

(ii) επειδή  $|x_{ii}^{(1)}| = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_{ii}^{(1)}|$  το πρώτο βήμα είναι ίδιο με το (i).

$[A^{(1)} | b^{(1)}] \rightarrow [A^{(2)} | b^{(2)}]$  όπως:  $|x_{32}| = 1.6670 = \max_{2 \leq i \leq 3} |x_{i2}^{(2)}| \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Εναλλάσσουμε την 2<sup>η</sup> με την 3<sup>η</sup> γραμμή κ' παίρνουμε:

$[A^{(2)} | b^{(2)}] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} [A^{(2)' | b^{(2)'}}] = \begin{bmatrix} 6.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 1.6670 & -1.3330 & 0.3334 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.3333 & 1.6670 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 0.0001\Gamma_2} \begin{bmatrix} 6.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 1.6670 & -1.3330 & 0.3334 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.3334 & 1.6670 \end{bmatrix}$

με προς τα πάνω αντικατάσταση παίρνουμε την προσεγγιστική λύση:  $x_1 = 2.6020, x_2 = -3.8010, x_3 = 5.0000$ .

Προσοχή:  $\det(A) = (-1)^4 \{ (6.0000) \times (1.6670) \times (-0.3334) \}$   
 $\nwarrow$  λόγω του  $\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3$

Παράδειγμα Να γραφεί κώδικος σε C++ που να επιλύει το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 28 \end{cases}$$

με απαλοιφή Gauss  
χωρίς μερική οδηγία.

```
#include <stdio.h>
#define n 3
```

```
int main()
```

```
{
  double A[n][n] = { {4.0, 2.0, -3.0},
                    {3.0, 1.0, 4.0},
                    {2.0, -4.0, 11.0} };
```

```
double b[n] = {1.0, 11.0, 28.0};
```

```
int i, j, k;
```

```
double x[n], G, sum;
```

// Απαλοιφή Gauss χωρίς μερική οδηγία

```
for (k=0; k<n-1; k++)
```

```
  for (i=k+1; i<n; i++)
```

```
    {
      G = -A[i][k]/A[k][k];
```

```
      for (j=k; j<n; j++) A[i][j] += G * A[k][j];
```

```
      b[i] += G * b[k];
    }
```

// Προς το πίσω αντικατάσταση

```
for (i=n-1; i>=0; i++)
```

```
{
  sum = b[i];
```

```
  for (j=i+1; j<n; j++) sum -= A[i][j] * x[j];
```

```
  x[i] = sum / A[i][i];
}
```

Παράδειγμα Δο' ο αλγορ. NR  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ,  
για την εύρεση της ρίζας  $x^*$  της εξίσωσης  $f(x) = 0$   
είναι γραμμικής σύγκλισης στην περίπτωση που το  $x^*$   
είναι ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας  $k > 1$  της  $f(x) = 0$ .

από την σελ 95 έχουμε ότι  $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad : (98.1)$

επειδή το  $x^*$  είναι ρίζα πολλαπλότητας  $k$  της  $f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = (x - x^*)^k h(x)$  με  $h(x^*) \neq 0, k \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = k(x - x^*)^{k-1} h(x) + (x - x^*)^k h'(x) \quad : (98.2) \\ f''(x) = k(k-1)(x - x^*)^{k-2} h(x) + 2k(x - x^*)^{k-1} h'(x) + (x - x^*)^k h''(x) \quad : (98.3) \end{cases}$

$(98.1) \Rightarrow g'(x) = \frac{(x - x^*)^k h(x) \{ k(k-1)(x - x^*)^{k-2} h(x) + 2k(x - x^*)^{k-1} h'(x) + (x - x^*)^k h''(x) \}}{\{ k(x - x^*)^{k-1} h(x) + (x - x^*)^k h'(x) \}^2}$   
 $= \frac{h(x) \{ k(k-1)h(x) + 2k(x - x^*)h'(x) + (x - x^*)^2 h''(x) \}}{\{ kh(x) + (x - x^*)h'(x) \}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |g'(x^*)| = \left| \frac{k(k-1)h(x^*)^2}{k^2 h(x^*)^2} \right| = \frac{k-1}{k} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  γραμμική σύγκλιση.

Παράδειγμα Δο' ο αλγορ. NR - πολλαπλότητας που δίνεται  
από την σχέση  $x_{n+1} = x_n - k \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  για την εύρεση της  
ρίζας  $x^*$  της εξίσ.  $f(x) = 0$  με  $f'(x_n)$  βαθμό πολλαπλότητας  $k \geq 1$   
είναι τουλάχιστον τετραγωνικής σύγκλισης.

$$x_{n+1} = g(x_n) \equiv x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$g'(x) = 1 - k \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - k + k \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad (99.1)$$

Επειδή  $f(x) = (x-x^*)^k h(x)$ ,  $h(x^*) \neq 0$   $k \geq 1$

$$(98.2)(98.3) \Rightarrow \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = \frac{k-1}{k} \Rightarrow \boxed{g'(x^*) = 0} \quad (99.1)$$

Άσκηση Τι μπορούμε να πούμε για την σύγκλιση του αλγορίθμου  $x_{n+1} = \frac{1}{3\alpha} \{ \alpha\beta + \sin(\alpha x_n) - \cos(\beta x_n) \}$

$$\left[ f(x) = 3\alpha x - \sin(\alpha x) + \cos(\beta x) - \alpha\beta = 0 \right. \\ \left. \text{ενώ } |g'(x)| < 1 \text{ όταν } \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 2 \right]$$

Άσκηση Δίνεται ο αλγ.  $x_{n+1} = x_n^3 + 6x_n^2 + (\beta+1)x_n + \gamma$ ,  $n \geq 0$  με δοσμένο  $x_0$ , για την εύρεση της αληθινής ρίζας  $x^*$  της  $f(x) = x^3 + 6x^2 + \beta x + \gamma = 0$ . Να βρεθούν  $\alpha, \beta, \gamma$  έτσι ώστε ο αλγ. να είναι 3<sup>ος</sup> τάξης σύγκλισης.

Άσκηση Να χρησιμοποιηθεί ο αλγ. NR για την εύρεση της  $x^* = \sqrt[3]{7}$  σε προσέγγιση 2 δψ με αρχική προσέγγιση  $x_0 = 1$

Άσκηση Η εξίσωση  $3x^3 - x^2 + 6x - 2 = 0$  έχει μία κ' μόνη ρίζα στο  $I = [0,1]$ . Να υπολογιστεί το ελάχιστο πλήθος των επαναλήψεων που απαιτείται με την μέθοδο της

διχοτομώτως για να βρεθεί η ρίζα  $x^*$  με προσέγγιση  
2 δψ κ' στην συνέχεια να βρεθεί.

100

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $b, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  θέλουμε να βρούμε  $x$ ,  
τέτοιο ώστε,  $Ax = b$  όταν το  $n$  είναι "μεγάλο"  
(ας πούμε  $n > 100$  είτε  $n > 1000$ ) η επίλυση του  $Ax = b$   
με αλγεβρικές μεθόδους ακόμα κ' με την βοήθεια Η/Υ  
είναι από την άποψη του χρόνου εκτέλεσης αδύνατη.  
Για αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν αριθμητικές μέθοδοι  
για την επίλυση γρ. συστ. Οι αριθμ. μεθ. χωρίζονται σε  
2 μεγάλες κατηγορίες τις άφερες κ' τις εμφερες.  
Στα επόμενα θεωρούμε ότι η ορίσωση  $\det(A) \neq 0$   
τότε  $x^* = x = A^{-1}b$  θα είναι μοναδική.

### ΕΥΣΤΑΘΗ Κ' ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Εάν,  $\det(A) \approx 0$ , στην ακριβεια δψ που εργαζόμαστε,  
το  $Ax = b$  λέμε ότι είναι ασταθές

Παράδειγμα: 
$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.000001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8.000001 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0.000002, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \quad : (100.1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.999999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8.000002 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A) = -0.000002, \quad x_1 = 10, \quad x_2 = -2 \quad : (100.2)$$

Αη λελθή βλέπουμε όη μικρή μεταβολή στους συν/στες  $A$  επιφέρει μεγάλη μεταβολή στην λύση  $x^*$ . Αυτό συμβαίνει γιατί η ορίζουσα (100.1) κ' (100.2) βρίσκονται στην περιοχή του μηδενός. (για την ακρίβεια των 5 εψ) . Τέτοια συστήματα καλούνται αεταδή.

Δεχόμαστε την λύση μόνο μη αεταδών συστημάτων που θα καλούνται ευσταδή.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss - Άμεση μέθοδος

(Gaussian elimination).

το 1<sup>ο</sup> "οδηγό" στοιχείο (pivot element)

$n=3$  :

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) \Gamma_1 \end{array}$$

το 2<sup>ο</sup> "οδηγό" στοιχείο

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) \Gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_3^{(3)} \end{array} \right]$$

όπου :  $A^{(2)} \equiv A, b^{(1)} \equiv b$

$[A^{(3)} | b^{(3)}]$

$$\begin{cases} a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, & 1 \leq j \leq 3, & a_{11}^{(1)} \neq 0 \\ a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, & 1 \leq j \leq 3 \\ a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}, & 2 \leq j \leq 3, & a_{22}^{(2)} \neq 0 \end{cases}$$

Τα συστήματα  $[A^{(1)} | b^{(1)}]$  κ'  $[A^{(3)} | b^{(3)}]$  εμφανώς έχουν την ίδια λύση, όπως το  $[A^{(3)} | b^{(3)}]$  είναι άνω τριγωνικό κ' λύνεται εύκολα με προς τα πίσω

αντικατάσταση (back-substitution)

$$(i) \quad \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{22}^{(2)} \alpha_{33}^{(3)} \neq 0 \quad \kappa'$$

$$x_i = \frac{1}{\alpha_{ii}^{(i)}} \left\{ b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^3 \alpha_{ij}^{(i)} x_j \right\}, \quad i=3, 2, 1$$

$$(ii) \quad \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq 2, \quad \alpha_{33}^{(3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0$$

← το τελευταίο οδηγό στοιχείο είναι μηδέν.

$$(iii) \quad \alpha_{11}^{(1)} = 0 \quad \eta' \quad \alpha_{22}^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Η μέθοδος σταματάει χωρίς αποτέλεσμα.}$$

Για γενικό  $n$  θα έχουμε:

$$(i) \quad \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0$$

$$x_i = \frac{1}{\alpha_{ii}^{(i)}} \left\{ b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij}^{(i)} x_j \right\}, \quad i=n, n-1, \dots, 2, 1$$

$$(ii) \quad \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \alpha_{nn}^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0$$

(iii) Εάν υπάρχει κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου  $\alpha_{ii}^{(i)} = 0$  για κάποιο  $1 \leq i \leq n-1$  η μέθοδος σταματάει χωρίς να μας δώσει απάντηση.

## Απαλοιφή Gauss με οδήγηση

(Gaussian elimination with pivoting)

Στη θεωρία που αναπτύξαμε μέχρι τώρα η εκλογή των οδηγών στοιχείων  $a_{ii}^{(k)}$  γίνεται κατά μήκος της κύριας διαγωνίου. Η διαδικασία, όμως, είναι δυνατό να σταματήσει, αν κάποιο από τα οδηγία στοιχεία (εκτός από το τελευταίο) είναι μηδέν.

Για την υπερνίκηση της δυσκολίας, που μπορεί να παρουσιαστεί έχουμε τις επόμενες παραλλαγές της μεθόδου:

### (A) Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση:

Εάν στο  $k$ -βήμα της μεθόδου συναντήσουμε  $a_{kk}^{(k)} \approx 0$  αναζητούμε  $\zeta = \max_{k \leq l \leq n} |a_{lk}^{(k)}|$ , που είναι το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή των στοιχείων της  $k$  στήλης (αρχίζοντας από την  $k$  γραμμή έως  $k'$  την  $n$  γραμμή). Έστω ότι  $\zeta = \max_{k \leq l \leq n} |a_{lk}^{(k)}| \equiv a_{\ell k}^{(k)}$  για κάποιο  $k \leq \ell \leq n$ , τότε εναλλάσσουμε τις  $k$  και  $\ell$  γραμμές κ' η μέθοδος συνεχίζεται. Υπάρχει όμως κ' άλλος λόγος που πρέπει να χρησιμοποιηθεί οδήγηση. Επειδή πολ/ζουμε την  $k$ -γραμμή με  $\frac{a_{\ell k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$  που τώρα μετά την εναλλαγή των  $k$  κ'  $\ell$  γραμμών θα ικανοποιηθεί,  $|\frac{a_{\ell k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}| \leq 1$ , τα σφάλματα στρογγυλοποίησης δεν μεγελώνουν περαιτέρω.



Παράδειγμα

Να λυθεί το 3x3 γραμ. συστ.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{με (i) απαλοιφή Gauss} \\ \text{χωρίς οδήγηση (ii) απαλοιφή} \\ \text{Gauss με μερική οδήγηση.} \end{array}$$

Να χρησιμοποιηθεί ακριβεία 4 ψηφ κ' η λύση του

(i) κ' (ii) να συγκριθεί με την ακριβή λύση:

$x_1 = 2.6, x_2 = -3.8, x_3 = -5.0 \quad \therefore (104.0)$

(i)

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 6.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 \\ 2.0000 & 0.6667 & 0.3333 & 1.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & -1.0000 & 0.0000 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 0.3333 \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 0.1667 \Gamma_1 \end{array}$$

$$[A^{(2)} | b^{(2)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 6.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.3333 & 1.6670 \\ 0.0000 & 1.6670 & -1.3330 & 0.3334 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 16670 \Gamma_2 \end{array}$$

$$[A^{(3)} | b^{(3)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 6.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.3333 & 1.6670 \\ 0.0000 & 0.0000 & 5555 & -27790 \end{array} \right]$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση παίρνουμε την προσεγγιστική λύση  $x_1 = 1.3350, x_2 = 0.0000, x_3 = -5.0030$ . Η μεγάλη απόκλιση από την προχρηστική λύση (104.0) οφείλεται στο γεγονός ότι ο όρος  $a_{22}^{(2)} = 0.0001$ , δεν είναι μηδέν, λόγω των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (το σχετικό σφάλμα είναι στην ουσία άπειρο)

```
int main()
```

```
{ double A[n][n] = { {4.0, 2.0, -3.0},
                    {3.0, 1.0, 4.0},
                    {2.0, -4.0, 11.0} };
  double b[n] = {1.0, 11.0, 28.0};
```

```
int i, j, k;
```

```
double X[n], sum;
```

// Gaussian elimination with no pivoting

```
for (k=0; k<n-1; ++k)
```

```
  for (i=k+1; i<n; ++i)
```

```
  { c = -A[i][k]/A[k][k];
```

```
    for (j=k; j<n; ++j) A[i][j] += c * A[k][j];
```

```
    b[i] += c * b[k];
```

```
  }
```

// back substitution

```
for (i=n-1; i>=0; i--)
```

```
{
```

```
  sum = b[i];
```

```
  for (j=i+1; j<n; j++) sum -= A[i][j] * X[j];
```

```
  X[i] = sum / A[i][i];
```

```
}
```

// Εκτύπωση της λύσης

```

for (i=0; i<n; i++)
    printf("x[%d] = %lf\n", i, x[i]);
    τετατη 0;
}

```

Άσκηση (i) Στον προηγούμενο κώδικα δεν παίρνουμε καθόλου υπόψη την περίπτωση κατά την οποία κάποιο  $\alpha_{kk}^{(k)} \approx 0$ . Αντιμετωπίστε αυτήν την περίπτωση κάνοντας την εκτέλεση του προγράμματος να σταματήσει εκτυπώνοντας κάποιο μήνυμα σφάλματος

(ii) Αντιμετωπίστε την περίπτωση  $\alpha_{kk}^{(k)} \approx 0$  κάνοντας μερική οδήγηση

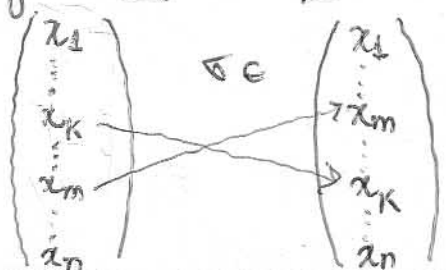
(B) Απαλοιφή Gauss με ολική οδήγηση (full pivoting)

Εάν στο  $k$ -βήμα της μεθόδου έχουμε  $\alpha_{kk}^{(k)} \approx 0$  αναζητούμε  $G = \max_{\substack{k \leq i \leq n \\ k \leq j \leq n}} |\alpha_{ij}^{(k)}|$  που είναι το μέγιστο κατ' απόλυτη πηγή στοιχείου του υποπίνακα

$A^{(k)} = (\alpha_{ij}^{(k)})$ ,  $k \leq i \leq n$ ,  $k \leq j \leq n$ . Έστω ότι  $G = \alpha_{\ell m}^{(k)}$

για κάποια  $k < \ell \leq n$ ,  $k < m \leq n$  τότε εναλλάσσουμε τις  $\underline{k}$  κ'  $\underline{\ell}$  γραμμές αλλά κ' τις  $\underline{m}$  κ'  $\underline{k}$  στήλες.

Προσοχή η εναλλαγή  $\underline{m}$  κ'  $\underline{k}$  στήλης προκαλεί κ' την εναλλαγή



Άσκηση Να λυθεί το  $Ax=b$ ,

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 28 \end{bmatrix}$  με απαλοιφή Gauss με μερική οδηγία

Νομοί διασυστήτων κ' πινάκων

$x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  (δηλαδή το  $x$  έχει γενικά μιγαδικές συνιστώσες)

Η norm ή "μέγεθος" του  $x$  είναι μια συν/ση

$\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times 1} \rightarrow [0, \infty)$  τέτοια ώστε:

(i)  $\|x\| > 0$  εκτός κ' αν  $x=0 \Leftrightarrow \|x\|=0$

(ii)  $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ ,  $\forall a \in \mathbb{C}$

(iii)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Μπορεί να δείχθει ότι για  $p \in [1, \infty]$   $\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p}$  είναι νόμιμα. Στην πράξη όμως χρησιμοποιούνται οι νομοί

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  δηλαδή:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  : (109.0)

$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  : (109.1)

Άσκηση : Να δείχθει η σχέση (109.1).

Νομοί πινάκων

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  τότε η συν/ση  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty)$  είναι

νόμιμα εάν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

(i)  $\|A\| > 0$  εκτός κ' αν  $A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$

(ii)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

(iii)  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad : (110.1)$

Η norm πίνακα βασίζεται στην αντίστοιχη norm διανυόμετος κατά την έννοια:

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι αντιστοιχες norm πίνακα των (109.0) κ' (109.1) είναι.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \text{maximum column sum.}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H \cdot A)}, \quad A^H = (A^*)^T = \text{ο συζυγής ανάστροφος}$$

$\rho(T) = \text{η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή}$   
 $= \text{η φασματική ακτίνα του πίνακα } T$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \text{maximum row sum.}$$

Σύγκλιση ακολουθιών διανυόμετων κ' πινάκων

Έστω  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$  κ'  $\{A^{(k)}\}_{k=0}^\infty$  ακολουθίες διανυόμετων κ' πινάκων αντίστοιχα. Θα λέμε ότι το  $x^{(k)}$  συγκλίνει στο όριο  $x$  κ'  $A^{(k)}$  στο όριο  $A$  εάν

$$(i) \quad \|x^{(k)} - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$$

|||

$$(ii) \quad \|A^{(k)} - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff A^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$$

ο μπεικός  
n x n

Θεώρημα: Εάν  $A^{(k)} \equiv A^k$  τότε  $A^k \rightarrow \mathcal{O} \iff \rho(A) < 1$

Θεώρημα: Εάν  $A^{(k)} \equiv A^k$  κ'  $\|A\| < 1 \Rightarrow A^k \rightarrow \mathcal{O}$

$$\|A^k\| = \|A \cdot A^{k-1}\| \stackrel{(110.1)}{\leq} \|A\| \cdot \|A^{k-1}\| = \|A\| \cdot \|A \cdot A^{k-2}\| \stackrel{(110.1)}{\leq}$$

$$\leq \|A\| (\|A\| \cdot \|A^{k-2}\|) = \|A\|^2 \|A^{k-2}\| \leq \dots \leq \|A\|^k \quad \text{έτσι}$$

Εάν  $\|A\| < 1 \Rightarrow \|A^k - \mathcal{O}\| \leq \|A\|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff$

$$\iff A^k \rightarrow \mathcal{O}$$

Άμεσες μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Εστώ  $Ax = b$  με  $\det(A) \neq 0$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$A \equiv B + C$  έτσι ώστε  $\det(B) \neq 0$ , ο  $B$  έχει "εύκολο" αντίστροφο

$$(B+C)x = b \iff Bx = -Cx + b \iff x = -B^{-1}Cx + B^{-1}b$$

ορίσουμε το επαναληπτικό σχήμα:

$$(III.1) : x^{(k+1)} = -B^{-1}Cx^{(k)} + B^{-1}b, \quad k \geq 0 \quad \text{κ' } x^{(0)} \text{ δεδομένο αρχικό διάνυσμα}$$

Εμφανώς εάν η ακολουθία  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  συγκλίνει, θα συγκλίνει στην μοναδική λύση του  $Ax = b$  διότι εάν

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}, \quad (III.1) \xRightarrow{\lim_{k \rightarrow \infty} (\cdot)} y = -B^{-1}Cy + B^{-1}b \iff Ay = b$$

ορισμός Ο πίνακας  $T \equiv -B^{-1}C$  ονομάζεται επαναληπτικός πίνακας του αλγορίθμου (III.1)

Ποιές οι ηρυσποδέσεις κάτω από τις οποίες ο αλγόριθμος  $x^{(k+1)} = T x^{(k)} + B^{-1}b$  θα παράγει ακολουθία  $\{x^{(k)}\}$  συγκλίνουσα?

$\epsilon^{(k)} = x^{(k)} - x$  = το διανυσματικό σφάλμα κατά την  $k$ -επανάληψη του αλγορίθμου.  
( $k'$   $x$  τέτοιο ώστε  $Ax = b$ )

$$\left. \begin{aligned} x^{(k+1)} &= T x^{(k)} + B^{-1}b \\ x &= T x + B^{-1}b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon^{(k+1)} = T \epsilon^{(k)} \Rightarrow \epsilon^{(k+1)} = T(T \epsilon^{(k-1)}) = T^2 \epsilon^{(k-1)}$$

Επαγωγικά λοιπόν  $\boxed{\epsilon^{(k)} = T^k \cdot \epsilon^{(0)}}$   $k'$  ερφεονώς  $x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \epsilon^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow T^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Προκτικό λοιπόν η ακολουθία διανυσμάτων  $\{x^{(k)}\}$  συγκλίνει στην λύση  $x$  του  $Ax = b$  εαν δοθέντος του  $T$  καταφέρουμε να δείξουμε ότι  $\|T\|_1 < 1$  είτε  $\|T\|_\infty < 1$  είτε  $\rho(T) < 1$ .  
Η ακολουθία αποκλίνει όταν δείξουμε ότι  $\rho(T) > 1$ .

Παράδειγμα Δίνεται ο αλγόριθμος  $x^{(k+1)} = T x^{(k)} + b$

με  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -13/36 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$   $k'$   $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (i) που κρησιμενία ο

αλγόριθμος (ii) Εξετάστε τον ως προς την σύγκλιση του.

$$x = Tx + b \Leftrightarrow Ax = b \quad \mu \in \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 13/36 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{113}$$

$$(ii) \quad \|T\|_1 = 49/36 > 1, \quad \|T\|_\infty = 2 > 1$$

όμως  $\rho(T) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = \max \left\{ |0|, \left| \frac{3+2i}{6} \right|, \left| \frac{3-2i}{6} \right| \right\}$

$$\chi_T(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \lambda + 13/36) = 0 = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1 \Rightarrow \text{Ο αλγόριθμος συγκλίνει στην λύση του } Ax = b.$$

### Η μέθοδος του Jacobi

$$A = L + D + U \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{αυστηρά πάνω} \\ \text{τριγωνικός } U_{ii} = 0 \end{array} \right. , \quad \left( \text{Εάν } \det(B) \neq 0 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{αυστηρά} \\ \text{κάτω τριγωνικός} \\ (L_{ii} = 0) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Διαγώνιος} \\ \text{C} \equiv L + U \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \equiv D \\ C \equiv L + U \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, & T \equiv -D^{-1}(L+U) \\ x^{(0)} = \text{αυθαίρετο διάνυσμα (ευνόμιως το μηδενικό)} \end{cases}$$

Η αναλυτική μορφή του αλγ. του Jacobi θα είναι:

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j = b_i$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right\}, & k=0,1,2,\dots \\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$



Παράδειγμα Αφού αποδοχθεί ότι η μέθοδος του Jacobi

για την επίλυση του συστήματος 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

συγκλίνει να βρεθεί με την μέθοδο αυτή η λύση με προσέγγιση 2 δεφ

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = -D^{-1}(L+U) = - \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή  $\|T\|_1 = 2/3 < 1 \Rightarrow$  Η μέθοδος Jacobi συγκλίνει.

Ο αλγόριθμος σε αναλυτική μορφή θα είναι:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3} (5 - 2x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2} (3 - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} (3 - x_1^{(k)}) \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots$$

Ενώ θέτουμε  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  τότε

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 1.500 \\ 1.500 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.750 \\ 0.666 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.167 \\ 1.167 \\ 1.166 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.917 \\ 0.916 \end{pmatrix}$$

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.055 \\ 1.042 \\ 1.056 \end{pmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.972 \\ 0.972 \\ 0.972 \end{pmatrix}, \quad x^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.019 \\ 1.014 \\ 1.014 \end{pmatrix}, \quad x^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.991 \\ 0.993 \\ 0.991 \end{pmatrix}$$

$$x^{(9)} = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 1.004 \\ 1.004 \end{pmatrix}, \quad x^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.998 \\ 0.998 \end{pmatrix}, \quad x^{(11)} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 1.001 \\ 1.002 \end{pmatrix}$$

Επειδή:  $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_\infty > 0.5 \times 10^{-2}, k=0,1,\dots,9$  ενώ  $\|x^{(10)} - x^{(11)}\|_\infty \leq 0.5 \times 10^{-2}$ , δε έχουμε ότι:  $x \approx x^{(11)}$

Άσκηση: Να ελεγχθεί αν η μέθοδος Jacobi για το σύστημα

$$(i) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 6.5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

συγκλίνει. [ Απάντηση (i)  $\rho(T) \approx 0.75 < 1$  ]  
 (ii)  $\rho(T) \approx 1.1 > 1$

Η μέθοδος των Gauss-Seidel

(εάν  $\det(B) \neq 0$ )

Έδω  $A = L + D + U$  με  $\begin{matrix} B \equiv L + D \\ C \equiv U \end{matrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1} U x^{(k)} + (L+D)^{-1} b, \quad k=0,1,2,\dots \\ T \equiv -(L+D)^{-1} U, \quad x^{(0)} = \text{αυθαίρετο}, \end{cases}$$

Η αναλυτική μορφή θα είναι:

$$(L+D)x = -Ux + b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j$$

$$\Leftrightarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$\uparrow$  από την  $k+1$  επανάληψη       $\uparrow$  από την  $k$  επανάληψη

Παράδειγμα Δ.ό' η μέθοδος Gauss-Seidel για την επίλυση του συστήματος  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$  συγκλίνει.

Να βρεθεί η προσεγγιστική λύση με ακρίβεια 2 δεφ.

Εύκολο βρίσκουμε ότι  $(L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$T \equiv -(L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Επειδή  $\|T\|_{\infty} = 2/3 < 1 \Rightarrow \circ$  αλγορ. συγκλίνει.

Σε αναλυτική μορφή ο αλγορ. είναι: (συγκρίνετε με τον αλγόριθμο (14.1)).

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3} (5 - 2x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2} (3 - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} (3 - x_1^{(k+1)}) \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 1.500 \\ 0.666 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 1.167 \\ 1.167 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.917 \\ 1.056 \end{pmatrix}, x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.055 \\ 0.972 \\ 0.973 \end{pmatrix}$

$x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.019 \\ 1.014 \\ 0.991 \end{pmatrix}, x^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.991 \\ 1.004 \\ 1.004 \end{pmatrix}, x^{(7)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.999 \\ 1.002 \end{pmatrix}, x^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{pmatrix}$

Επειδή  $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_{\infty} > 0.5 \times 10^{-2} \quad k = 0, 1, \dots, 6$  ενώ

$\|x^{(7)} - x^{(8)}\|_{\infty} \leq 0.5 \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{x \approx x^{(8)}}$

Στα παραδείγματα των βελ. 114 κ' 116 προσεγγίστε  
 η λύση του ίδιου γραμ. συστ. με την μέθοδο Jacobi κ'  
 Gauss-Seidel αντίστοιχα. Η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλι-  
 νει γρηγορότερα από την Jacobi στα παραδείγματα αλλά  
 αυτό δεν ισχύει πάντα.

Είναι δυνατό η Jacobi να είναι ταχύτερη της Gauss-Seidel  
 ή ακόμη, η Jacobi να συγκλίνει κ' να μην συγκλίνει  
 η Gauss-Seidel.

Εάν κ' οι δύο μέθοδοι συγκλίνουν, ταχύτερη είναι η  
 μέθοδος με την μικρότερη φασματική ακτίνα

Άσκηση: Να δείχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος του  
 Jacobi όταν εφαρμοστεί στο σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$
  
 συγκλίνει.

Άσκηση: Ένα πίνακας  $A$  λέγεται αυστηρά διαγώνιος  
 υπερτερών όταν  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n$ . Να δείχθεί  
 ότι για τέτοιον πίνακα η μέθοδος του Jacobi δίνει πάντα  
 ακολουθία  $\{x_k\}$  που συγκλίνει.

Άσκηση Να βρεθεί προσεγγιστική λύση με ακρίβεια 2 δεφ  
 με την μέθοδο Gauss-Seidel στο  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$   
 (αποδείξτε πρώτα ότι η μέθοδος συγκλίνει).

```
for (i=0; i<N; i++) X[i] = 0.0;
```

```
for (K=1; K<=MAXIT; K++)
```

```
{
```

```
for (I=0; I<N; I++)
```

```
{
```

```
sum = 0.0;
```

```
for (J=0; J<N; J++) if (J!=I) sum += A[I][J]*X[J];
```

```
Y[I] = (b(I) - sum) / A[I][I];
```

```
}
```

```
ERROR = fabs(X[0] - Y[0]);
```

```
for (I=1; I<N; I++)
```

```
if (ERROR < fabs(X[I] - Y[I])) ERROR = fabs(X[I] - Y[I]);
```

```
if (ERROR <= EPS)
```

```
{
```

```
for (I=0; I<N; I++) printf("X[%d] = %lf\n", I, X[I]);
```

```
break;
```

```
}
```

```
for (I=0; I<N; I++) X[I] = Y[I];
```

```
}
```

Jacobi



Gauss-Seidel.



```
for (J=0; J<N; J++)
```

```
if (J<I) sum += A[I][J]*X[J];
```

```
else
```

```
if (I>J) sum += A[I][J]*Y[J];
```