Μια σ-άλγεβρα (σ-field) πάνω στο Ω είναι μια οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω τώ

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$ (iii) $\{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$, $|I| \leq \infty$

Παρ $\{A_i\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{A_i'\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i' \in \mathcal{F} \Rightarrow (\bigcup_i A_i')' = \bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$

$\Omega = \{$ όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος $\}$

$\Downarrow$

$\mathcal{F} = \{$ Οι πιθανές ερωτήσεις που μπορεί κάποιος να κάνει για το πείραμα $\}$

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow AB' \in \mathcal{F}$ $\quad A \setminus B = AB'$

Παρ. $A, B \in \mathcal{F}$, $A, B \subset \Omega$ (σε γενική θέση).

Ποιο το σ-πεδίο που παράγεται από το $\{A, B\}$.

$\{\emptyset, A, B\}$

$\downarrow$

$\{\emptyset, A, A', B, B', \Omega\}$

$\downarrow$

$\{\emptyset, A, A', B, B', A \cup B, A \cup B', A' \cup B, A' \cup B', \Omega\}$

$\downarrow$

$\{\emptyset, A, A', B, B', A \cup B, A \cup B', A' \cup B, A' \cup B',$
$A'B', A'B, AB', AB,$
$AB \cup A'B', \underbrace{A'B \cup AB'}, \Omega\}$ $\quad \overbrace{A'(A \cup B) \cup B'(A \cup B)}$

$(AB \cup A'B')' = (AB)'(A'B')' = (A' \cup B')(A \cup B)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ = η άλγεβρα Borel

Η άλγεβρα που περιέχει την κλάση όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$ για $x \in \mathbb{R}$.

Το $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει όλα τα μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (τα μη μετρήσιμα είναι τα Vitali sets).

Το μέτρο πιθ. είναι μια συν/ση $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ τώ $P(\Omega) = 1$ κ' $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$, $A_i A_j = \emptyset$, $\forall \{A_i\} \in \mathcal{F}$

<u>Παρ</u> $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R} \cap [0,1])$, P = Lebesgue measure

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ = Χώρος πιθανότητας $P([a,b]) = b - a$

<u>Άσκ</u> (1) $\{A_i\} \in \mathcal{F}$; $A_i \subset A_{i+1} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(2) $\{A_i\} \in \mathcal{F}$; $A_i \supset A_{i+1} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(3) $\left.\begin{array}{l} \{A_i\} \in \mathcal{F}, \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \\ B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \text{tail event} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$

(1)
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(A_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} \setminus A_i)\right)\right) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[P(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1} \setminus A_i)\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \quad : (2.1)$$

(2)
$$A_i \supset A_{i+1} \Leftrightarrow A_i' \subset A_{i+1}' \overset{(2.1)}{\Rightarrow} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n') \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(A_n)] \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n} P(A_n) \quad : (2.2)$$

(3) $B_n \supset B_{n+1} \overset{(2.3)}{\Rightarrow} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_n P(B_n) = \lim_n P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le$

$\le \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \lim_n P(A_n) = 0$

Ορσ 1.3 Η συν/ση $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη εάν $\{\xi \in B\} \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε εάν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας $\xi = $ τ.μ.

Ορσ 1.4 The σ-field $\sigma(\xi) = \sigma\{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, είναι το σ-πεδίο που παράγεται από την ξ τμ.

Ορσ 1.5 Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογ. τμ $\{\xi_i\}_{i \in I}$, είναι η ελάχιστη σ-αλγ. που περιέχει όλα τα ενδεχόμενα της μορφής $\{\xi_i \in B\}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i \in I$

$$\sigma(\{\xi_i\}_{i \in I}) = \sigma\{\{\xi_1 \in B\}, \{\xi_2 \in B\}, \dots : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Ασκ Η συν/ση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel εάν $\{f \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε κ' οι Borel συν/σεις της τμ ξ είναι $\sigma(\xi)$-μετρήσιμες.

$$\underbrace{\{f(\xi) \in B\}}_{\{\omega \in \Omega : f \circ \xi(\omega) \in B\}} = \{\xi \in f^{-1}(B)\} = \{\xi \in \underbrace{\{f \in B\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\} \in \sigma(\xi)$$

$$\underbrace{\Omega \xrightarrow{\xi} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f \circ \xi = f(\xi)}$$

<u>ορ6</u>: Κάθε τμ $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ <u>παράγει</u> ένα μέτρο πιθανότητας

$$P_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$$

$$P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B)) = P\{\xi\in B\}, \ \forall\, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\xi^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "P_\xi(\cdot) = P\{\xi\in\cdot\} = P\circ\xi^{-1}(\cdot)"'] & \sigma(\xi) \arrow[r, "P"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Η συν/ση $F_\xi(x) = P\{\xi\le x\} = P\{\omega\in\Omega: \xi(\omega)\in(-\infty,x]\}$

$$= P\left(\xi^{-1}(-\infty,x]\right) = P_\xi\left((-\infty,x]\right)$$

ονομάζεται συν/ση <u>κατανομής</u> της ξ.

<u>Παρατήρηση</u> $P_\xi(dx) = P_\xi\left((x,x+dx]\right) = P\{x<\xi\le x+dx\}$

$= P\{\xi\le x+dx\} - P\{\xi\le x\} = F_\xi(x+dx) - F_\xi(x) = dF_\xi(x) = f_\xi(x)\,dx$

$\Rightarrow \boxed{f_\xi(x) = \dfrac{P_\xi(dx)}{dx}} \Leftrightarrow$ Η ξ είναι τ.μ. με απόλυτα συνεχή κατανομή.

$$P_\xi(B) = P\{\xi\in B\} = P(\xi^{-1}(B)) = \int_{\xi^{-1}(B)\ni\omega=\xi^{-1}(x)} P(d\omega) =$$

$$= \int_{\xi^{-1}(B)\ni\omega} P\left((\omega,\omega+d\omega]\right) = \int_{\xi^{-1}(B)\ni\omega=\xi^{-1}(x)} P\left(\xi^{-1}(x,x+dx]\right) = \int_{B\ni x} P_\xi(dx)$$

$$= \int_{B\ni x} \frac{P_\xi(dx)}{dx}\,dx = \int_{B\ni x} f_\xi(x)\,dx$$

(i) Εαν υπάρχει συν/ση Borel $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ τώ

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} = \int_{\{\xi \in B\} \ni \omega} P(d\omega) = \int_{B \ni x} f_\xi(x)dx \quad \text{τότε}$$

η τμ ξ λεγεται τ.μ. με απολυτα συνεχη κατανομή κ' η f_ξ θα είναι η πυκνότητα της ξ.

(ii) Εαν υπάρχει ακολουθία διαφορετικών μεταξύ τους πραγματικών αριθμών $\{x_1, \dots\} = \xi(\Omega)$ τώ

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ P_\xi(B) = P\{\xi \in B\} = \sum_{\omega \in \{\xi \in B\}} P(\{\omega\}) = \sum_{x \in B} P\{\xi = x\}$$

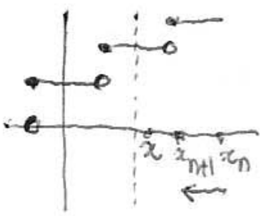
τότε η ξ λεμε ότι έχει διακριτή κατανομή κ' συν/ση μάζας $p_\xi(x_i) = P\{\xi = x_i\}$.

<u>Ασκ</u> Δείξτε ότι η συν/ση κατανομής $F_\xi(\cdot)$ είναι

(i) <u>Μη φθίνουσα</u>

$$x \le y \Leftrightarrow (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y] \Leftrightarrow \xi^{-1}(-\infty, x] \subseteq \xi^{-1}(-\infty, y] \Leftrightarrow$$
$$\{\xi \le x\} \subseteq \{\xi \le y\} \Leftrightarrow P\{\xi \le x\} \le P\{\xi \le y\} \Leftrightarrow F_\xi(x) \le F_\xi(y)$$

(ii) <u>Συνέχεια από τα δεξιά</u>



$$x_{n+1} \le x_n \Rightarrow \{\xi \le x_{n+1}\} \subseteq \{\xi \le x_n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\xi \le x_i\} = \{\xi \le \lim_n x_n\} \xrightarrow{P(\cdot)} F_\xi(\lim_n x_n) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\xi \le x_i\}\Big)$$
$$= \lim_n P\{\xi \le x_n\} = \lim_n F_\xi(x_n)$$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = \lim_{n \to \infty} F_\xi(-n) = \lim_n P\{\xi \le -n\} = P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\xi \le -i\}\Big) = P(\emptyset) = 0$

(iv) $\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = \lim_n F_\xi(n) = \lim_n P\{\xi \le n\} = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\xi \le i\}\Big) = P(\Omega) = 1$

<u>Παρ</u> Δείξτε ότι εαν $\xi_1,\dots,\xi_n$ ανεξ τ/μ τότε $F_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n) =$

$$= \prod F_{\xi_i}(x_i)$$

$$F_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = P\{\xi_1 \le x_1,\dots,\xi_n \le x_n\}$$

$$\{\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n\} = \{\omega\in\Omega : \xi_1(\omega)\in(-\infty,x_1],\dots,\xi_n(\omega)\in(-\infty,x_n]\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \xi_i^{-1}((-\infty,x_i]) = \bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i \le x_i\}$$

$$F_{\xi_1\dots\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i\le x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \le x_i\} = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$$

<u>Παρ</u> Εαν η $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ έχει απολυτα συνεχή κατανομή

Δό $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} F_{\xi_1\xi_2}(x,y) = f_{\xi_1\xi_2}(x,y)$

$$P_{\xi_1\xi_2}(dx,dy) = P\{x<\xi_1\le x+dx,\ y<\xi_2\le y+dy\} = \int_x^{x+dx}\int_y^{y+dy} f_{\xi_1\xi_2}(u,v)\,du\,dv$$

$$= f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\int_x^{x+dx}\int_y^{y+dy} du\,dv = f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dx\,dy$$

$$P_{\xi_1\xi_2}(dx,dy) = P\{\xi_1\le x+dx,\ y<\xi_2\le y+dy\} - P\{\xi_1\le x,\ y<\xi_2\le y+dy\} =$$

$$= \left(P\{\xi_1\le x+dx,\ \xi_2\le y+dy\} - P\{\xi_1\le x+dx,\ \xi_2\le y\}\right)$$

$$- \left(P\{\xi_1\le x,\ \xi_2\le y+dy\} - P\{\xi_1\le x,\ \xi_2\le y\}\right)$$

$$= \left(F_{\xi_1\xi_2}(x+dx,y+dy) - F_{\xi_1\xi_2}(x+dx,y)\right) - \left(F_{\xi_1\xi_2}(x,y+dy) - F_{\xi_1\xi_2}(x,y)\right)$$

$$\simeq \frac{\partial F_{\xi_1\xi_2}(x+dx,y)}{\partial y}dy - \frac{\partial F_{\xi_1\xi_2}(x,y)}{\partial y}dy = \frac{\partial^2 F_{\xi_1\xi_2}(x,y)}{\partial y\partial x}dx\,dy$$

<u>Παρ</u> (Περιθωριοποίηση)

$$P_{\xi_1}(dx) = P\{x<\xi_1\le x+dx\} = P\left(\{x<\xi_1\le x+dx\}\cap\overbrace{\{\xi_2\in\mathbb{R}\}}^{\Omega}\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\ni y} \left(\int_x^{x+dx} f_{\xi_1\xi_2}(u,y)\,du \right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}\ni y} f_{\xi_1\xi_2}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$P_{\xi_1}(dx) = f_{\xi_1}(x)\,dx$$

<u>αλλιώς</u> $\int_Y \pi(x,y)\,dy = \pi(x) \int_Y \pi(y|x)\,dy = \pi(x)$

<u>ορσ</u> Μια τμ $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, εάν: $\int_{\Omega\ni\omega} |\xi(\omega)|\,P(d\omega) < \infty$

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = \underset{\text{τιμή της } \xi}{\text{η αναμενόμενη}} = \int_{\mathbb{R}} x\,P_\xi(dx)$$

$P_\xi(dx) = f_\xi(x)\,dx$ <u>ή</u> $P_\xi(dx) = \sum_i p_i \delta_{x_i}(dx)$ ← Dirac distribution

<u>ορσ</u> Το ολοκλήρωμα κατά Lebesgue

$$\begin{cases} \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = \sup\limits_{S \le \xi} \int_\Omega S(\omega)P(d\omega) = \sup\limits_{S \le \xi} \sum_i s_i \int_{A_i} P(d\omega) = \sup\limits_{S \le \xi} \sum_i s_i P(A_i) \\ S = \sum_i s_i \mathbb{1}_{A_i} \;;\; \bigcup_i A_i = \Omega,\; A_i A_j = \emptyset \end{cases}$$

Το $Var(\xi) < \infty$ όταν $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \Leftrightarrow \int_\Omega |\xi(\omega)|^2 P(d\omega) < \infty$

αυτό γιατί $Var(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2$, <u>δηλ. θα πρέπει να ισχύει</u> $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Πράγματι από την Cauchy-Schwartz $\mathbb{E}(\xi\eta)^2 \le \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(|\xi|)^2 = \mathbb{E}(|\xi| \cdot 1)^2 \le \mathbb{E}(|\xi|^2)\mathbb{E}(1^2) = \mathbb{E}(|\xi|^2).$$

Ασκ Δείξτε την Cauchy - Schwartz

$$f(\alpha) = \mathbb{E}\{(\xi - \alpha\eta)^2\} \geq 0 \Rightarrow f(\alpha) = \mathbb{E}(\eta^2)\alpha^2 - 2\mathbb{E}(\xi\eta)\alpha + \mathbb{E}(\xi^2) \geq 0$$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^* = \mathbb{E}(\xi\eta)/\mathbb{E}(\eta^2) \quad \kappa' \; f''(\alpha^*) > 0 \Rightarrow$$

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\alpha) = f(\alpha^*) \geq 0 \Rightarrow f(\alpha^*) = \mathbb{E}(\eta^2)\frac{\mathbb{E}(\xi\eta)^2}{\mathbb{E}(\eta^2)^2} - 2\frac{\mathbb{E}(\xi\eta)^2}{\mathbb{E}(\eta^2)} + \mathbb{E}(\xi^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(\xi\eta)^2 \leq \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)$$

Ασκ Δ.ό. εαν $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}(X^k) = k\int_{\mathbb{R}^+} t^{k-1} P\{X > t\} dt$, $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}^+} t^k P_X(dt) = -\int_{\mathbb{R}^+} t^k dP\{X > t\} = \lim_{\alpha \to \infty}\left(-\int_0^\alpha t^k dP\{X > t\}\right)$$

$$-\int_0^\alpha t^k dP\{X > t\} = -\underbrace{\left[t^k P\{X > t\}\right]_0^\alpha}_{\alpha^k P\{X > \alpha\}} + k\int_0^\alpha t^{k-1} P\{X > t\} dt$$

$$0 \leq \alpha^k P\{X > \alpha\} = \alpha^k \int_{\{X > \alpha\}} P(d\omega) \leq \int_{\{X > \alpha\}} X(\omega)^k P(d\omega) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} \int_{\varnothing} X(\omega)^k P(d\omega) = 0$$

Ασκ Δ.ό. Εαν οι τμ X, Y είναι ανεξ. τότε κ' τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ είναι ανεξ, $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P\{X \in A, Y \in B\} = \int_{A \ni x}\int_{B \ni y} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx \overset{\text{ανεξ}}{=}$$

$$= \int_A f_X(x)dx \int_B f_Y(y)dy = P\{X \in A\} P\{Y \in B\}$$