Άσκηση

Να βρεθεί το πολ/μο παρεμβολής, που προσεγγίζει τη συν/ση $f(x) = x^3-1$ στα σημεία $x = -2, -1, 1$ κ' στην συνέχεια να βρεθεί η διόρθωση για την παρεμβολή αυτή.

[απάντηση: $p_2(x) = -2x^2 + x + 1$, $R_3(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$]

Διαιρεμένες διαφορές
(Μέθοδος παρεμβολής Aitken-Newton)

Η Aitken-Newton είναι μια πιο αποτελεσματική (από πλευράς αριθμού πράξεων) μέθοδος παρεμβολής σε σχέση με την μέθοδο Lagrange. Την ίδια στιγμή είναι το ίδιο γενική εφόσον δεν απαιτεί ισαπέχουσες τιμές x_i της ανεξάρτητης μεταβλητής.

<u>Ορισμός</u>: Οι n-οστής τάξη διαιρεμένη διαφορά ορίζεται επαναληπτικά (recursively) από την $n-1$ τάξης <u>δδ</u> με τον εξής τρόπο:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = n^{\text{οστής}} \text{ τάξης } \underline{\delta\delta}$$

με $f[x_0] = f_0 = 0^{\text{κής}}$ τάξης <u>δδ</u> , $n = 0, 1, 2, \dots$

Άλλη μια ιδιότητα που κάνει την παρεμβολή AN πιο αποτελεσματική είναι ότι το n-οστής τάξης πολ/μο παρεμβολής κατά AN προκύπτει από το $n-1$ τάξης <u>με τον εξής τρόπο</u>:

$$P_{n,DD}(x) = P_{n-1,DD}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) \qquad : (57.1)$$

<u>με</u> $P_{0,DD}(x) = f[x_0] = f_0 =$ σταθερό

Στο επόμενο παράδειγμα θα μας βοηθήσει η εξής πρόταση:

Έστω $P_n(x)$ κ' $Q_n(x)$ δύο πολ/μα με $\partial P_n = \partial Q_n = n$ εάν τα 2 πολ/μα συμφωνούν στις τιμές $x_0, x_1, \dots, x_n$ (δηλαδή σε $n+1$ τιμές) τότε $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

<u>Πρόβλημα</u> εάν $P_n(x_i) = Q_n(x_i)$ $0 \le i \le n$ τότε το πολ/μο $G(x) \equiv P_n(x) - Q_n(x)$ βαθμού $\partial G \le n$ θα έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες εφόσον $G(x_i) = 0$, $0 \le i \le n$.

Το μόνο όμως πολ/μο με ρίζες περισσότερες του βαθμού του, είναι το μηδενικό πολ/μο (μόνο το $G(x) \equiv 0$ που θεωρούμε επί συμβάσει ότι έχει βαθμό $-\infty$ έχει το τυχόν x (πραγματικό ή μη) ρίζα του).

Έτσι $G(x) \equiv P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$ (58.1)

<u>Παράδειγμα:</u> Να δειχθεί ότι τα πολ/μα $2^{ου}$ βαθμού $p_{2,DD}(x)$ κ' $p_{2,L}(x)$ που προκύπτουν από την μέθοδο διαιρεμένων διαφορών (DD) κ' Lagrange (L) ταυτίζονται.

$(57.1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{2,DD}(x) = p_{1,DD}(x) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ p_{1,DD}(x) = p_{0,DD}(x) + f[x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1) \quad , \quad p_{0,DD}(x) = f_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$P_{2,DD}(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2]$$

$$f[x_0,x_1] \equiv \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} =$$

$$= \frac{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) - (f_1 - f_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

Έτσι

$$P_{2,DD}(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times (f_1 - f_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \times \left\{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) - (f_1 - f_0)(x_2 - x_1)\right\}$$

Είναι εύκολο ότι: $P_{2,DD}(x_0) = f_0$

$$P_{2,DD}(x_1) = \cancel{f_0} + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0}(f_1 - \cancel{f_0}) = f_1$$

$$P_{3,DD}(x_2) = f_0 + \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) +$$

$$+ \frac{\cancel{(x_2 - x_0)}\cancel{(x_2 - x_1)}}{(x_1 - x_0)\cancel{(x_2 - x_1)}\cancel{(x_2 - x_0)}} \left\{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) - (f_1 - f_0)(x_2 - x_1)\right\}$$

$$= f_0 + \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) +$$

$$+ (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) \times \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{3,DD}(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\underbrace{\left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}\right)}_{1} + (f_2 - f_1)$$

$$= \cancel{f_0} + (\cancel{f_1} - \cancel{f_0}) + (f_2 - \cancel{f_1}) = f_2$$

Δηλαδή: $p_{2,DD}(x_i) = f_i \quad , i = 0,1,2. \quad : (60.1)$

Ομοίως: θα έχουμε: $p_{2,L}(x_i) = f_i \quad , i = 0,1,2 \quad : (60.2)$

$$p_{2,L}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$$p_{2,L}(x_0) = \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 = f_0$$

$$p_{2,L}(x_1) = \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 = f_1$$

$$p_{2,L}(x_2) = \frac{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 = f_2$$

$$(58.1)(60.1)(60.2) \Rightarrow \boxed{p_{2,DD} \equiv p_{2,L}}$$

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ AITKEN–NEWTON

Δεδομένα παρεμβολής

$$\begin{cases} N = 3 \\ X \equiv \{X[0], X[1], X[2], X[3]\} & \leftarrow \text{οι τιμές της ανεξ. μεταβλητής } (x_0 \ldots x_3) \\ F \equiv \{F[0], F[1], F[2], F[3]\} & \leftarrow \text{οι παρατηρήσεις } f(x_i)\ i=0,1,2,3 \\ Z = 1.5 \leftarrow \text{το σημείο } x \in [x_0, x_3] \end{cases}$$

Αν κ' γενικά η συν/ση F είναι άγνωστη θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε την πραγματική τιμή $f(x)$. Κατά αυτή την έννοια θεωρούμε ότι $f(x) = e^x$ έτσι εάν $X[0] = 0.0$, $X[1] = 0.9$, $X[2] = 1.9$, $X[3] = 3.0$ υπολογίζουμε $F[I] \equiv exp(X[I])$, $I = 0,1,2,3$. Θεωρούμε σαν σημείο παρεμβολής το $Z = 1.5$. Θα θέλαμε να υπολογίσουμε το επί της εκατό απόλυτο σχετικό σφάλμα (εδώ ξέρουμε τις πραγματικές τιμές) χρησιμοποιώντας πολυωνυμικές παρεμβολές για την τιμή $Z = 1.5$, βαθμού 1, 2 κ' 3

$$\begin{array}{llllll}
X[0] & \boxed{F[0]} & & & & \\
X[1] & F[1] & \dfrac{F[1]-F[0]}{X[1]-X[0]} \equiv \boxed{F[1]} & & & \\
X[2] & F[2] & \dfrac{F[2]-F[1]}{X[2]-X[1]} \equiv F[2] & \dfrac{F[2]-F[1]}{X[2]-X[0]} \equiv \boxed{F[2]} & & \\
X[3] & F[3] & \dfrac{F[3]-F[2]}{X[3]-X[2]} \equiv F[3] & \dfrac{F[3]-F[2]}{X[3]-X[1]} \equiv F[3] & \dfrac{F[3]-F[2]}{X[3]-X[0]} \equiv \boxed{F[3]} &
\end{array}$$

$$\{F[0], F[1], F[2], F[3]\} \xrightarrow[\text{διαιρεμένων διαφορών}]{\text{αλγόριθμος εύρεσης}} \{\boxed{F[0]}, \boxed{F[1]}, \boxed{F[2]}, \boxed{F[3]}\}$$

```
for( i=1, i<=N, i++)
    for( j=N,  j>=i, j--)
        F[j] = (F[j] - F[j-1])/(X[j]-X[j-i]) ;
```

Δηλαδή μέσα στο πρόγραμμά μας μετά την εκτέλεση του παραπάνω κώδικα έχουμε κάνει την αντικατάσταση:

$\boxed{N=3}$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} f[x_0] \\ f[x_0,x_1] \\ f[x_0,x_1,x_2] \\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] \end{pmatrix}$$

αποτελέσματα παρεμβολής
- POLY = η προσέγγιση στο $f(x)$
- PARE = το percentage absolute relative error

```
i=1       : POLY = F[1] ;
i=1, j=0  : POLY = (z-X[0])*POLY + F[0]          P_{1,DD}(z)
            PARE = abs((POLY - EXP(z))/EXP(z)) * 100.0 ;
            cout >> i, POLY, PARE ;
i=2       : POLY = F[2] ;
i=2, j=1  : POLY = (z-X[1])*POLY + F[1] ;        P_{2,DD}(z)
i=2, j=0  : POLY = (z-X(0)) *POLY + F[0] ;
            PARE = abs((POLY- EXP(z))/ EXP(z)) *100.0 ; cout >> i, POLY, PARE ;
i=3       : POLY = F[3] ;
i=3, j=2  : POLY = (z-X[2]) * POLY + F[2] ;
i=3, j=1  : POLY = (z-X[1]) * POLY + F[1] ;      P_{3,DD}(z)
i=3, j=0  : POLY = (z- X[0])* POLY + F[0] ;
            PARE = abs((POLY - EXP(z))/ EXP(z)) * 100.0 ;
            cout >> i, POLY, PARE ;
```

```
for (i=1, i<=N, i++)
  {
     POLY = F[i];
     for (j=i-1, j>=0, j--)
          POLY = (z-x[j])*POLY + F[j];
     PARE = abs((POLY - exp(z))/exp(z)) * 100.0
     cout >> i, POLY, PARE;
  }
```

Το παραπάνω κομμάτι κώδικα C++ δίνει τα αποτελέσματα της προηγούμενης σελίδας, για $\boxed{N=3}$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Στην πράξη, μια συν/ση μιας μεταβλητής x χρησιμοποιείται για τη μαθηματική περιγραφή ενός φαινομένου. Συνεπώς το μόνο που ξέρουμε για την συν/ση αυτή είναι ένα πλήθος τιμών της, για συγκεκριμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, που προέρχονται από μετρήσεις ή παρατηρήσεις.

> Το πρόβλημα της ευρέσεως της παραγώγου συν/σης που δίνεται από πίνακα τιμών δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί αλλιώς παρά μόνο με μεθόδους Α.Α.

Αντί να βρούμε την $f'(x)$ βρίσκουμε την τιμή της παραγώγου του αντίστοιχου πολ/μου παρεμβολής στο γνωστό σημείο x

$\downarrow$

$f'(x) \approx P_n'(x)$

$\downarrow$

$f''(x) \approx P_n''(x)$

κλπ.

όπου: $P_n(x)$ μπορεί να είναι:

$P_{n,\Delta}(x)$: προς τα εμπρός βαθμού n

$P_{n,\nabla}(x)$: προς τα πίσω βαθμού n

$P_{n,\delta}(x)$: κεντρική —//—

$P_{n,L}(x)$: Lagrange βαθμού n

$P_{n,DD}(x)$: Divided Differences —//—

(i) $\quad P_n = P_{n,\Delta}$

$$f(x) \approx P_{n,\Delta}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{\theta}{i} \Delta^i f_0 \qquad \text{όπου } \theta = \theta(x) = \frac{x - x_0}{h}$$

$\Downarrow$

$$f'(x) \approx P_{n,\Delta}'(x) = \frac{d}{d\theta}\left\{ \sum_{i=0}^{n} \binom{\theta}{i} \Delta^i f_0 \right\} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{i} \cdot \Delta^i f_0$$

$$= \frac{1}{h}\left\{ \frac{d}{d\theta}(1) f_0 + \frac{d}{d\theta}(\theta)\Delta f_0 + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\right)\Delta^2 f_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}\right)\Delta^n f_0 \right\}$$

Για παράδειγμα αν η παρεμβολή της $f(\cdot)$ είναι κυβική θα έχουμε

$$f'(x) \approx p'_{3,\Delta}(x) = \frac{1}{h}\left\{ \Delta f_0 + \frac{2\theta-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3\theta^2-6\theta+2}{6}\Delta^3 f_0 \right\} \quad :(65.1)$$

$$f''(x) \approx p''_{3,\Delta}(x) = \frac{1}{h^2}\left\{ \Delta^2 f_0 + (\theta-1)\Delta^3 f_0 \right\} \quad :(65.2)$$

$$f'''(x) \approx p'''_{3,\Delta}(x) = \frac{1}{h^3}\Delta^3 f_0 \quad :(65.3)$$

Οι τύποι απλοποιούνται εάν θέλουμε την παράγωγο στα σημεία παρεμβολής $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,2,\dots,n$

<u>Παράδειγμα</u>: (i) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(\cdot)$ στο x_0 χρησιμοποιώντας προς τα εμπρός Newton - Gregory.

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} \frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{i}\Bigg|_{\theta=0} \cdot \Delta^i f_0 = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\Delta^i f_0 \quad :(65.4)$$

$$\frac{d}{d\theta}\binom{\theta}{i}\Bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{i!}\frac{d}{d\theta}\Big(\theta(\theta-1)\cdots(\theta-i+1)\Big)\Bigg|_{\theta=0} = \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i!} = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$$\underbrace{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-i+1)}_{\substack{\theta^{i-1}+\alpha_1\theta^{i-2}+\dots+\alpha_{i-1} \\ \alpha_{i-1}=(-1)^{i-1}(i-1)!}} = \theta^i + \alpha_1\theta^{i-1} + \dots + \alpha_{i-1}\theta$$

$$\alpha_{i-1} = (-1)^{i-1}(i-1)!$$

□

<u>Παρατήρηση</u>: Για συγκεκριμένες τιμές του <u>n</u> η σχέση (65.4) μας δίνει προσεγγιστικούς για την $f'(x_0)$

$$(65.4) \overset{n=1}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta f_0 \quad : (66.1)$$

$$(65.4) \overset{n=2}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right) = -\frac{1}{2h}\left(f_2 - 4f_1 + 3f_0\right) \quad : (66.2)$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{1}{h}\Delta f_0 \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0) \quad \kappa' \quad -\frac{1}{2h}\left(f_2 - 4f_1 + 3f_0\right) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$$

Πράγματι (i) $\frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$

(ii) $-\frac{1}{2h}(f_2 - 4f_1 + 3f_0) = -\frac{1}{2h}\left\{(f_2 - f_0) - 4(f_1 - f_0)\right\} =$

$$= -\left\{\frac{f_2 - f_0}{2h} - 2\cdot\frac{f_1 - f_0}{h}\right\} =$$

$$= -\left(\frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{2h} - 2\,\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \overbrace{-\left(f'(x_0) - 2f'(x_0)\right)}^{f'(x_0)}$$

Παράδειγμα: Παίρνοντας διαδοχικές προσεγγίσεις δείξτε ότι $\frac{1}{h^3}\Delta^3 f_0 \approx f_0'''$

$$\frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx f_0'$$

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0 = \frac{1}{h}\Delta\left(\frac{\Delta f_0}{h}\right) \approx \frac{1}{h}\Delta f_0' = \frac{f_1' - f_0'}{h} = \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \approx f_0''$$

$$\frac{1}{h^3}\Delta^3 f_0 = \frac{1}{h}\Delta\left(\frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0\right) \approx \frac{1}{h}\Delta f_0'' = \frac{f_1'' - f_0''}{h} = \frac{f''(x_0+h) - f''(x_0)}{h} \approx f_0'''$$

<u>Παράδειγμα</u>: Χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες του πδ να βρεθούν οι τιμές $\underline{f'(1.5)}$ κ' $\underline{f''(2.5)}$

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
		1		
1	1		4	
		5		0
2	6		4	
		9		
3	15			

Από την σχέση (65.1) για $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.5-0}{1} = 1.5$

<u>παίρνουμε</u>:

$$f'(1.5) \approx \frac{1}{1} \times \left\{ 1 + (0.5) \times (2 \times 1.5 - 1) \times 4 \right\} = 5$$

Από την σχέση (65.2) για $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2.5-0}{1} = 2.5$

<u>παίρνουμε</u>:

$$f''(2.5) \approx \frac{1}{1^2} \times \left\{ 4 + (2.5-1) \times 0 \right\} = 4$$

ΤΥΠΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Οι τυποι που βρεθηκαν στις προηγούμενες σελίδες μπορούν να προκύψουν ίσως κ' ευκολότερα με λογισμό τελεστων.

Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $D = \frac{1}{h} \ln(E)$ κ' $E = 1 + \Delta$ (σελίδα 31). Τότε:

$$f'(x_0) = Df_0 = \frac{1}{h}\ln(1+\Delta) f_0 = \left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Delta^k\right) f_0$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Delta^k f_0 \approx \underbrace{\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Delta^k f_0}_{\text{ο τύπος } (65.4)}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Για να αναπτύξουμε το $\ln(1+\Delta)$ χρησιμοποιήσαμε το γνωστό αποτέλεσμα: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$, $|x|<1$.

<u>Άσκηση</u> Να βρεθεί προσέγγιση της $f''(x_0)$ που να περιέχει ακριβώς <u>κ'</u> την $5^{ης}$ τάξης διαφορά.

[<u>Χρησιμοποιήστε</u>: $f''(x_0) = D^2 f_0 = \left(\frac{1}{h}\ln(1+\Delta)\right)^2 f_0 = \dots$]

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝ/ΣΤΩΝ

Αρχικά δίνεται ένας προσεγγιστικός τύπος αριθμ. παραγώγισης της μορφής:

$$f'(x_0) \approx G(f_0, f_1, \dots, f_n ; \underset{\text{παράμετροι}}{\Theta}) \quad : (68.1)$$

$$\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$$

Οι <u>n+1</u> παράμετροι θ_i, $0\le i\le n$ θα πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε ο τύπος (68.1) <u>να είναι ακριβής</u> (να μπορούμε δηλαδή στην (68.1) να αντικαταστήσουμε το $\approx$ με $=$) για τις στοιχειώδεις συν/σεις στο σύνολο $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

<u>Παράδειγμα:</u> Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ στον προσεγγιστικό τύπο αριθ. παραγ.

$$f'(x_0) \approx \theta_0 f_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 \quad : (69.1)$$

<u>Εδώ</u> $G(f_0, f_1, f_2 ; \Theta) = \theta_0 f_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$; $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$

κ' $f(\cdot) \in \{1, x, x^2\}$ Ζητάμε να προσδιορίσουμε το Θ <u>έτσι ώστε</u> $f'(x_0) = \theta_0 f_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 \quad \forall f(\cdot) \in \{1, x, x^2\}$.

$$f(x) \equiv 1 \overset{(69.1)}{\Rightarrow} \boxed{0 = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2} \quad : (69.2)$$

$$f(x) \equiv x \overset{(69.1)}{\Rightarrow} 1 = \theta_0 x_0 + \theta_1 (x_0 + h) + \theta_2 (x_0 + 2h) = (\overbrace{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}^{0}) x_0 + (\theta_1 + 2\theta_2) h$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1/h = \theta_1 + 2\theta_2} \quad : (69.3)$$

$$f(x) \equiv x^2 \overset{(69.1)}{\Rightarrow} 2x_0 = \theta_0 x_0^2 + \theta_1 (x_0 + h)^2 + \theta_2 (x_0 + 2h)^2 = (\overbrace{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}^{0}) x_0^2 +$$

$$+ 2h x_0 \underbrace{(\theta_1 + 2\theta_2)}_{1/h} + h^2 (\theta_1 + 4\theta_2) .$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = \theta_1 + 4\theta_2} \quad : (69.4)$$

$$(69.2)(69.3)(69.4) \Rightarrow \theta_0 = -3/2h \, , \ \theta_1 = 2/h \, , \ \theta_2 = -1/2h \overset{(69.1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_0) \approx -\frac{1}{2h} (3f_0 - 4f_1 + f_2)} \quad : (69.5)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Οι τύποι (69.5) κ' (66.2) είναι ίδιοι

<u>Άσκηση:</u> Χρησιμοποιώντας το πολ/μο παρεμβολής του Lagrange που ορίζεται από τα σημεία x_0, x_1, x_2 με αντίστοιχες τιμές f_0, f_1 κ' f_2 να βρεθούν προσεγγιστικές εκφράσεις, που να

δίνουν την $1^η$ κ' $2^η$ παράγωγο της $f(\cdot)$ στο τυχόν σημείο x

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι ένας προσεγγιστικός τύπος για την $2^η$ παράγωγο της $f(\cdot)$ στο x_0 είναι:

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left\{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3\right\}$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας υποχρεωτικά όλα τα δεδομένα του πίνακα τιμών της $f(\cdot)$ να βρεθεί η τιμή $f'(0.5)$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	15	53

[απαντ. 1.5]

Άσκηση: Αποδείξτε τον προσεγγιστικό τύπο:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{6h}\left\{2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0\right\}$$

Άσκηση: Να γραφτεί πρόγραμμα σε C++ που να υπολογίζει τον π.δ. χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών συν/σης f σε $K+1$ σημεία x_i $0 \le i \le K$.