ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ (Α.Ο.)

Η Α.Ο. είναι ένα από τα σπουδαιότερα αντικείμενα της ΑΑ. Χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπου χρειάζεται ο υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Με την Α.Ο. είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ όταν

(i) Δεν γνωρίζουμε αναλυτικά την συν/ση $f(x)$.

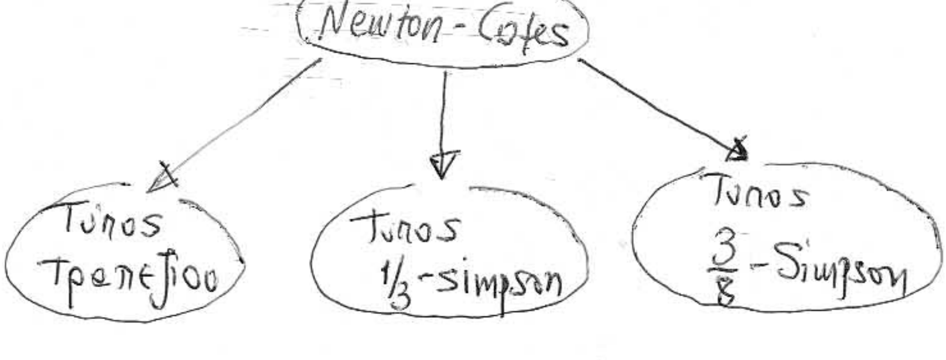
(ii) Την γνωρίζουμε <u>αλλά</u> το αόριστο ολοκλήρωμα της είναι αρκετά πολύπλοκης μορφής

<u>π.χ.</u>

$$\int \frac{dx}{5-x^3} = \frac{1}{5^{2/3}}\left\{ \frac{1}{6}\ln\left[\frac{5^{2/3}+5^{1/3}x+x^2}{(x-5^{1/3})^2}\right] + \frac{1}{3^{1/2}} \times \arctan\left(\frac{5^{1/3}+2x}{3^{1/2}\cdot 5^{1/3}}\right)\right\} + C_1 \qquad : (71.1)$$

<u>Το τελικό αποτέλεσμα</u>: $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{5-x^3}$ <u>όταν</u> $5^{1/3} \notin [\alpha,\beta]$ θα είναι προσεγγιστικό, λόγω της ύπαρξης των συν/σεων $(\cdot)^{2/3}$, $(\cdot)^{1/2}$, $\ln(\cdot)$ κ' $\arctan(\cdot)$ και μάλιστα θα είναι δύσκολο να ελέγξουμε το απόλυτο σφάλμα της (71.1).

<u>Θα ασχοληθούμε με</u> τους τύπους Α.Ο. Newton-Cotes



(i) Τύπος τραπεζίου (Ολοκλήρωση για h)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_{1,\Delta}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left\{f_0+\binom{\theta}{1}\Delta f_0\right\}dx \qquad \theta=\theta(x)$$

$p_{1,\Delta}$: 1ου βαθμού Newton-Gregory προς τα εμπρός διαφορών

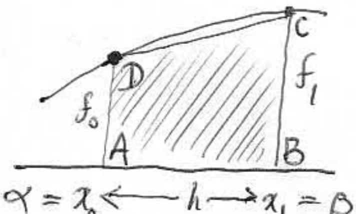
$x=x_0 \Rightarrow \theta=0$

$$\theta=\frac{x-x_0}{h} \Rightarrow d\theta=\frac{dx}{h}$$

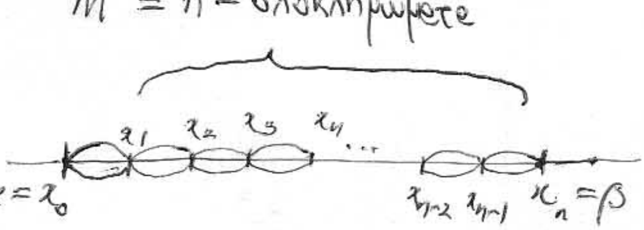
$x=x_1=x_0+h \Rightarrow \theta=1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h\int_0^1\left\{f_0+\binom{\theta}{1}\Delta f_0\right\}d\theta = h\left[\theta f_0+\frac{\theta^2}{2}\Delta f_0\right]_0^1 =$$

$$=\boxed{\frac{h}{2}(f_0+f_1)} \equiv \text{Εμβ}(ABCD)$$



Γενικευμένος τύπος τραπεζίου



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{1,\Delta}(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$

$$= h\left\{\frac{f_0}{2}+f_1+f_2+\cdots+f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left\{\frac{f_0}{2}+f_1+\cdots+f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right\}}$$

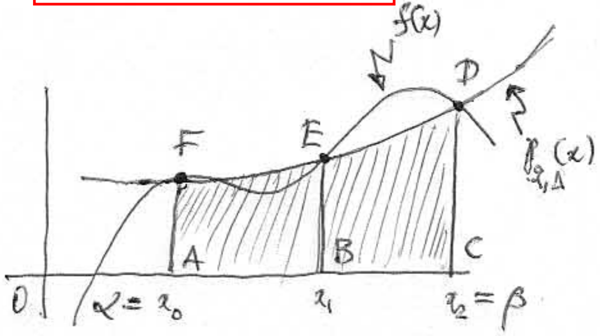
(ii) <u>Τύπος $\frac{1}{3}$ - Simpson</u> (Ολοκλήρωση στα $2h$)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_{2,\Delta}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left\{ f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 \right\} dx =$$

$$= h\int_0^2 \left\{ f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{1}{2}(\theta^2-\theta)\Delta^2 f_0 \right\} d\theta =$$

$$= h\left[f_0\theta + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta^2 f_0 \right]_0^2 = h\left(2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0\right)$$

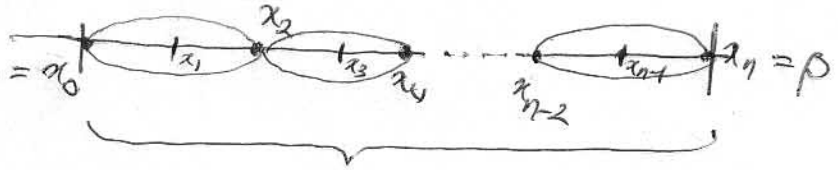
$$= \boxed{\frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)} = \epsilon\mu\beta\ (ABCDEF)$$



<u>Γενικευμένος τύπος $\frac{1}{3}$ - Simpson</u>

<u>Το n είναι πολ/σιο του 2</u>

ώστε:



$m \equiv \frac{n}{2}$ - ολοκληρώματα

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left\{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{2m-3} + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m} \right\}$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-3} + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n \right\}}$$

<u>το n είναι πολ/σιο του 2</u>

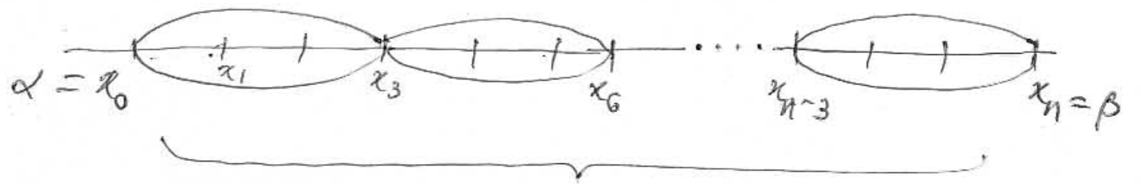
(iii) τύπος $\frac{3}{8}$ - Simpson (Ολοκλήρωση για $3h$)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p_{3,\Delta}(x)\,dx = h\int_0^3 \left\{ f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{1}{2}(\theta^2-\theta)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(\theta^3-3\theta^2+2\theta)\Delta^3 f_0 \right\} \times d\theta$$

$$= h\left[\theta f_0 + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^3}{3}-\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{\theta^4}{4}-\frac{\theta^3}{3}+\theta^2\right)\Delta^3 f_0 \right]_0^3$$

$$= \boxed{\frac{3h}{8}\left(f_0+3f_1+3f_2+f_3\right)}$$

Γενικευμένος τύπος $\frac{3}{8}$ - Simpson   Το n είναι πολ/σιο του 3



$m = \frac{n}{3}$ ολοκληρώματα

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\Big\{ (f_0+3f_1+3f_2+f_3) +$$

$$+ (f_3+3f_4+3f_5+f_6) + \cdots + (f_{3m-3}+3f_{3m-2}+3f_{3m-1}+f_{3m}) \Big\} =$$

$$= \frac{3h}{8}\Big\{ f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \cdots +$$

$$+ 3f_{n-4} + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n \Big\}$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left\{ f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n \right\}}$$

n είναι πολ/σιο του 3

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους 3 κανόνες Α.Ο. να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx$, όπου $f(x)$ η συν/ση που δίνεται στο παράδειγμα της σελ. 49.

(i) Κανόνας τραπεζίου $n=6$

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx \simeq 0.1 \times \left\{ \frac{f(5.0)}{2} + f(5.1) + f(5.2) + f(5.3) + f(5.4) + f(5.5) + \frac{f(5.6)}{2} \right\}$$

$$= \underline{0.43441849}$$

(ii) Κανόνας $\frac{1}{3}$-Simpson $n=6$

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx = \frac{0.1}{3} \times \{ f(5.0) + 4f(5.1) + 2f(5.2) + 4f(5.3) + 2f(5.4) +$$

$$+ 4f(5.5) + f(5.6) \} = \underline{0.43442625}$$

(iii) Κανόνας $\frac{3}{8}$-Simpson $n=6$

$$\int_{5.0}^{5.6} f(x)dx = \frac{3 \times 0.1}{8} \times \{ f(5.0) + 3f(5.1) + 3f(5.2) + 2f(5.3) +$$

$$+ 3f(5.4) + 3f(5.5) + f(5.6) \} = \underline{0.43442624}$$

Ο υπολογισμός ολοκληρώματος στην πράξη, όταν η $f(x)$ δίνεται αναλυτικά

(i) Αποφασίζουμε ποιον από τους 3 κανόνες θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$.

(ii) Στην συνέχεια παίρνουμε σαν h_0 το:

$$h_0 = \begin{cases} b-a & , \text{κανόνας} = \text{τραπεζίου} \\ (b-a)/2 & , \text{κανόνας} = \text{simpson-1/3} \\ (b-a)/3 & , \text{κανόνας} = \text{simpson-3/8} \end{cases}$$

και υπολογίζουμε το $I(h_0) \equiv I_0$

<u>Όπου</u>: $I(h)$, η προσέγγιση του $I = \int_a^b f(x)dx$, με βήμα h.

Στην συνέχεια θέτουμε $h_1 = h_0/2$ κ' επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό. κ' παίρνουμε την προσέγγιση $I(h_1) \equiv I_1$.

Εάν $|I_1 - I_0| \leq 0.5 \times 10^{-k}$ θεωρούμε τότε το I_1 σαν την προσέγγιση <u>k</u> δψ του I. Εάν όμως $|I_1 - I_0| > 0.5 \times 10^{-k}$ θέτουμε $h_2 = h_1/2$ κ' υπολογίζουμε το $I_2 = I(h_2)$. Η διαδικασία συνεχίζεται εώς <u>όπου</u> $|I_n - I_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-k}$, $h_n = h_{n-1}/2$ τότε το I_n θεωρείται η <u>k</u>-δψ προσέγγιση του I.

<u>Παράδειγμα</u> Χρησιμοποιώντας Η/Υ να υπολογιστεί με τον κανόνα simpson-1/3 το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} dx$ σε $k=7$ δψ.

<u>αρχίζουμε</u> με $h_0 = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$ κ' υπολογίζουμε το

$$I_0 = I\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h_0}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 1.00227988$$

$$h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$I_1 = I\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{h_1}{3}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 1.00013458$$

<u>όμως</u> $|I_1 - I_0| > 0.5 \times 10^{-7}$ έτσι θέτουμε $h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{\pi}{16}$ κ' συνεχίζουμε την διαδικασία

$I_2 = 1.00000830$

$I_3 = 1.00000052$

$I_4 = 1.00000003$

$I_5 = 1.00000000$

Επειδή:

$$\begin{cases} |I_5 - I_4| \le 0.5 \times 10^{-7} \\ \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx \approx I_5 \end{cases}$$

θεωρούμε τότε:

Παρατήρηση: $\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = 1$.

Α.Ο. με την μέθοδο των προσδιοριστών συν/στών

Σκεφτόμαστε όπως κ' στη αριθμητική παραγώγιση (σελ 68)

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx G(f_0, f_1, \dots, f_n ; \Theta) \quad \text{με} \quad x_i \in [\alpha, b] \quad 0 \le i \le n$$

κ' $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων που θα πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(f_0, \dots, f_n ; \Theta)$ για $f(x) \in \{1, x, \dots, x^n\}$

Παράδειγμα: Να προσδιοριστούν οι συν/στές $(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \Theta$ έτσι ώστε ο παρακάτω προσεγγιστικός κανόνας να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \underbrace{\theta_0 f_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2}_{G(f_0, f_1, f_2 ; \Theta)} \quad \text{όπου} \quad \begin{array}{l} f_i = f(x_i) \\ x_i = x_0 + ih \end{array}, \; 0 \le i \le 2$$

$$f(x) \equiv 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} dx = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2h) - x_0 = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \boxed{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 2h} \quad (78.1)$$

$$f(x) \equiv x \Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} x\,dx = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_0+2h)^2 - x_0^2}{2} = \theta_0 x_0 + \theta_1 (x_0 + h) + \theta_2 (x_0 + 2h) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2x_0 h} + 2h^2 = \cancel{\underbrace{(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)}_{2h} x_0} + h(\theta_1 + 2\theta_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 + 2\theta_2 = 2h} \quad (78.2)$$

$$f(x) \equiv x^2 \Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} x^2 dx = \theta_0 x_0^2 + \theta_1 (x_0 + h)^2 + \theta_2 (x_0 + 2h)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2x_0^2 h} + \cancel{4x_0 h^2} + \frac{8}{3} h^3 = \cancel{\overbrace{(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)}^{2h} x_0^2} + \cancel{2\underbrace{(\theta_1 + 2\theta_2)}_{2h} x_0 h} +$$

$$+ (\theta_1 + 4\theta_2) h^2 \Rightarrow \boxed{\theta_1 + 4\theta_2 = \frac{8h}{3}} \quad (78.3)$$

$$(78.1) - (78.3) \Rightarrow \theta_0 = \frac{h}{3}, \quad \theta_1 = \frac{4h}{3}, \quad \theta_2 = \frac{h}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \{ f_0 + 4f_1 + f_2 \}$$

Simpson - 1/3

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί μέγιστο απόλυτο σφάλμα που οφείλεται στα σφάλματα στρογγυλοποιήσεως των τιμών της συν/σης $f(x)$ κ' μόνο, κατά την εφαρμογή του γενικευμένου κανόνα του τραπεζίου. Οι τιμές f_i δίνονται στρογγυλοποιημένες σε <u>k</u> δψ.

$$I_n = \frac{h}{2}\left\{ f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n \right\}$$

$$I_n^* = \frac{h}{2}\left\{ f_0^* + 2f_1^* + \dots + 2f_{n-1}^* + f_n^* \right\}$$

$$|I_n^* - I_n| \le \frac{h}{2}\left\{ |f_0^* - f_0| + 2\left[|f_1^* - f_1| + \dots + |f_{n-1}^* - f_{n-1}| \right] + |f_n^* - f_n| \right\}$$

$$\le \frac{h}{2}\left\{ 0.5\times10^{-k} + 2\cdot(n-1)\cdot 0.5\times10^{-k} + 0.5\times10^{-k} \right\}$$

$$= \frac{h}{4}\left\{ 2n\times10^{-k} \right\} = (nh)\times 0.5\times10^{-k} \Rightarrow$$

$$x_n - x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup|I_n^* - I_n| = (x_n - x_0)\times 0.5\times10^{-k}}$$

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί η προσέγγιση του $\int_{-3}^{3} x^2\,dx$ χρησιμοποιώντας τους γενικευμένους κανόνες του (i) τραπεζίου (ii) 1/3 - Simpson

[απ. 19, 18]

<u>Άσκηση</u>: Χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες του πίνακα να βρεθεί το $\int_0^3 f(x)\,dx$

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	3	8

[απ: τραπέζιο: 6.5, Simpson 3/8: 6.0].