ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Λίγες είναι οι εξισώσεις που μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Για παράδειγμα οι πολ/κές εξισώσεις δηλαδή εξισώσεις της μορφής:

$$f(x) = 0$$

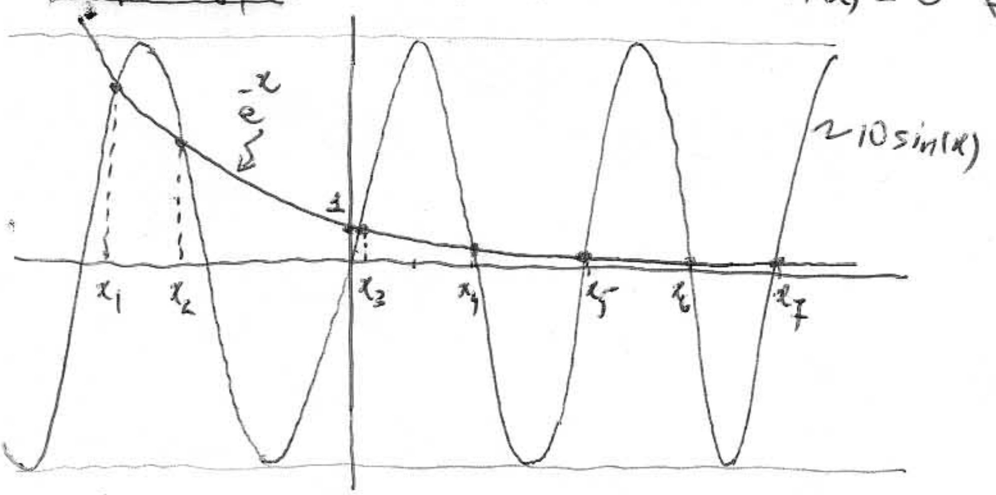
$$f(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$ = Το πεδίο των μιγαδικών αριθμών

<u>μόνο για $n \leq 4$ επιλύονται</u> για γενικούς συντελεστές α_i. Όταν $n \geq 5$ οι συντελεστές α_i πρέπει να πληρούν συνθήκες έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε τις ρίζες χρησιμοποιώντας τις 4 πράξεις της αριθμητικής κ' ριζικά οποιασδήποτε τάξης.

Ενώ για εξισώσεις μη αλγεβρικές είναι πολύ σπάνιο κ' μόνο σε εξαιρετικά πολύ απλές περιπτώσεις μπορούμε να γνωρίζουμε τις ρίζες αναλυτικά.

<u>Παράδειγμα</u> $f(x) = e^{-x} - 10\sin(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x_i} = 10\sin(x_i)$

$1 \leq i < \infty$



<u>Άρα</u> $\exists\ \infty$ ρίζες κ' ο μόνος τρόπος εύρεσης είναι με αριθμητική επίλυση

Γενικό (i) Για την εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου θα πρέπει να γνωρίζουμε ένα αρχικό διάστημα I_0 εντοπισμού της ρίζας στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται μια κ' μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα το διάστημα εντοπισμού της x_3 είναι το $[0,\pi/2]$ ενώ της x_4 το $[\pi/2,\pi]$.

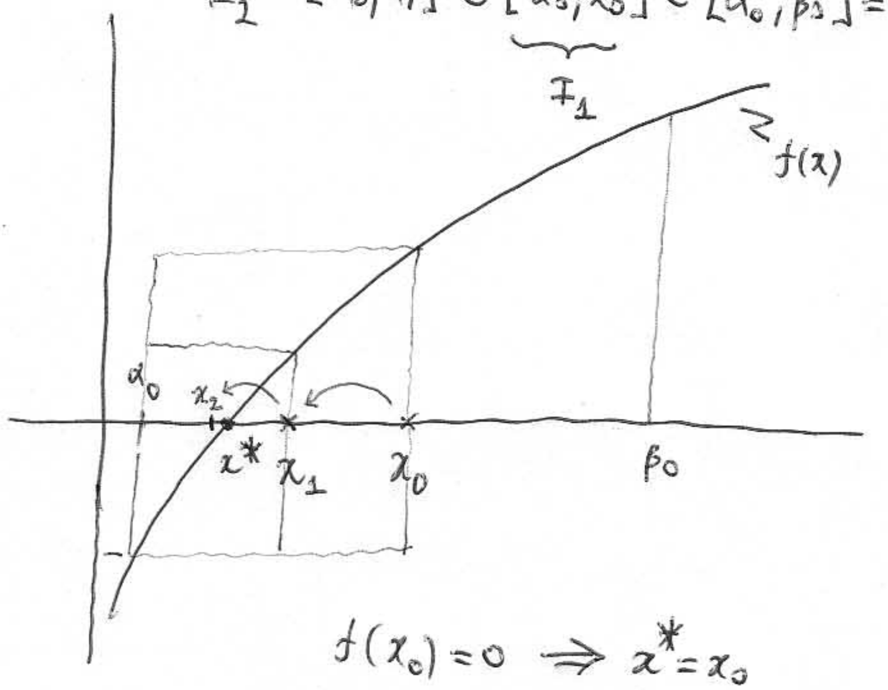
Το θεώρημα του Bolzano μας λέει ότι: Εαν $I=[\alpha,\beta]$ και η f είναι συνεχής κ' γνησίως μονότονη κ' $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε θα υπάρχει μοναδική ρίζα $x^*\in(\alpha,\beta)$ κ' το διάστημα $I\equiv I_0$ θα είναι διάστημα εντοπισμού.

(ii) Οταν έχουμε το διάστημα εντοπισμού της ρίζας παίρνουμε $x_0\in I_0$ σαν αρχική προσέγγιση της ρίζας κ' εφαρμόζοντας κάποια αριθμητική μέθοδο επίλυσης φτιάχνουμε μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

Η μέθοδος της διχοτομήσεως (Bisection)

Είναι η πιο παλιά, η πιο απλή κ' η πιο αργή από όλες τις μεθόδους. Είναι όμως η μόνη για την οποία γνωρίζουμε από πριν τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να καταλήξουμε σε προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια $\underline{k}$ δψ.

$I_2 = [\alpha_0, x_1] \subset [\alpha_0, x_0] \subset [\alpha_0, \beta_0] = I_0$ with $\underbrace{[\alpha_0, x_0]}_{I_1}$



$I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ = το διάστημα εντοπισμού της x^*.

Επειδή $f(\alpha_0) f(\beta_0) < 0$, η ρίζα είναι μοναδική

Θεωρούμε

$x_0 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x^* = x_0$$

$$f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \equiv x_0, \ \beta_1 \equiv \beta_0, & f(x_0) f(\beta_0) < 0 \\ \alpha_1 \equiv \alpha_0, \ \beta_1 \equiv x_0, & f(\alpha_0) f(x_0) < 0 \end{cases}$$

Το νέο διάστημα εντοπισμού είναι το $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ κ' θεωρούμε σαν νέα προσέγγιση το $x_1 = \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow x^* = x_1$$

$$f(x_1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \equiv x_1, \ \beta_2 \equiv \beta_1, & f(x_1) f(\beta_1) < 0 \\ \alpha_2 \equiv \alpha_1, \ \beta_2 \equiv x_1, & f(\alpha_1) f(x_1) < 0 \end{cases}$$

Η νέα προσέγγιση θα είναι $x_2 = \dfrac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$ κλπ...

Έτσι φτιάχνουμε την <u>ακολουθία προσεγγίσεων</u> της x^*, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

<u>Παρατήρηση</u> Παρατηρούμε ότι: $\mu(I_n) = 2^{-1} \mu(I_{n-1}) = 2^{-2} \mu(I_{n-2}) = \dots$
$$\dots = 2^{-n} \mu(I_0)$$

όπου $\mu(\cdot)$ η συν/ση μήκους

Έστω $\varepsilon_n \equiv x_n - x^* =$ το σφάλμα κατά την $n^{οστή}$ επανάληψη

Τότε: $|\varepsilon_n| = |x_n - x^*| = \left|\frac{\alpha_n+\beta_n}{2} - x^*\right| \le \frac{\mu(I_n)}{2} \le \dots \le \frac{\mu(I_0)}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$$

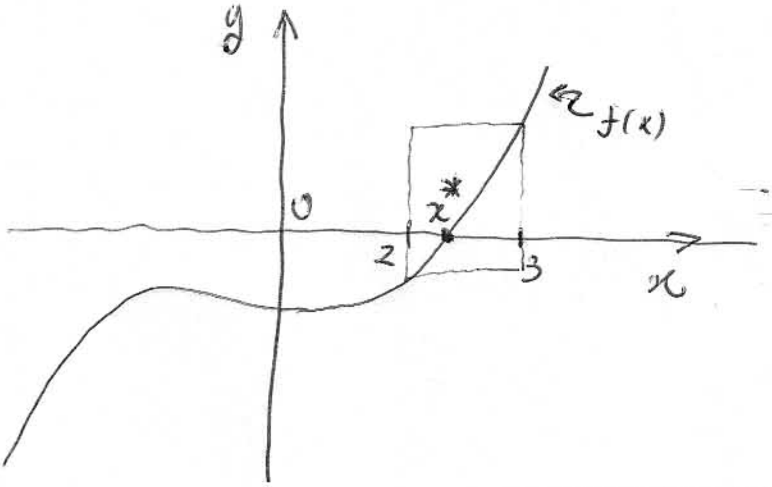
Εάν θέλουμε η προσεγγιστική "ρίζα" x_n να συμφωνεί με την πραγματική ρίζα σε $\underline{K}$ δψ ζητάμε:

$|\varepsilon_n| \le 0.5\times10^{-K}$. Αρκεί τότε $\frac{\mu(I_0)}{2^{n+1}} \le 0.5\times10^{-K} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_0-\alpha_0}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2}\times10^{-K} \Leftrightarrow \boxed{n \ge \frac{\ln(10^K(\beta_0-\alpha_0))}{\ln(2)}}$$

Παράδειγμα: Δίνεται $f(x) = x^3-2x-5$ κ'

$I_0 = [2,3] \Rightarrow \alpha_0 = 2,\ \beta_0 = 3$.



Το ελάχιστο πλήθος των επαναλήψεων που απαιτείται για ακρίβεια $\underline{K=3}$ δψ θα είναι

$$n \ge \frac{\ln(10^3(3-2))}{\ln(2)} \approx 9.97 \Rightarrow$$

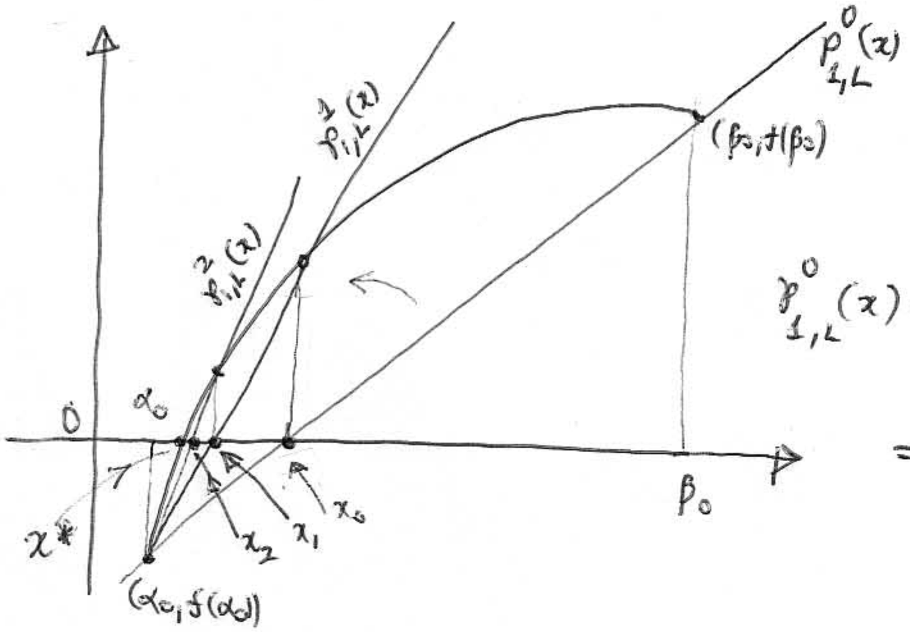
$$\Rightarrow \boxed{n=10}$$

Η μόνη πραγματική ρίζα της $f(x) = x^3-2x-5=0$ είναι η:

$$x^* = \frac{\sqrt[3]{(540+12\sqrt{1929})^2}+24}{6\sqrt[3]{540+12\sqrt{1929}}} \approx 2.094551482$$

Η μέθοδος της παρεμβολής (secant)

Είναι βελτίωση της προηγούμενης μεθόδου. Αντί να παίρνουμε κάθε φορά σαν νέα προσέγγιση x_n το μέσο του αντίστοιχου διαστήματος I_n, παίρνουμε την τομή του γραφικού πολ/μου παρεμβολής που ορίζεται από τα άκρα του I_n.



$f(\alpha_0)f(\beta_0)<0$

$f\in C^0(I_0)$, $f\nearrow$

$$p^0_{1,L}(x) = \frac{x-\beta_0}{\alpha_0-\beta_0}f(\alpha_0) + \frac{x-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}f(\beta_0)$$

$$= \frac{1}{\beta_0-\alpha_0}\left\{(x-\alpha_0)f(\beta_0) - (x-\beta_0)f(\alpha_0)\right\}$$

$$p^0_{1,L}(x_0) = 0 = \frac{1}{\beta_0-\alpha_0}\left\{(x_0-\alpha_0)f(\beta_0)-(x_0-\beta_0)f(\alpha_0)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}$$

Εάν: $f(x_0) = 0 \Rightarrow x^* = x_0$.

$$f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \equiv x_0, \ \beta_1 \equiv \beta_0 & f(x_0)f(\beta_0)<0 \\ \alpha_1 \equiv \alpha_0, \ \beta_1 \equiv x_0 & f(\alpha_0)f(x_0)<0 \end{cases}$$

Έτσι βρίσκουμε το $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha_1 f(\beta_1) - \beta_1 f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)} \quad \text{κλπ...}$$

Για παράδειγμα δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι για $f(\alpha_0)<0$, $f(\beta_0)>0$, $f\nearrow$ στο $[\alpha_0, \beta_0]$ θα έχουμε

$$\alpha_0 < \underbrace{\frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}}_{x_0^{II}} < \underbrace{\frac{\beta_0 + \alpha_0}{2}}_{x_0^{I}}$$

x_0^{I} ← Το x_0 της $1^{ης}$ μεθόδου

x_0^{II} ← Το x_0 της $2^{ης}$ μεθόδου

Διαισθητικά λοιπόν η ακολουθία $\{x_n^{II}\}$ της παρεμβολής θα πρέπει να συγκλίνει στο x^* γρηγορώτερα από την αντίστοιχη ακολουθία $\{x_n^{I}\}$ της διχοτομήσεως.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η ρίζα $x^* \in (2,3)$ της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ με προσέγγιση <u>$k=3$</u> δψ. με την μέθοδο της παρεμβολής.

$\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 2.0588$,

$f(x_0) f(\beta_0) < 0 \Rightarrow \alpha_1 = x_0$, $\beta_1 = \beta_0 \Rightarrow x_1 = 2.0813$

<u>Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε διαδοχικά:</u>

$x_2 = 2.0897$

$x_3 = 2.0928$ $\qquad |x_n - x_{n-1}| > 0.5 \times 10^{-k}$, $n = 1,2,3,4$

$x_4 = 2.0939$

$x_5 = 2.0943$

$$\left.\begin{matrix} x_4 = 2.0939 \\ x_5 = 2.0943 \end{matrix}\right\} |x_5 - x_4| \le 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{x^* \approx x_5}$$

(παρατηρήστε ότι $n \geq 10$ για $k=3$ με διχοτόμηση)