παρεμβολή κατά Newton - Gregory

$$x = 2.5 = \overset{3}{x_0} - \theta \cdot \overset{1}{h} = 3 - \theta \Rightarrow \theta = 3 - x = 0.5 \Rightarrow \quad (39.2)$$

$$f(2.5) \approx 28 - \binom{0.5}{1} \times 19 + \binom{0.5}{2} \times 12 - \binom{0.5}{3} \times 6$$

$$= 28 - 0.5 \times 19 + (0.5)(0.5-1) \times 6 - (0.5)(0.5-1)(0.5-2)$$

$$= 16.625$$

(ii) Να βρεθεί το $3^{ου}$ βαθμού πολ/μο παρεμβολής $P_3(x)$

$$x = \underset{3}{x_0} - \theta \underset{1}{h} \Rightarrow \theta = 3 - x$$

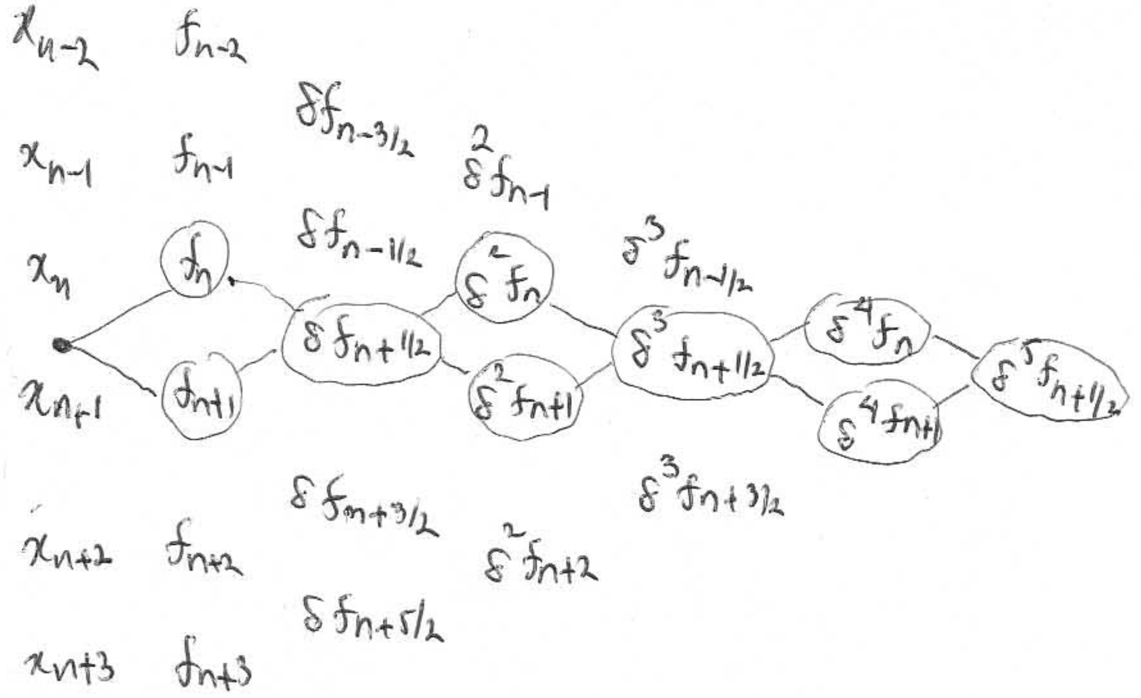
$$f(x) = f(x_0 - \theta h) = f(3 - \theta) =$$

$$= \underbrace{28 - \binom{3-x}{1} \times 19 + \binom{3-x}{2} \times 12 - \binom{3-x}{3} \times 6}_{P_3(x)} + R_4(x)$$

$$P_3(x) = 28 + 19(x-3) + 6(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$= x^3 + 1$$

## Κεντρικές διαφορές (Bessel)

Η παρεμβολή κατά Bessel εφαρμόζεται καλύτερα στην μέση ενός π.δ. Το πολυώνυμο παρεμβολής βρίσκεται με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.




$$f(x) = B_0(f_n + f_{n+1}) + B_1\,\delta f_{n+1/2} + B_2(\delta^2 f_n + \delta^2 f_{n+1}) +$$
$$+ B_3\,\delta^3 f_{n+1/2} + B_4(\delta^4 f_n + \delta^4 f_{n+1}) + B_5\,\delta^5 f_{n+1/2} + \dots$$
$$= B_0(f_n + f_{n+1}) + B_1(f_{n+1} - f_n) + B_2(\delta^2 f_n + \delta^2 f_{n+1}) +$$
$$(41.1):\quad + B_3(\delta^2 f_{n+1} - \delta^2 f_n) + B_4(\delta^4 f_n + \delta^4 f_{n+1}) + B_5(\delta^4 f_{n+1} - \delta^4 f_n) + \dots$$

$$\delta^2 E f_n = \delta^2 f_{n+1} = \delta(f_{n+3/2} - f_{n+1/2}) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = \Delta^2 f_n$$
$$\Leftrightarrow \delta^2 E = \Delta^2 \Leftrightarrow \delta^2 = \Delta^2 E^{-1} = \Delta^2(\mathbb{1}+\Delta)^{-1} = \Delta^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \Delta^n$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta^2 = \Delta^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta^n}$$
$$\delta^4 = (\Delta^2 E^{-1})^2 = \Delta^4 E^{-2} = \Delta^4(\mathbb{1}+\Delta)^{-2} = \Delta^4 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \Delta^n$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta^4 = \Delta^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \Delta^n}$$

$$(41.1) \Rightarrow f(x) = (B_0 - B_1) f_n + (B_0 + B_1) E f_n + (B_2 - B_3)\delta^2 f_n + (B_2 + B_3)\delta^2 E f_n$$
$$+ (B_4 - B_5)\delta^4 f_n + (B_4 + B_5)\delta^4 f_{n+1} + R_5(x)$$

$$= \left\{ (B_0+B_1) + (B_0+B_1)(1+\Delta) + (B_2-B_3)\Delta^2\left(1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\mathcal{O}(\Delta^4)\right) + \right.$$
$$\left. + (B_2+B_3)\Delta^2 + \mathcal{O}(\Delta^4) \right\} f_n$$

$$= \{ \underbrace{2B_0 + (B_0+B_1)\Delta + 2B_2\Delta^2 + (B_3-B_2)\Delta^3 + \mathcal{O}(\Delta^4)}_{T} \} f_n$$

Εξισώνουμε τώρα τον τελεστή $T$ με τον αντίστοιχο τελεστή των προς τα εμπρός διαφορών Newton-Gregory

__δηλ__ $$f(x) = \left\{ 1 + \binom{\theta}{1}\Delta + \binom{\theta}{2}\Delta^2 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 + \mathcal{O}(\Delta^4) \right\} f_n$$

και έχουμε για τους πρώτους 4 συντ/στές:

$$\left.\begin{aligned} 2B_0 &= 1 \\ B_0+B_1 &= \binom{\theta}{1} \\ 2B_2 &= \binom{\theta}{2} \\ B_3-B_2 &= \binom{\theta}{3} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} B_0 &= 1/2 \\ B_1 &= \theta - 1/2 \\ B_2 &= \theta(\theta-1)/4 \\ B_3 &= \theta(\theta-1/2)(\theta-1)/6 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_n+f_{n+1}) + (\theta - 1/2)\delta f_{n+1/2} + \frac{\theta(\theta-1)}{4}(\delta^2 f_n + \delta^2 f_{n+1}) +$$
$$+ \frac{\theta(\theta-1/2)(\theta-1)}{6}\delta^3 f_{n+1/2} + R_4(x) \qquad :(42.1)$$

ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Εφαρμόζοντας έναν οποιοδήποτε από τους 3 τύπους παρεμβολής (35.1), (39.2) είτε (42.1) χρησιμοποιούμε εκα πεπερασμένο πλήθος όρων.

Το πλήθος των όρων που χρησιμοποιούμε καθορίζεται από την ακόλουθη σύμβαση

Χρησιμοποιούμε όλους στην σειρά τους πρώτους όρους, μέχρι τον πρώτο όρο παρεμβολής, που η απόλυτη τιμή του είναι μικρότερη ή ίση από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πδ. Αυτός ο όρος καθώς κ' οι επόμενοι παραλείπονται.

<u>Παράδειγμα</u> Στον προς τα εμπρός τύπο παρεμβολής Newton - Gregory να βρεθεί η μέγιστη απόλυτη τιμή που μπορεί να πάρει η $\Delta^2 f_0$ ώστε ο αντίστοιχος όρος να έχει απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών. Κάντε το ίδιο για την $\Delta^3 f_0$. (Υποθέτουμε ότι $0<\theta<1$).

(i) Εάν η τελευταία δεκαδική τάξη είναι $k$ τότε ζητάμε

$\left|\binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k}$, $0<\theta<1$. Αρκεί να ισχύει

ότι
$$\underbrace{\sup_{0<\theta<1}\left|\binom{\theta}{2}\right|}_{} \cdot |\Delta^2 f_0| \le 0.5\times 10^{-k} \Rightarrow$$

$$\sup_{0<\theta<1}\frac{1}{2}|\theta(\theta-1)| = \frac{1}{2}\sup_{0<\theta<1}|\theta(\theta-1)| = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow \quad |\Delta^2 f_0| \le 4\times 10^{-k}$.

Δηλαδή για να ισχύει ότι $\left|\binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k}$ αρκεί να ισχύει ότι $\boxed{|\Delta^2 f_0| \le 4\times 10^{-k}}$.

(ii) $\left|\binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k} \iff \left|\dfrac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6}\right| |\Delta^3 f_0| \le 0.5\times 10^{-k}$

<u>αρκεί</u> $\sup\limits_{0<\theta<1} |\underbrace{\theta(\theta-1)(\theta-2)}_{g(\theta)}|\,|\Delta^3 f_0| \le 3\times 10^{-k}$

$g'(\theta)=0 \Rightarrow \theta_{\pm} = 1\pm\sqrt{3}/3 \Rightarrow \begin{cases} g''(\theta_+)>0 \\ g''(\theta_-)<0 \Rightarrow g(\theta_-) = 2\sqrt{3}/9 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad |\Delta^3 f_0| \le 3\cdot\left(\dfrac{9}{2\sqrt{3}}\right)\times 10^{-k} \lesssim 7.794\times 10^{-k} < 8\times 10^{-k}$.

Δηλαδή για να ισχύει ότι $\left|\binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k}$ αρκεί να ισχύει ότι $\boxed{|\Delta^3 f_0| \le 8\times 10^{-k}}$

<u>Σημείωση:</u> Μπορεί να δειχθεί ότι για $0<\theta<1$

$\left|\binom{\theta}{4}\Delta^4 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k}$ εάν $|\Delta^4 f_0| \le 12\times 10^{-k}$

$\left|\binom{\theta}{4}\Delta^5 f_0\right| \le 0.5\times 10^{-k}$ εάν $|\Delta^5 f_0| \le 16\times 10^{-k}$

__Παράδειγμα__ Δίνεται ο πδ. σε 7 δψ

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta\times10^{7}$ | $\Delta^2\times10^{7}$ | $\Delta^3\times10^{7}$ | $\Delta^4\times10^{-7}$ | $\Delta^5\times10^{-7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.4 | 0.7323938 | | | | | |
| | | 79689 | | | | |
| 5.5 | 0.7403627 | | -1436 | | | |
| | | 78253 | | 52 | | |
| 5.6 | 0.7481880 | | -1384 | | -6 | |
| | | 76869 | | 46 | | |
| 5.7 | 0.7558749 | | -1338 | | | 7 |
| | | 75531 | | | 1 | |
| 5.8 | 0.7634280 | | | 47 | | |
| | | 74240 | -1291 | | | |
| 5.9 | 0.7708520 | | | | | |

Να βρεθεί η τιμή $x=5.44$ με προς τα εμπρός NG.

$$x_0 = 5.4\ ,\quad h=0.1 \Rightarrow \theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{5.44-5.4}{0.1} = 0.4$$

$|\Delta^2 f_0| \le 4\times10^{-7}$ αλλά $|\Delta^2 f_0| = 1436\times10^{-7}$

$|\Delta^3 f_0| \le 8\times10^{-7}$ αλλά $|\Delta^3 f_0| = 52\times10^{-7}$

$|\Delta^4 f_0| \le 12\times10^{-7}$ κ' ισχύει ότι $|\Delta^4 f_0| = 6\times10^{-7}$ άρα

__Συμπεραίνουμε ότι:__ θα χρησιμοποιήσουμε το πολ/ των 4 πρώτων όρων παρεμβολής. δηλ.

$$f(5.44) \approx f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^2 f_0 \approx$$

$$\approx 0.7355989$$

□

__Παρατήρηση__: Τα ίδια ισχύουν κ' για τους τύπους των προς τα πίσω διαφορών NG.