Η Γενική Επαναληπτική (αναδρομική) μέθοδος (Picard - Peano)

Εδώ κάνουμε αναδιάταξη της $f(x)=0$ σε $x=g(x)$ έτσι $f(x^*)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^*=g(x^*)}$

Η εξίσωση σταθερού σημείου της $g(\cdot)$

<u>Ορισμός</u> : $g^n \equiv \underbrace{g\circ\cdots\circ g}_{n-\text{φορές}}$ Δηλαδή $g^n(x) = \underbrace{g(g(\cdots g(x)\cdots))}_{n-\text{φορές}}$

<u>κ' φτιάχνουμε την ακολουθία</u> : $x_n = g^n(x_0) \equiv g(g^{n-1}(x_0)) = g(x_{n-1})$

x_0: αρχική προσέγγιση της ρίζας

κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες <u>θα έχουμε ότι</u> : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

<u>Θεώρημα</u> : Εάν $I=[a,b]$ είναι διάστημα εντοπισμού της x^* έτσι ώστε ($f(x^*)=0 \Leftrightarrow$) $x^*=g(x^*)$ με $g(x)\in C^1(I)$ κ' $|g'(x)| \leq \lambda < 1, \forall x\in I$ τότε εάν $x_0, x_1, x_2, \ldots \in I$, με $x_n = g(x_{n-1})$, $n\geq 1$ θα έχουμε $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

<u>Απόδειξη</u>: $|x_{n+1}-x^*| = |g(x_n)-g(x^*)|$

εφόσον $x_{n+1}=g(x_n)$ <u>κ'</u> $x^*=g(x^*)$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Taylor με υπόλοιπο} \Rightarrow f(x+h)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\, h^k + \frac{f^{(N+1)}(x+\theta h)\,h^{N+1}}{(N+1)!} \\ 0<\theta<1 \;,\; \min\{x, x+h\} < x+\theta h < \max\{x, x+h\}\end{array}\right.$$

<u>δηλαδή</u> $N=0 \Rightarrow g(x_n) = g(x^* + \underbrace{(x_n-x^*)}_{\epsilon_n}) =$

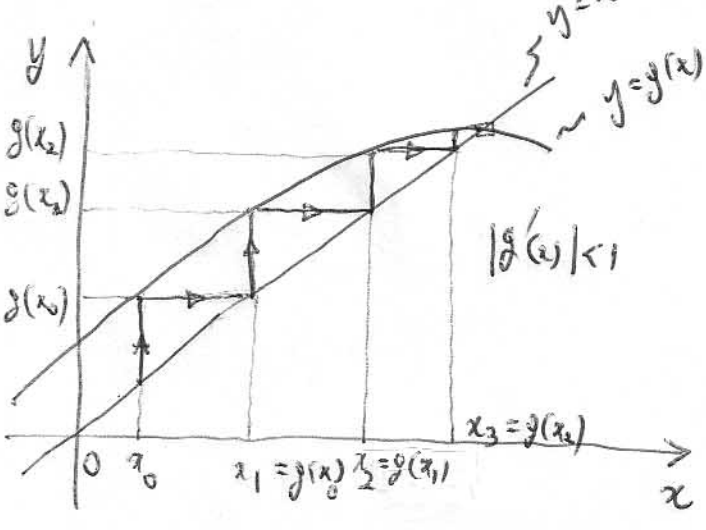
$$= g(x^*) + g'(x^*+\theta\epsilon_n)\,\epsilon_n \Rightarrow$$

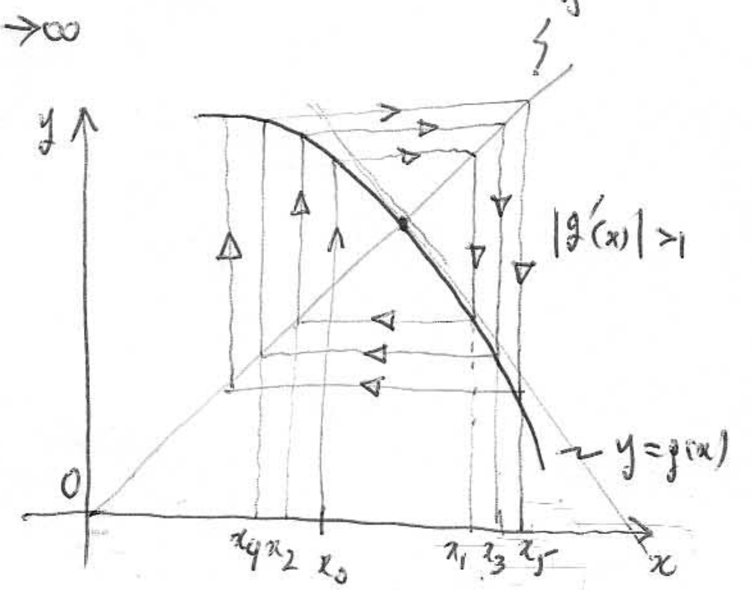
$$\Rightarrow |\epsilon_{n+1}| = |x_{n+1}-x^*| = |g(x_n)-g(x^*)| =$$

$$\left.\begin{array}{l} = |g'(x^*+\theta\epsilon_n)|\,|\epsilon_n| \leq \lambda|\epsilon_n| \;,\; \lambda\in(0,1) \\ \underline{\text{όπου}}\ \min\{x^*, x_n\} < x^*+\theta\epsilon_n < \max\{x^*, x_n\}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\epsilon_{n+1}| \leq \lambda|\epsilon_n| \leq \lambda^2|\epsilon_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^{n+1}|\epsilon_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \epsilon_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$





Παράδειγμα: Δίνεται $f(x)=x^3-2x^2-1=0$. Η $f(x)=0$ έχει μόνο μία ρίζα $x^*\in(2,3)$. Δείξτε ότι εφαρμόζοντας την αναδρομική μέθοδο $x_{n+1}=2+1/x_n^2$ $n=0,1,2,\dots$ για $\forall\, x_0\in[2,3]$ παράγεται η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

(i) Προφανώς $x_{n+1}=g(x_n)$ με $g(x)=2+\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x=g(x)=2+1/x^2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-1=0$ που είναι η $f(x)=0$. Δηλαδή η $x=g(x)$ αποτελεί αναδιάταξη της εξίσωσης $f(x)=0$.

(ii) Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα της σελ 87 θα πρέπει να δ.ό. $x_0\in[2,3]\Rightarrow x_n\in[2,3],\ \forall n\ge 1$ κ' ότι $|g'(x)|\le\lambda<1,\ \forall x\in[2,3]$

Πράγματι $2\le x_0\le 3 \Leftrightarrow 2<2+\frac{1}{9}\le \overbrace{g(x_0)}^{x_1}\le 2+\frac{1}{4}<3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2<x_1<3 \Rightarrow\dots\Rightarrow 2<x_n<3$

$|g'(x)|=\left|-\frac{2}{x^3}\right|$, $2\le x\le 3\Rightarrow -\frac{2}{8}\le g'(x)\le -\frac{2}{27}$

$\Rightarrow |g'(x)|\le \underbrace{\frac{2}{8}}_{\lambda}<1$

Δηλαδή το Θ. της σελ 87 ικανοποιείται κ' $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

Αναφέρουμε το παρακάτω Θεώρημα <u>χωρίς απόδειξη</u>

<u>Θεώρημα</u>: (i) <u>Εαν είναι γνωστό ότι</u>:

$|g'(x^*)| < 1$, $g'(x^*+h) \xrightarrow[h\to 0]{} g'(x^*)$ <u>τότε</u> υπάρχει περιοχή $V(x^*; \epsilon)$ (το διάστημα με κέντρο την ρίζα κ' μήκος $2\epsilon > 0$) τέτοια ώστε εαν

$x_0 \in V(x^*; \epsilon) \Rightarrow x_n \in V(x^*; \epsilon)$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

(ii) <u>Εαν είναι γνωστό ότι</u>:

$|g'(x^*)| \geq 1$ είτε $|g'(x)| \geq 1$, $\forall x \in I \ni x^*$ <u>τότε</u> γενικά για οποιαδήποτε εκλογή $x_0 \in I$,

$x_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} x^*$

<u>Παράδειγμα</u>: Να <u>εξετασθούν ως προς την σύγκλιση</u> τα παρακάτω επαναληπτικά σχήματα:

(i) $x_{n+1} = 0{,}5 + x_n - 0{,}1\, x_n^3$, $n = 0,1,2,\ldots$

(ii) $x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2$, $n = 0,1,2,\ldots$

(iii) $x_{n+1} = (5 + \sin(x_n))/3$, $n = 0,1,2,\ldots$

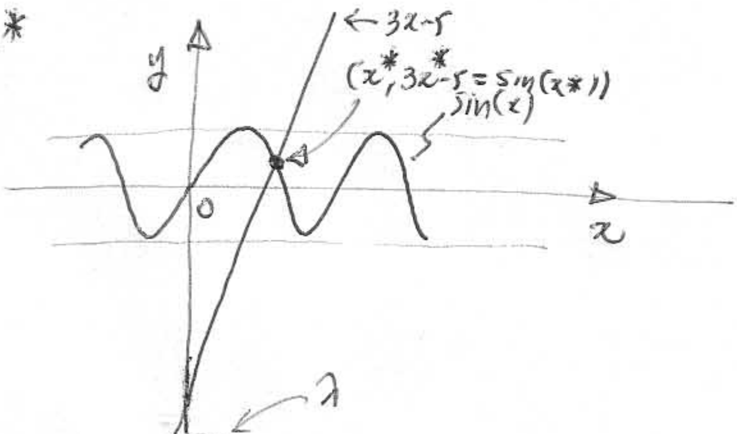
(i) $x = 0.5 + x - 0.1x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 5 = 0$ η μόνη πραγματική ρίζα της $f(x)=0$ είναι η $x^* = 5^{1/3}$. Επομένως αν το επαν. σχ. συγκλίνει, θα συγκλίνει στο $5^{1/3}$. Χρησιμοποιώντας το Θ. <u>89</u> (i) έχουμε $|g'(5^{1/3})| = 1 - 0.3 \times (25)^{1/3} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Μπορεί να βρεθεί περιοχή του $x^* = 5^{1/3}$ τέτοια ώστε εάν το x_0 εκλεγεί από αυτή, $\{x_n\}$ θα συγκλίνει στο $5^{1/3}$.

(ii) $x = x^3 + x - 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2 = 0$ με μόνη πραγμ. ρίζα το $x^* = 2^{1/3}$. Όμως $|g'(x)| = 3x^2 + 1 \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\underset{Θ.89(ii)}{\Rightarrow}$ Για οποιαδήποτε εκλογή του x_0 το επαν. σχ. δεν θα συγκλίνει.

(iii) Το επαν. σχ. προέρχεται από την εξίσωση $f(x) = (3x-5) - \sin(x) = 0$ που έχει μόνο μια πραγματική ρίζα x^*



$|g'(x)| = \frac{1}{3}|\cos(x)| \leq \overset{\lambda}{\frac{1}{3}} < 1 \underset{Θ\ 89(i)}{\Rightarrow} x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

<u>Παράδειγμα</u>: Να γραφτεί ο αλγόριθμος της επαναληπτικής μεθόδου που υπολογίζει την ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 3x - 5 - \sin(x) = 0$ σε C++.

```
x = PI/2; xprev = x; eps = 0.5*pow(10.0, -K);
for(i=1; i<=NMAX, i++)
  { x = (5.0+sin(x))/3.0;
    if( fabs(x-xprev) <= eps)
       { printf("The root is: %lf\n", x); break; }
    xprev = x;
  }
```

Η τάξη της σύγκλισης στην γενική επαναληπτική μέθοδο.

Έστω $I=[a,b]$ και $x^*=g(x^*)$, $a<x^*<b$ με $g\in C^K(I)$, $K\geq 1$. Υποθέτουμε ότι: ισχύει $g^{(r)}(x^*)=0$, $1\leq r\leq K-1$ κ' $g^{(K)}(x^*)\neq 0$ κ' ότι όλες οι τιμές $g^n(x_0)=x_n\in I$, $n\geq 0$.

Τότε: $\epsilon_{n+1}=x_{n+1}-x^*=g(\overset{x^*+\epsilon_n}{x_n})-g(x^*)=$

$$=\sum_{r=1}^{K-1}\frac{g^{(r)}(x^*)}{r!}\epsilon_n^r+\frac{g^{(K)}(x^*+\theta\epsilon_n)}{K!}\epsilon_n^K \quad :(91.1)$$

όμως $g^{(r)}(x^*)=0$, $1\leq r\leq K-1$ έτσι η σχέση (91.1) γίνεται:

$$(91.4):\ \boxed{\begin{gathered}\epsilon_{n+1}=\frac{g^{(K)}(x^*+\theta\epsilon_n)}{K!}\epsilon_n^K\\ \min\{x_n,x^*\}<x^*+\theta\epsilon_n<\max\{x_n,x^*\}\end{gathered}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^K}=\frac{1}{K!}\lim_{n\to\infty}g^{(K)}(x^*+\theta\epsilon_n) \ :(91.2)$$

Επειδή $g^{(r)}(x^*)=0$, $1\leq r\leq K-1$ θα έχουμε $|g'(x^*)|=0<1 \Rightarrow \epsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$g\in C^K(I)\Rightarrow g^{(K)}$ είναι συνεχής στο I $\Bigg\}\overset{(91.2)}{\Rightarrow}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^K}=\frac{g^{(K)}(x^*)}{K!}\Rightarrow \boxed{\epsilon_{n+1}\underset{n\gg 1}{\propto}\epsilon_n^K} \quad (91.3)$$

Η σχέση (91.3) μας λέει ότι για μεγαλές τιμές του n ($n \gg 1$), το σφάλμα σε μια επανάληψη είναι ανάλογο της k-δύναμης του σφάλματος της προηγούμενης επανάληψης. Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση ονομάζεται k-τάξης

<u>Παράδειγμα:</u> Δίνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + \alpha}{3x_n^2} \;;\; n \geq 0, \text{ με } x_0 = \text{γνωστό}$$

κ' $\alpha \neq 0$. Σε τι χρησιμεύει ο αλγόριθμος κ' ποια η τάξη σύγκλισης ?

Εαν $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x = \dfrac{2x^3 + \alpha}{3x^2} \Leftrightarrow x^3 - \alpha = 0$,

<u>Δηλαδή</u>: ο αλγοριθμος χρησιμεύει στην εύρεση του $x^* = \alpha^{1/3}$

$$g(x) \equiv \frac{2x^3+\alpha}{3x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x^3-\alpha)}{3x^3}, \quad g''(x) = \frac{2\alpha}{x^4} \quad \left.\begin{matrix} g'(\alpha^{1/3}) = 0 \\ g''(\alpha^{1/3}) = 2\alpha^{-1/3} \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ο αλγοριθμος που δόθηκε είναι $2^{ης}$ τάξης συγκλίσεως (τετραγωνικής)

Πως διαλέγουμε την αρχική τιμή x_0 στην περίπτωση τετραγωνικής συγκλίσεως ?

Εαν $I = [\alpha, b]$ = διάστημα εντοπισμού του x^* κ'

$x_{n+1} = g(x_n)$ = αλγορ. τετρ. συγκλίσεως $\Longleftrightarrow$ $g \in C^2(I)$

$g'(x^*) = 0,\ g''(x^*) \neq 0$

τότε (91.4) $\Rightarrow$ $\epsilon_1 = \frac{1}{2} g''(x^* + \theta\epsilon_0) \cdot \epsilon_0^2$: (93.1)

με $\min\{x_0, x^*\} < x^* + \theta\epsilon_0 < \max\{x_0, x^*\}$

$g \in C^2(I) \Rightarrow g''$ είναι φραγμένη στο I εφόσον είναι συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M > 0 \quad \left|\frac{g''(x)}{2}\right| \leq M, \forall x \in I$: (93.2)

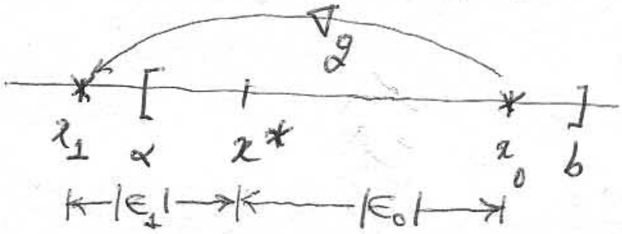
$$\left.\begin{array}{l} (93.1)(93.2) \Rightarrow |\epsilon_1| \leq M \cdot \epsilon_0^2 = M \cdot |\epsilon_0| \cdot |\epsilon_0| \\ |\epsilon_0| = |x_0 - x^*| \leq b - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} |\epsilon_1| \leq \lambda |\epsilon_0| \\ \lambda \equiv M \cdot (b - \alpha) \end{array}}$$

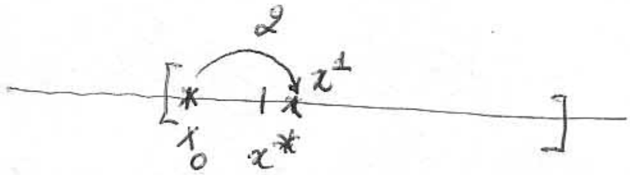
(i) $\lambda < 1 \Rightarrow |\epsilon_1| < |\epsilon_0|$

Παρατηρούμε τότε οτι εαν διαλέξουμε x_0 απο το μικρότερο των 2 διαστημάτων $[\alpha, x^*]$ κ' $[x^*, b]$ θα έχουμε $x_1 \in [\alpha, b]$ κ' έτσι $x_n \in I$ $n \geq 1$.

<u>Πρέγματι</u> εάν ίσχυε ότι $x_0 \in [x^*, b]$ κ' $b - x^* > x^* - \alpha$ τότε θα μπορούσαμε να έχουμε $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$ κ' $x_1 < \alpha$



για αυτό θα έπρεπε να διαλέξουμε $x_0 \in [\alpha, x^*]$ έτσι ώστε μέσω της σχέσης $|\epsilon_1| < |\epsilon_0|$ να εξασφαλίζεται ότι $x_1 \in I$.



(ii) Εάν $\lambda > 1$ τότε διχοτομούμε το $[\alpha, b]$, βρίσκουμε <u>νέο</u> λ. Εάν το <u>νέο</u> $\lambda < 1$, κάνουμε ότι κ' στο (i) αλλιώς επαναλαμβάνουμε την διχοτόμηση.

<u>Παράδειγμα</u>: Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο τετραγ. σύγκλισης του παραδ. στην <u>σελ 92</u>

$f(1) = -2$, $f(2) = 5$ $\Rightarrow$ $I_0 = [1, 2]$ $\Rightarrow |g''(x)| \leq 6, \forall x \in I_0$

$\Rightarrow M_0 = 3$ κ' $\lambda_0 = M_0(b_0 - \alpha_0) = 3 > 1$

$I_1 = [1, 1.5]$ επειδή $f(1.5) = 0.375$ $\Rightarrow$ $M_1 = 3$, $\lambda_1 = 1.5 > 1$

$I_2 = [1.25, 1.50]$ επειδή $f(1.25) \cong -1.047$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 0.75 < 1$

$I_2^1 = [1.25, x^*]$
$I_2^2 = [x^*, 1.50]$ $\Rightarrow \mu(I_2^2) < \mu(I_2^1)$ (επειδή $f(1.375) \cong -0.400$)

έτσι θα πρέπει $x_0 \in [x^*, 1.50] \Rightarrow \boxed{x_0 = 1.50}$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON - RAPHSON

Ο αλγόριθμος των Newton-Raphson είναι ο

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{g(x_n)} \quad , \quad x_0 = \text{δοθέν.} \qquad : (95.1)$$

$$(95.1) \Rightarrow x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \text{άρα η } x = g(x)$$

με $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, αποτελεί αναδιάταξη της $f(x) = 0$.

Παρατηρούμε ότι (i) $g'(x) = \dfrac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} \xrightarrow[f'(x^*) \neq 0]{f(x^*)=0} g'(x^*) = 0$

$$g''(x) = \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2 f(x) [f''(x)]^2}{[f'(x)]^3} \Rightarrow$$

$$g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0$$

Δηλαδή όταν $f'(x^*) \neq 0$ (η x^* είναι απλή ρίζα της $f(x) = 0$) η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

(ii) Το x_0 το βρίσκουμε με την μέθοδο στην σελ. 93

Παράδειγμα: Να δοθεί ο αλγόριθμος NR για την
(i) εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας του $\alpha \in \mathbb{R}^+$ κ' να δειχθεί ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει για $\forall x_0 > 0$.
(ii) Να βρεθεί το $\sqrt{2}$ με προσέγγιση 4 δψ.

(i) $f(x) = x^2 - \alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right), & n \geq 0 \\ x_0 = \text{"κατάλληλη" αρχική προσέγγιση} & :(96.0) \end{cases}$$

$$x_0 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\alpha}{x_0}\right) > 0 \Rightarrow x_n > 0, \forall n \geq 1.$$

$$x_1 - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\alpha}{x_0}\right) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_0} - \sqrt{\frac{\alpha}{x_0}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \geq \sqrt{\alpha}, \forall x_0 > 0 \Longrightarrow \text{Εάν } x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha} \quad : (96.1)$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 - \alpha}{x_n}\right) \geq 0 \Rightarrow x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \; : (96.2)$$

Από τις σχέσεις (96.1) κ' (96.2) έχουμε ότι $\{x_n\}$ είναι μια <u>φθίνουσα</u> ακολουθία με $\inf_{n \geq 1} x_n = \sqrt{\alpha}$ <u>έτσι</u> $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{\alpha}$. Έτσι ο αλγόριθμος (96.0) για $\forall x_0 > 0$ θα συγκλίνει στο $\sqrt{\alpha}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Για $\forall x_0 < 0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = -\sqrt{\alpha}$

(ii) $\alpha = 2 \Rightarrow x_{n+1} = 0.5\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \ n \geq 0$

Θέτουμε $x_0 = 1$ κ' βρίσκουμε διαδοχικά:

$x_0 = 1.00000$

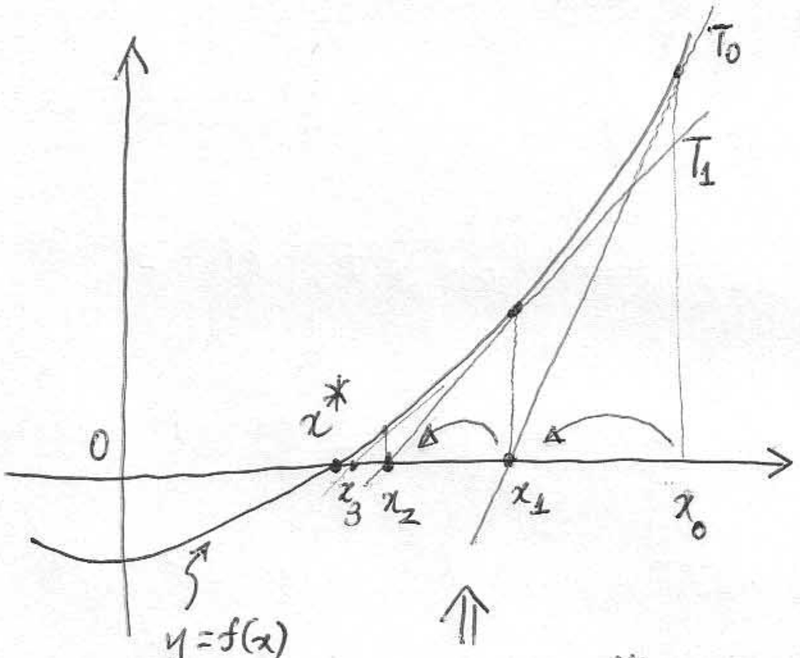
$x_1 = 1.50000$

$x_2 = 1.41667$ $\qquad |x_3 - x_4| = 0.00001 \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4} \Rightarrow$

$x_3 = 1.41422$ $\qquad \Rightarrow x^* = \sqrt{2} \approx 1.4142$

$x_4 = 1.41421$

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου NR



$\Uparrow$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

T_0 = η εξίσωση της $y=f(x)$ στο $x=x_0$

$\Downarrow$

$T_0: f'(x_0) = \dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0} \overset{y=0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{0-f(x_0)}{x_1-x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

$T_1: f'(x_1) = \dfrac{y-f(x_1)}{x-x_1} \overset{y=0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow f'(x_1) = \dfrac{0-f(x_1)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$ κλπ

Δοθέντος του x_0 υπολογίζουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στην $y=f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Στην συνέχεια παίρνουμε την τομή της εφαπτομένης με τον άξονα των x. Έτσι υπολογίζουμε το σημείο x_1. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το x_1 στη θέση του x_0, κ' υπολογίζουμε το x_2 κλπ.