Άσκηση Να υπολογιστεί για τον πδ στο προηγούμενο παράδειγμα η τιμή $f(5.86)$ με τον προς τα πίσω τύπο διαφορών NG.

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Αυτός είναι τύπος παρεμβολής για μη ισαπέχουσες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. δηλ $x_{i+1}-x_i \neq x_i - x_{i-1}$ για τουλάχιστον ένα i.

Ζητάμε πολ/μο $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\partial P_n \leq n$ τέτοιο ώστε $P_n(x_i) = f_i$ $0 \leq i \leq n$ τότε το $P_n(x)$ θα έχει την μορφή

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k \quad , \text{ με } L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , \partial L_k = n$$

Φτιάχνουμε το πολ/μο παρεμβολής κατα Lagrange για $n=3$:

$$P_3(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 + L_3(x) f_3$$

$L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0$, $L_0(x_2) = 0$, $L_0(x_3) = 0$: (46.1)

$L_1(x_0) = 0$, $L_1(x_1) = 1$, $L_1(x_2) = 0$, $L_1(x_3) = 0$: (46.2)

$L_2(x_0) = 0$, $L_2(x_0) = 0$, $L_2(x_2) = 1$, $L_2(x_3) = 0$: (46.3)

$L_3(x_0) = 0$, $L_3(x_0) = 0$, $L_3(x_2) = 0$, $L_3(x_3) = 1$: (46.4)

$$(46.1) \Rightarrow \alpha_0(x) = \lambda_0 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \quad : (47.1)$$

$$(46.2) \Rightarrow \alpha_1(x) = \lambda_1 (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \quad : (47.2)$$

$$(46.3) \Rightarrow \alpha_2(x) = \lambda_2 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \quad : (47.3)$$

$$(46.4) \Rightarrow \alpha_3(x) = \lambda_3 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad : (47.4)$$

$$(47.1) \Rightarrow 1 = \alpha_0(x_0) = \lambda_0 (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)$$

$$(47.2) \Rightarrow 1 = \alpha_1(x_1) = \lambda_1 (x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)$$

$$(47.3) \Rightarrow 1 = \alpha_2(x_2) = \lambda_2 (x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)$$

$$(47.4) \Rightarrow 1 = \alpha_3(x_3) = \lambda_3 (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

<u>Έτσι</u>:

$$p_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3$$

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι γνωστό ότι εάν 2 πολ/μα $p_n(x)$ κ' $q_n(x)$ με βαθμό το πολύ n ($\partial p_n \le n$ <u>κ'</u> $\partial q_n \le n$) συμπίπτουν σε $n+1$ διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τότε θα συμπίπτουν δηλ. $p_n \equiv q_n$, $\forall x$

Η γενική μορφή του πολ/μου Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, f(x_k)$$

<u>όπου</u> $$L_k(x) \equiv \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Χρησιμοποιώντας τον πίνακα (36.1) να δημιουργηθεί το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \times 2 +$$

$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \times 9 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \times 28$$

$$= \cdots = x^3+1$$

<u>Παράδειγμα</u>: Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο παρεμβολής βρείτε πολ/μο $\partial\beta \le 2$ που να ταυτίζεται στα σημεία $x=-1, 0, 2$ με την συν/ση $f(x)=x^3$

Επειδή τα x_i δεν είναι ισαπέχοντα θα χρησιμοποιήσουμε πολ/μο παρεμβολής Lagrange

$$p_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} \times (-1) + \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} \times (0)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} \times (8) = \cdots = x(x+2)$$

$\square$

Παράδειγμα: Στον επόμενο πδ δίνονται τιμές της $f(x)$. Χρησιμοποιείστε κ' τους 3 τύπους παρεμβολής κ' βρείτε την τιμή της $f(\cdot)$ στο $x = 5.44$.

x	$f(x)\times 10^7$	$\Delta\times 10^7$	$\Delta^2\times 10^7$	$\Delta^3\times 10^7$	$\Delta^4\times 10^7$	$\Delta^5\times 10^7$
5.0	6989700					
		86002				
5.1	7075702		-1671			
		84331		66		
5.2	7160033		-1505		-8	
		82726		58		7
5.3	7242759		-1547		-1	
		81179		57		-2
5.4	7323938		-1490		-3	
		79689		54		1
5.5	7403627		-1436		-2	
		78253		52		-4
5.6	7481880		-1384		-6	
		76869		46		2
5.7	7558749		-1338		1	
		75531		47		
5.8	7634280		-1291			
		74240				
5.9	7708520					

Τύπος παρεμβολής	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$	$5^{ος}$	$6^{ος}$
Newton Gregory (κ' οι 2)	4	8	12	16	21
Bessel	8	60	20	500	100

(i) Προς τα εμπρός NG:

$$f(x) = \underbrace{f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)\Delta^3 f_0}_{p_3^{[1]}(x)\ :\ \mu\epsilon\ \theta = (x-x_0)/h} + \cdots \quad : (50.1)$$

<u>Θέτουμε:</u> $x = 5.44 = \underset{5.40}{x_0} + \theta \underset{0.1}{h} \Leftrightarrow \boxed{\theta = 0.4}$

$|\Delta^2 f_0| = 1436 \times 10^{-7} > 4 \times 10^{-7}$

$|\Delta^3 f_0| = 52 \times 10^{-7} > 8 \times 10^{-7}$

$|\Delta^4 f_0| = 6 \times 10^{-7} \leq 12 \times 10^{-7} \Rightarrow$ Θα χρησιμοποιήσουμε κυβική παρεμβολή

$$f(5.44) \approx (0.7323938) + (0.4) \times (79689 \times 10^{-7}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \times (0.4) \times (-0.6) \times (-1436 \times 10^{-7}) +$$

$$+ \frac{1}{6} \times (0.4) \times (-0.6) \times (-1.6) \times (52 \times 10^{-7})$$

$$= 0.7355989 \quad : (50.2)$$

(ii) Προς τα πίσω NG:

$$f(x) = \underbrace{f_0 - \theta \nabla f_0 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)\nabla^2 f_0 - \frac{1}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)\nabla^3 f_0}_{p_3^{[2]}(x)\ :\ \mu\epsilon\ \theta = (x_0-x)/h} + \cdots \quad : (50.3)$$

<u>Θέτουμε:</u> $x = 5.44 = \underset{5.50}{x_0} - \theta \overset{0.1}{h} \Leftrightarrow \boxed{\theta = 0.6}$

$|\nabla^2 f_0| = 1490 \times 10^{-7} > 4 \times 10^{-7}$

$|\nabla^3 f_0| = 57 \times 10^{-7} > 8 \times 10^{-7}$

$|\nabla^4 f_0| = 1 \times 10^{-7} \leq 12 \times 10^{-7} \Rightarrow$ Θα χρησιμοποιήσουμε κυβική παρεμβολή.

$$f(5.44) \approx (0.7403627) - (0.6)\times(79689\times 10^{-7}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\times(0.6)\times(-0.4)\times(-1490\times 10^{-7})$$
$$\frac{1}{6}\times(0.6)\times(-0.4)\times(-1.4)\times(57\times 10^{-7})$$
$$= 0.7355988 \quad : (51.1)$$

(iii) Bessel

$$f(x) = \frac{1}{2}(f_0+f_1) + (\theta-1/2)\,\delta f_{1/2} + \frac{1}{4}(\theta)(\theta-1)(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) +$$
$$\underbrace{+\ \frac{1}{6}\,\theta(\theta-1/2)(\theta-1)\,\delta^3 f_{1/2}}_{} + \ldots$$

$p_3^{[3]}$: με $\theta = (x-x_0)/h$

Θέτουμε: $x = 5.44 = x_0 + \theta h \Leftrightarrow \boxed{\theta = 0.4}$, $x_0 = 5.40$, $h = 0.1$

$|\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1| = (1490+1436)\times 10^{-7} = 2926\times 10^{-7} > 8\times 10^{-7}$

$|\delta^3 f_{1/2}| = 54\times 10^{-7} \leq 60\times 10^{-7} \Rightarrow$ Θα χρησιμοποιήσουμε τετραγωνική παρεμβολή.

$$f(5.44) \approx \frac{1}{2}\times(0.7323938+0.7403627)+(-0.1)\times(79689\times10^{-7})$$

$$+\frac{1}{4}\times(0.4)\times(-0.6)\times(-1490\times10^{-7}-1436\times10^{-7})$$

$$= 0.7355990 \quad : (52.1)$$

$\square$

Παρατήρηση: Για να βρούμε αποτελέσματα σε κ-δψ (όπως στις (50.2), (51.1) κ' (52.1)) διατηρούμε σε όλα τα ενδιάμεσα αποτελέσματα 1 με 2 δψ παραπάνω η' όλα τα διαθέσιμα δψ εάν εργαζόμαστε με calculator. Στο τέλος στρογγυλοποιούμε στο κ δψ.

Άσκηση: Δίνεται η $f(\cdot)$ από τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	3	8

Χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Bessel κ' όλες τις πληροφορίες του πδ βρείτε την τιμή $f(1.4)$ (απάντηση 0.96)

Άσκηση: Δ.ο' στην περίπτωση τετραγωνικής παρεμβολής κατά Lagrange όταν οι τιμές f_0, f_1 κ' f_2 είναι σταθερές ($f_0=f_1=f_2=c$) το πολ/μο παρεμβολής είναι το σταθερό πολ/μο c.

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας κατάλληλο τύπο παρεμβολής, να βρεθεί πολ/μο το πολύ $3^{ου}$ βαθμού, που να παίρνει στα σημεία $x=0,1,3,5$ τις τιμές $y=3,6,18,38$ αντιστοίχως

(απάντηση: x^2+2x+3)

Παράδειγμα: Δείξτε αναλυτικά εάν δίνονται οι τιμές της $f(\cdot)$ στα σημεία $x_k = x_0 + kh$, $k=0(1)2$ ο τύπος παρεμβολής Lagrange συμπίπτει με τον τύπο παρεμβολής NG-προς τα εμπρός

$$P_{2,L}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$$= \frac{(x-(x_0+h))(x-(x_0+2h))}{2h^2} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-(x_0+2h))}{-h^2} f_1 + \frac{(x-(x_0))(x-(x_0+h))}{2h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right) f_0 - \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right) f_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) f_2$$

$$= \frac{1}{2}(\theta-1)(\theta-2) f_0 - \theta(\theta-2) f_1 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1) f_2$$

$$P_{2,\Delta}(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2 f_0$$

$$= f_0 + \theta(f_1 - f_0) + \frac{1}{2}(\theta)(\theta-1)(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$= \left(1-\theta+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\right)f_0 + \left(\theta-\theta(\theta-1)\right)f_1 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)f_2$$

$$= \frac{1}{2}(\theta-1)(\theta-2)f_0 - \theta(\theta-2)f_1 + \frac{1}{2}\theta(\theta-1)f_2$$

<u>Δηλαδή</u> $\quad p_{2,L}(x) \equiv p_{2,\Delta}(x)$ <u>όπου</u> $\theta = \dfrac{x-x_0}{h}$ □

Η ΔΙΟΡΘΩΣΗ $R_{n+1}(x)$ ΣΤΗΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE.

Έχουμε δει ότι $f(x) \approx p_n(x) \Leftrightarrow f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω I το διάστημα που περιέχει όλα τα σημεία παρεμβολής x_i $0 \le i \le n$ καθώς κ' το σημείο x (για το οποίο γίνεται η παρεμβολή). Εάν $f \in C^{n+1}(I)$ τότε

$$\exists\, \xi \in I \text{ τ.ώ. } R_{n+1}(x) \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: (i) $I \equiv \left[\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}\right]$

(ii) $C^{n+1}(I) \equiv$ οι συν/σεις με συνεχείς παραγώγους έως κ' τάξη $n+1$ στο I.

Έστω η συν/ση $g(t,x) = R_{n+1}(t) - R_{n+1}(x)\prod_{i=0}^{n}\frac{t-x_i}{x-x_i}$: (55.1)

με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,\tilde{x}) \mid t\in\mathbb{R},\ \tilde{x}\in\{x_0,\dots,x_n\}\}$

$$\left.\begin{array}{l} R_{n+1}(t) \equiv f(t) - p_n(t) \xleftarrow{\text{συνεχής}} \\ f(t)\in C^{n+1}(I) \end{array}\right\} \Rightarrow g(t,\cdot)\in C^{n+1}(I)$$

$$g(x_i,x) = R_{n+1}(x_i) - R_{n+1}(x)\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_i) - \underbrace{p_n(x_i)}_{f(x_i)} = 0$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{g(x_i,x) = 0 \quad 0\le i\le n}$

Δηλαδή η συν/ση $g(t,\cdot)$ έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες στο διάστημα I

αλλά: $g(x,x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x)\cdot 1 = 0$

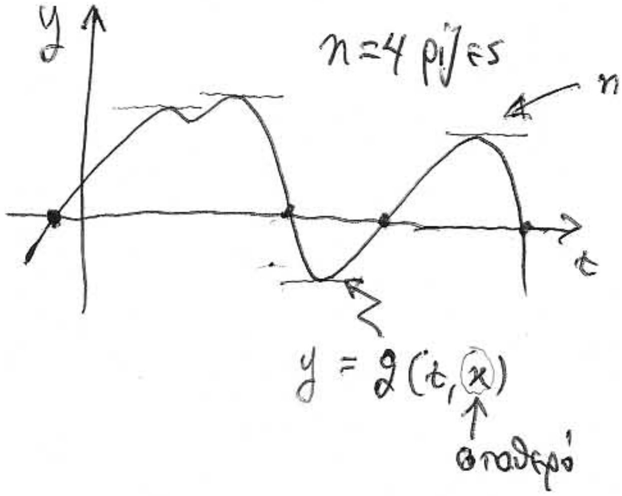
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η συν/ση $g(t,\cdot)$ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες στο διάστημα I.

Έστω $\#g^{(k)} \equiv$ # των ριζών της k-τάξη μερικής παραγώγου της $g(t,x)$ ως προς t $\Rightarrow$

$\# g^{(0)} \geq n+2 \Leftrightarrow \# g^{(1)} \geq n+1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boxed{\# g^{(n+1)} \geq 1}$

<u>Παρατήρηση</u>: Αυτό συμβαίνει διότι η $g(t,\cdot) \in C^{n+1}(I)$



η $g^{(1)}$ έχει <u>τουλάχιστον</u> 3 ρίζες (στην προκειμένη περίπτωση έχει 4 ρίζες)

γνωρίζουμε δηλαδή ότι $\# g^{(n+1)} \geq 1$. Έστω $g^{(n+1)}(\xi, x) = 0$

$$(55.1) \underset{\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)}{\Rightarrow} \; g^{(n+1)}(t,x) = R^{(n+1)}_{n+1}(t) - R_{n+1}(x) \cdot \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

$$R^{(n+1)}_{n+1}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p^{(n+1)}_n(t)}_{0}$$

$\Downarrow$

$$g^{(n+1)}(\xi, x) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - R_{n+1}(x) \cdot \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

$\square$