αριστερός αντίστροφος δηλ. $T^{-1}T = \mathbb{1}$ <u>θα λέμε ότι</u> ο T^{-1} είναι ο αντίστροφος του τελεστή T.

<u>Παρατήρηση</u> (i) Από τους 5 γραφικούς τελεστές $\Delta, \nabla, \delta, E, D$ μόνο ο E έχει αντίστροφο οι άλλοι 4 έχουν μόνο δεξιό αντίστροφο. κ' για αυτούς τους τελεστές ισχύει η σχέση

$$T^{-1}Tf(x) = f(x) + \mathbb{C} \quad , f \in C^{\infty}$$

αυθαίρετη σταθ.

(ii) Οποιοδήποτε ζεύγος από τους 5 γτ. αντιμετατίθεται

<u>Παράδειγμα</u> (i) <u>Δο'</u> τα ζεύγη τελεστών (Δ, E) κ' (Δ, ∇) αντιμετατίθενται.

(ii) Χρησιμοποιώντας λογισμό τελεστών να εκφραστούν οι 4 τελεστές Δ, ∇, δ κ' D σαν συναρτήσεις του E.

(i)
$$\left.\begin{aligned} \Delta E f(x) &= \Delta\big(Ef(x)\big) = \Delta\big(f(x+h)\big) = f(x+2h) - f(x+h) \\ E\Delta f(x) &= E\big(\Delta f(x)\big) = Ef(x+h) - Ef(x) = f(x+2h) - f(x+h) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta E f(x) = E\Delta f(x) \ , \forall f \in C^{\infty}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\Delta E = E\Delta}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\nabla f(x) &= \Delta\big(f(x) - f(x-h)\big) = \big(f(x+h) - f(x)\big) - \big(f(x) - f(x-h)\big) \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \\ \nabla\Delta f(x) &= \nabla\big(f(x+h) - f(x)\big) = \big(f(x+h) - f(x)\big) - \big(f(x) - f(x-h)\big) \\ &= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\nabla = \nabla\Delta} \quad : (30.1)$$

(ii)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (E - \mathbb{1}) f(x) \Rightarrow \boxed{\Delta = E - \mathbb{1}}$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = (\mathbb{1} - E^{-1}) f(x) \Rightarrow \boxed{\nabla = \mathbb{1} - E^{-1}}$$

$$\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2) = (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x) \Rightarrow \boxed{\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}}$$

$$E f(x) = f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot h^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k D^k}{k!} f(x) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hD)^k}{k!} \right) f(x) = e^{hD} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = e^{hD}} \Leftrightarrow \boxed{D = \frac{1}{h} \ln(E)}$$

<u>Άσκηση 13</u> (i) Να εκφραστούν οι τελεστές Δ, ∇ κ' δ σαν συναρτήσεις του τελεστή D.

(ii) Να εκφραστεί ο τελεστής E σαν συνάρτηση του τελεστή ∇.

(iii) Δ.ό το ζεύγος τελεστών (Δ^k, ∇) αντιμετατίθεται

<u>Οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν οι συμβολικές μέθοδοι.</u>

Στο επόμενο θα γίνει χρήση του λογισμού των τελεστών για την παραγωγή αλγορίθμων που θα περιέχουν διαφορές. Τα παρακάτω αποτελούν παρατηρήσεις

(i) Οι εκφράσεις της μορφή $(1-\nabla)^{-1}$ κ' $\ln(1+\Delta)$ είναι συντομεύσεις για σειρές του τελεστή ∇ κ' Δ αντίστοιχα δηλ:

$$G_1(\nabla) = (1-\nabla)^{-1} = \frac{1}{1-\nabla} = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla^k \quad : (32.1)$$

$$G_2(\Delta) = \ln(1+\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\Delta^k}{k} \quad : (32.2)$$

σειρές τελεστή διαφορών. κλπ...

(ii) Μπορούμε να επιδράσουμε με τελεστές σαν τους (32.1) κ' (32.2) σε $f \in C^\infty$ σαν ισχύει ότι:

(α) Το f είναι πολυώνυμο ($f \in \mathbb{R}[x]$)

(β) Τα G_i είναι γραμμένα κατά αύξουσες δυνάμεις του αντίστοιχου τελεστή που όταν επιδρά σε πολ/μο μειώνει τον βαθμό του για παράδειγμα. Εάν $f \in \mathbb{R}[x]$ κ' $\partial f = N$ τότε:

$$(1-\nabla)^{-1} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla^k f(x) = \sum_{k=0}^{N} \nabla^k f(x) \quad : (32.3)$$

$$\nabla^k f(x) = 0, \ k > N$$

(γ) Οι τελεστές Δ, ∇, δ κ' D ικανοποιούν αντίστοιχη έκφραση με την (32.3), ο τελεστής E όχι.

(iii) Μπορούμε όμως να επιδρούμε κ' σε συν/σεις που δεν είναι πολυώνυμα γιατί το Θεώρημα του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι εάν $f \in C^1([a,b])$, $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, p \in \mathbb{R}[x]$ τ.ώ. $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

Αντί λοιπόν να επιδρούμε στην $f(\cdot)$ επιδρούμε προσεγγιστικά στο $p(\cdot)$

(iv) Έστω ότι χρησιμοποιούμε την σειρά ενός τελεστή για να επιδράσουμε σε μια συν/ση $f(x)$. Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα η <u>διαφορές συν/σεως ανώτερης τάξης</u> κυριαρχούνται από σφάλματα στρογγυλοποίησης είτε από σφάλματα στην τιμή της συν/σης. Έτσι ενώ χρησιμοποιούμε περισσότερους όρους της σειράς του τελεστή για να πάρουμε στο αποτέλεσμα μας μεγαλύτερη ακρίβεια, αυτό ακριβώς δημιουργεί περισσότερα σφάλματα.

<u>Στην πράξη</u>: Αντικαθιστούμε την σειρά του τελεστή με κάποιο μερικό της άθροισμα κ' όπου μπορούμε δίνουμε κ' την αντίστοιχη έκφραση για το <u>σφάλμα αποκοπής</u>

<u>Άσκηση 14</u>: <u>Δο</u>: $\Delta^m(a^x) = (a^h-1)^m a^x$ όπου h το βήμα πινακοποίησης

<u>Άσκηση 15</u>: Εάν το βήμα πινακοποίησης είναι h για την συν/ση $f(x)=x^3$, να απλοποιηθεί η παράσταση $\nabla\Delta^2 f(x)$

<u>Άσκηση 16</u>: Δίνεται η συν/ση $f(x)=x^3$ πινακοποιημένη στα σημεία $x_n=n$, $n=-3(1)5$. Εάν στην τιμή $f_1 \equiv f(x_1)$ εισχωρήσει <u>απομονωμένο</u> σφάλμα $\epsilon=-0.2$, βρείτε τα σφάλματα που θα εισχωρήσουν στις τιμές Δf_0 κ' $\nabla^2 f_1$

Άσκηση 17: Οι παρακάτω τιμές αποτελούν τις τιμές ενός πολ/μου βαθμού 2 σε σημεία που ισαπέχουν. Βρείτε το απομονωμένο σφάλμα που υπάρχει σε μια από αυτές κ' να διορθωθεί η τιμή αυτή.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$f(x)$	12	10	24	24	40	62	90	124

Άσκηση 18: το πηλίκο τελεστών $\dfrac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-2\nabla+3\nabla^2}$ να γραφτεί κατά τις αύξουσες δυνάμεις του ∇ δηλαδή βρείτε τα a_j $j=0,1,2,3$ έτσι ώστε

$$(\mathbb{1}-2\nabla+3\nabla^2)^{-1} = a_0 + a_1\nabla + a_2\nabla^2 + a_3\nabla^3 + O(\nabla^4)$$

δυνάμει του ∇, 4 κ' πάνω.

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ (interpolation)

Η Παρεμβολή αποτελεί την βάση της πολωνυμικής προσέγγισης. Για παράδειγμα δίνεται μια χρονοσειρά $\{f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_N)\}$ κ' ζητείται να βρεθεί η τιμή της (άγνωστης) συν/σης $f(\cdot)$ σε χρονική στιγμή που δεν υπάρχει στην $\{f(t_i)\}_{i=0}^{N}$.

Στα επόμενα θα δούμε αλγόριθμους παρεμβολής που χρησιμοποιούνται για ισαπέχουσες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής δηλαδή μας δίνεται η ακολουθία τιμών $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n}$, $x_j \equiv x_0 + jh$, $j=0,1,\dots,n$ κ' μας ζητείται η τιμή $f(x)$ $\underbrace{x_j+\theta h}_{x}$, $0<\theta<1$.

Τέτοιοι είναι οι αλγόριθμοι forward Newton-Gregory, backward Newton-Gregory κ' central Bessel.

Στην συνέχεια θα δούμε αλγόριθμους πιό γενικούς όπου $x_j < x_{j+1}$ δηλ. $x_{j+1}-x_j$ δεν χρειάζεται να είναι σταθερό (μη ισαπέχουσες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής). Τέτοιοι είναι οι αλγόριθμοι Lagrange κ' διαιρεμένων διαφορών (divided differences).

Προς τα εμπρός (forward) Newton-Gregory

x_{n-2}	f_{n-2}				
		Δf_{n-2}			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$		
		Δf_{n-1}		$\Delta^3 f_{n-2}$	
x_n	f_n		$\Delta^2 f_{n-1}$		$\Delta^4 f_{n-2}$
		Δf_n		$\Delta^3 f_{n-1}$	
x_{n+1}	f_{n+1}		$\Delta^2 f_n$		
		Δf_{n+1}			
x_{n+2}	f_{n+2}				

όπου $x_{j+1}-x_j = h$,

έστω $x = x_{n-2}+\theta h$ $0<\theta<1$,

τότε: $f(x) = f(x_{n-2}+\theta h) = E^{\theta} f_{n-2} =$

$$= (1+\Delta)^{\theta} f_{n-2} = \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\theta}{r} \Delta^r \right\} f_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f_{n-2} + \binom{\theta}{1}\Delta f_{n-2} + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_{n-2} + \binom{\theta}{4}\Delta^4 f_{n-2} + R_5(x) \quad :(35.1)$$

Η διόρθωση

Παράδειγμα: Χρησιμοποιήστε την πληροφορία που δίνεται για την $f(\cdot)$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	28

: (36.1)

για να βρείτε την τιμή $f(1.5)$ σε 3 δψ.

Χρησιμοποιώντας μέγιστη πληροφορία από τον πδ.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
$x_0 \equiv 0$	1			
		1		
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
3	28			

$h=1$

Για να χρησιμοποιήσουμε όλη την πληροφορία που δίνεται από τον πδ της $f(\cdot)$

Θέτουμε $x_0 = 0$ κ' $\theta = 1.5$ $(h=1)$

τότε $x = 1.5 = x_0 + \theta h$

$$(36.1): \quad f(x) = f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0 + R_4(x), \quad \underline{\text{όπου}}: \ f_0 \equiv f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(1.5) \approx 1 + \binom{1.5}{1}\times 1 + \binom{1.5}{2}\times 6 + \binom{1.5}{3}\times 6 = 4.375$$

$$\left(4.375 = (1.5)^3 + 1\right)$$

Παράδειγμα: $\underline{\text{Δ.ό.}}$ στην γενική περίπτωση η κυβική προσέγγιση $P_3(x)$ της $f(x)$ μέσω forward Newton-Gregory ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$P_3(x_0) = f_0, \quad P_3(x_1) = f_1, \quad P_3(x_2) = f_2, \quad P_3(x_3) = f_3$$

$\underline{\text{όπου}}$ $P_3(x)$ είναι πολ/μο $3^{ου}$ βαθμού που ικανοποιεί $f(x) = P_3(x) + R_4(x)$

$$f(x) = f(x_0+\theta h) = E^{\theta} f(x_0) = (1+\Delta)^{\theta} f(x_0)$$

$$= f(x_0) + \binom{\theta}{1}\Delta f(x_0) + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f(x_0) + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f(x_0) + R_4(x)$$

$$= \underbrace{f(x_0) + \binom{\frac{x-x_0}{h}}{1}\Delta f(x_0) + \binom{\frac{x-x_0}{h}}{2}\Delta^2 f(x_0) + \binom{\frac{x-x_0}{h}}{3}\Delta^3 f(x_0)}_{P_3(x)} + R_4(x)$$

$$P_3(x) = f_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)(f_1-f_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)(f_2-2f_1+f_0) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)(f_3-3f_2+3f_1-f_0)$$

$$= f_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)(f_1-f_0) + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-\underbrace{(x_0+h)}_{x_1})(f_2-2f_1+f_0) +$$

$$+ \frac{1}{6h^3}(x-x_0)(x-\underbrace{(x_0+h)}_{x_1})(x-\underbrace{(x_0+2h)}_{x_2})(f_3-3f_2+3f_1-f_0)$$

$$= f_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)(f_1-f_0) + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)(f_2-2f_1+f_0) +$$

$$+ \frac{1}{6h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(f_3-3f_2+3f_1-f_0) \Rightarrow \partial P_3 = 3$$

$$P_3(x_0) = f_0$$

$$P_3(x_1) = f_0 + \frac{1}{h}\overbrace{(x_1-x_0)}^{h}(f_1-f_0) = f_1$$

$$P_3(x_2) = f_0 + \frac{1}{h}\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}(f_1-f_0) + \frac{1}{2h^2}\overbrace{(x_2-x_0)}^{2h}\overbrace{(x_2-x_1)}^{h}(f_2-2f_1+f_0)$$

$$= f_0 + 2(f_1-f_0) + (f_2-2f_1+f_0) = f_2$$

$$p_3(x_3) = f_0 + \frac{1}{h}\underbrace{(x_3-x_0)}_{3h}\cdot(f_1-f_0) + \frac{1}{2h^2}\underbrace{(x_3-x_0)}_{3h}\underbrace{(x_3-x_1)}_{2h}(f_2-2f_1+f_0)$$
$$+\frac{1}{6h^3}\underbrace{(x_3-x_0)}_{3h}\underbrace{(x_3-x_1)}_{2h}\underbrace{(x_3-x_2)}_{h}(f_3-3f_2+3f_1-f_0)$$
$$= \cancel{f_0} + 3(\cancel{f_1}-\cancel{f_0}) + 3(\cancel{f_2}-2\cancel{f_1}+\cancel{f_0}) + (f_3-3\cancel{f_2}+3\cancel{f_1}-\cancel{f_0}) = f_3$$

□

<u>Παρατήρηση</u> (i)

πολ/μο βαθμού n

$$f(x) = \boxed{p_n(x)} + R_{n+1}(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{\theta}{r}\Delta^r f_0 = f_0 + \sum_{r=1}^{n}\binom{(x-x_0)/h}{r}\Delta^r f_0 =$$

$$= f_0 + \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-r+1\right)\Delta^r f_0$$

$$= f_0 + \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!h^r}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{r-1})\Delta^r f_0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_n(x) = f_0 + \sum_{r=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{r-1}(x-x_i)\right)\dfrac{\Delta^r f_0}{r!h^r} & : (38.1) \\ p_n(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad 0 \le i \le n \end{cases}$$

<u>Άσκηση</u> Δ.ο' $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\right)\dfrac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$: (38.2)

<u>Παράδειγμα</u>. Για το 1° παράδειγμα της σελ 36 να βρεθεί το forward $-p_3(x)$ (για γενικό θ) χρησιμοποιώντας όλη την πληροφορία του πδ.

$x_0=0$, $h=1$

$$\theta = \frac{x-x_0}{h} = x$$

$$f(x) = \underbrace{f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0}_{p_3(x)} + R_4(x) \quad \Longrightarrow$$

$$P_3(x) = 1 + \binom{x}{1}\times 1 + \binom{x}{2}\times 6 + \binom{x}{3}\times 6 =$$

$$= 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}\times 6 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\times 6$$

$$= 1 + x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x^3+1 \quad : (39.1)$$

$\square$

Προς τα πίσω (backward) Newton - Gregory

Προσοχή εδώ θέλουμε να βρούμε προσεγγιστικά την τιμή της συν/σης στο $x = x_0 - \theta h$

$$f(x) = f(x_0 - \theta h) = E^{-\theta} f_0 = (1 - \nabla)^{\theta} f_0 = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\theta}{r}(-\nabla)^r\right) f_0$$

$$E^{-1} = 1 - \nabla$$

$$= \underbrace{\sum_{r=0}^{n} \binom{\theta}{r}(-1)^r \nabla^r f_0}_{P_n(x)} + R_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f_0 - \binom{\theta}{1}\nabla f_0 + \binom{\theta}{2}\nabla^2 f_0 - \cdots + (-1)^n \binom{\theta}{n}\nabla^n f_0 \quad : (39.2)$$

Παράδειγμα:

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1			
		1		
1	2		6	
		7		6
2	9		12	
		19		
$x_0 \equiv 3$	28			

(1) Να βρεθεί η τιμή $f(2.5)$ χρησιμοποιώντας προς τα πίσω