<u>Ορσ</u> $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ κ' σ-field $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ τοτε η δεσμευμένη μέση τιμή της ξ δοθέντος του σ-field $\mathcal{G}$ είναι τ.μ. $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω.

(i) $\sigma(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})) \subset \mathcal{G}$ <u>δηλ</u> είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.

(ii) $A \in \mathcal{G}$, $\int_A \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})(\omega) P(d\omega) = \int_A \xi(\omega) P(d\omega)$

<u>Ασκ 2.10</u> Εάν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\xi)$

$$A = \Omega \Rightarrow \int_\Omega \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) dP = \int_\Omega \xi dP = \mathbb{E}(\xi) = \int_\Omega \mathbb{E}(\xi) dP \Rightarrow \int_\Omega \overbrace{(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi))}^{\mathcal{G}\text{-measurable}} dP = 0$$

$$A = \emptyset \Rightarrow \int_\emptyset \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) dP = \int_\emptyset \xi dP = 0 = \mathbb{E}(\xi) \cdot \overbrace{\int_\emptyset dP}^{0} = \int_\emptyset \mathbb{E}(\xi) dP \Rightarrow \int_\emptyset (\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\xi)) dP = 0$$

$$\overset{(\text{Lem. }2.1)}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\xi) = \text{const}.$$

<u>Ασκ 2.11</u> (*) Εαν $\xi = \mathcal{G}$-measurable $\Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi$, P-α.σ.

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ είναι $\mathcal{G}$-meas απο τον ορσ $\Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) - \xi = \mathcal{G}$-meas.

$\forall B \in \mathcal{G}$: $\int_B (\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) - \xi) dP = 0$ $\Rightarrow$

$$\overset{(\text{Lem. }2.1)}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \xi, \ P\text{-α.σ}$$

<u>Ασκ 2.12</u> Εαν $B \in \mathcal{G}$ δ.δ. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|B] = \mathbb{E}[\xi|B]$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) dP \overset{B \in \mathcal{G}}{=} \frac{1}{P(B)} \int_B \xi dP = \mathbb{E}[\xi|B]$$

(*) $$\mathbb{E}(\xi|\{x < \xi \le x+dx\}) = \frac{1}{P\{x<\xi\le x+dx\}} \int_{\{x<\xi\le x+dx\}} \xi(\omega) P(d\omega) =$$

$$= \frac{\int_x^{x+dx} u f_\xi(u) du}{\int_x^{x+dx} f_\xi(u) du} = x$$

$$\mathbb{E}(\xi \mid \{\xi = x_i\}) = \frac{1}{P\{\xi = x_i\}} \int_{\{\xi = x_i\}} \xi(\omega) P(d\omega) = x_i$$

Γενικές ιδιότητες

(i) $\boxed{\mathbb{E}(\alpha\xi + b\eta \mid \mathcal{G}) = \alpha\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})}$ (linearity)

$\forall B \in \mathcal{G}$, $\int_B \mathbb{E}(\alpha\xi + b\eta\mid\mathcal{G})\,dP = \int_B (\alpha\xi + b\eta)\,dP = \alpha\int_B \xi\,dP + b\int_B \eta\,dP =$

$= \alpha\int_B \mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G})\,dP + b\int_B \mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})\,dP = \int_B \{\alpha\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})\}\,dP$

$\eta \equiv \mathbb{E}(\alpha\xi + b\eta\mid\mathcal{G}) - (\alpha\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})) = \mathcal{G}\text{-meas}$ $\Rightarrow$

$\underset{\text{Lem 2.1}}{\Rightarrow}$ $\eta = 0$ P-α.s. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}(\alpha\xi + b\eta\mid\mathcal{G}) = \alpha\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})$ P-α.s.

(ii) $\boxed{\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G})] = \mathbb{E}(\xi)}$ (Consequtive expectations)

$\forall B \in \mathcal{G}$, $\int_B \mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G})\,dP = \int_B \xi\,dP \overset{\Omega\in\mathcal{G}}{\Rightarrow} \int_\Omega \mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G})\,dP = \int_\Omega \xi\,dP \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi\mid\mathcal{G})] = \mathbb{E}(\xi)$

(taking out what is known)

(iii) if $\xi = \mathcal{G}$-meas $\boxed{\sigma(\xi) \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta\mid\mathcal{G}) = \xi\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})}$

If $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \xi = \mathbb{1}_A$, $\sigma(\xi) \subset \mathcal{G}$

$\forall B \in \mathcal{G}$, $\int_B \underbrace{\mathbb{1}_A \mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})}_{\mathcal{G}\text{-meas}}\,dP = \int_{AB} \mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})\,dP = \int_{AB} \eta\,dP = \int_B \mathbb{1}_A \eta\,dP = \int_B \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\eta\mid\mathcal{G})}_{\mathcal{G}\text{-meas}}\,dP$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\eta\mid\mathcal{G}) = \mathbb{1}_A\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})$ P-α.s.

Εάν S είναι simple δηλ. $S = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\mathbb{E}(S\eta\mid\mathcal{G}) = \mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}\Big)\eta \,\Big|\, \mathcal{G}\Big\} = \sum_j \alpha_j \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j}\eta\mid\mathcal{G}) = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G}) = S\,\mathbb{E}(\eta\mid\mathcal{G})$$

Άρα για όλες τις simple τμ στο $\mathcal{G}$ έχουμε:

$$\mathbb{E}(s\xi|\mathcal{G}) = s\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_B \mathbb{E}(s\xi|\mathcal{G})\,dP = \underbrace{\int_B s\xi\,dP = \int_B s\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\,dP}$$

$$\Big\Downarrow \sup_{s\le \zeta}(\cdot)$$

$$\int_B \underbrace{\mathbb{E}(\zeta\xi|\mathcal{G})}_{\mathcal{G}\text{-meas}}\,dP = \int_B \zeta\xi\,dP = \int_B \underbrace{\zeta\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})}_{\mathcal{G}\text{-meas}}\,dP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\zeta\xi|\mathcal{G}) = \zeta\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) \text{ όταν } \sigma(\zeta)\subset\mathcal{G}$$

(iv) $\boxed{\text{Εάν } \zeta \text{ κ' } \mathcal{G} \text{ ανεξ } (\sigma(\zeta) \text{ κ' } \mathcal{G} \text{ ανεξ}) \text{ τότε } \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\zeta)}$

$$\forall B\in\mathcal{G},\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\zeta) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)\mathbb{E}(\zeta) = P(B)\,\mathbb{E}(\zeta) \Rightarrow \mathbb{E}(\zeta) = \frac{1}{P(B)}\mathbb{E}(\mathbb{1}_B\zeta) =$$

$$= \frac{1}{P(B)}\int_B \zeta\,dP = \mathbb{E}(\zeta|B) \Rightarrow \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\zeta)$$

(tower property)

(v) $\boxed{\mathcal{H}\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G})|\mathcal{H}\big] = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{H})}$

$$\left.\begin{aligned} &\int_B \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{H})\,dP = \int_B \zeta\,dP,\ \forall B\in\mathcal{H} \\ &\int_{\mathcal{H}\ni B} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G})|\mathcal{H}\big]\,dP = \int_{\mathcal{G}\ni B} \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G})\,dP = \int_B \zeta\,dP \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_B \underbrace{\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G})|\mathcal{H}\big]}_{\mathcal{H}\text{-meas}}\,dP = \int_B \underbrace{\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{H})}_{\mathcal{H}\text{-meas}}\,dP \overset{\text{(Lemma 1)}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{G})|\mathcal{H}\big] = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{H}) \quad P\text{-a.s.}$$

(vi) $\boxed{\xi \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) \geq 0 \quad P\text{-as}}$: (20.1)

Εστω $A \equiv \{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})<0\} \in \mathcal{G}$

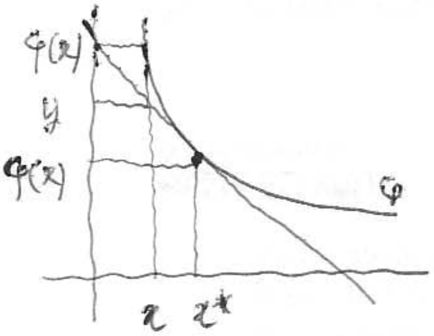
$$\int_A \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\,dP = \int_A \xi\,dP \Rightarrow P(A)=0$$

Thm 2.2 Jensen's Ineq

$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή (convex) $\quad (\varphi \in D^2 \Rightarrow \varphi'' > 0)$

$0 \leq \lambda \leq 1: \quad \varphi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$

Εαν $\xi, \varphi(\xi) \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \Rightarrow \varphi(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(\xi)|\mathcal{G})$



$x^* = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$

$\xi(\Omega) = \mathrm{Dom}(\varphi)$

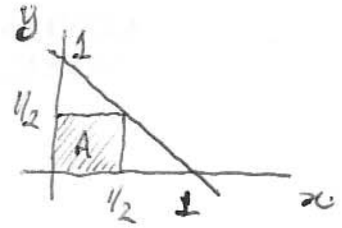
$$\varphi(x) \geq y = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x-x^*) \xRightarrow{\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})}$$

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})) + \varphi'(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}))(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(20.1)} \mathbb{E}(\varphi(\xi)|\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}))$$

Ασκ 2.13 Η κα Jones εψηφε πιτα για τους 2 γιούς της. Εαν κάποιος φάει περισσότερη της μισής πίτας θα αρρωστήσει. Ερχεται πρώτα ο ένας από τους δύο γιούς κ' τρώει ένα κομμάτι απο την πίτα. Στην συνέχεια έρχεται ο δεύτερος γιος κ' τρώει ένα κομμάτι απο αυτό που άφησε ο αδελφός του. Ποιο το αναμενόμενο μέγεθος του κομματιού που απομένει εαν κανείς από τους γιους δεν αρρώστησε?

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x+y\leq 1\}$



$A = \{$κανείς δεν αρρωσταίνει$\} =$
$= \{(x,y)\in\Omega : 0\leq x\leq 1/2,\ 0\leq y\leq 1/2\}$

$x \sim \mathcal{U}(\cdot|0,1) \Rightarrow y|x \sim \mathcal{U}(\cdot|0,1-x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi(x,y) = \pi(x)\pi(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y \le 1 \\ 0 & , \text{ elsewhere} \end{cases}$$

Θέτουμε $\xi = \xi(\underbrace{x,y}_{\omega}) = 1 - x - y$ = το κομμάτι που απέμεινε

$$\mathbb{E}(\xi|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi \, dP = \frac{1 - \ln(2)/2}{2\ln(2)}$$

$$P(A) = \int_{y=0}^{1/2} \int_{x=0}^{1/2} \left(\frac{dx\,dy}{1-x} \right) = \ln(2), \quad \int_A \xi\, dP = \int_{x=0}^{1/2} \int_{y=0}^{1/2} (1-x-y)\left(\frac{dx\,dy}{1-x}\right) = \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - y\ln(2)\right) dy = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\ln(2)$$

<u>Άσκ</u> Let $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and $\gamma \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τ.ω. $\sigma(\gamma) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.
Θέλουμε να προβλέψουμε την τιμή του ξ βασιζόμενοι σε μια παρατηρούμενη τιμή της γ. Ποιος ο καλύτερος predictor $\eta \in L^2$ τ.ώ. γ και $\sigma(\eta) \subset \mathcal{G}$ να έχουμε $\mathbb{E}[(\xi-\eta)^2] = \min$.

$$\gamma\, \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\gamma\xi|\mathcal{G}) \Rightarrow \mathbb{E}[\gamma\,\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(\gamma\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\gamma\left(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) - \xi\right)\right] = 0, \ \forall \gamma \in L^2 : \sigma(\gamma) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \quad : (21.1)$$

$$\mathbb{E}\left\{\left[\xi - \overbrace{(\tilde{\eta} + \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}))}^{\eta}\right]^2\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left[\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\right]^2\right\} + \mathbb{E}\left[\tilde{\eta}^2\right] - 2\,\overbrace{\mathbb{E}\left[\tilde{\eta}\left(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\right)\right]}^{0 \Leftarrow \sigma(\tilde{\eta}) \subset \mathcal{G}} \ge$$

$$\ge \mathbb{E}\{[\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})]^2\}, \ \forall \tilde{\eta} \in L^2 \Rightarrow \tilde{\eta} = 0 \ P\text{-}\alpha s$$

<u>Δηλ</u>: Η έκφραση $\mathbb{E}\left\{\left[\xi - (\tilde{\eta} + \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}))\right]^2\right\}$ ελαχιστοποιείται όταν $\tilde{\eta} = 0$, P_α.s.

<u>Παρατ</u> $(21.1) \overset{\forall \gamma = \mathbb{1}_A,\ A \in \mathcal{G}}{\Longrightarrow} \int_A \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})\, dP = \int_A \xi\, dP, \ \forall A \in \mathcal{G}$

<u>Ασκ</u> Δίνεται ο χώρος πιθ $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

Να βρεθεί $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ εαν $\xi(\omega) = 2\omega^2$ και $\eta(\omega) = \begin{cases} 2, & 0 \le \omega < 1/2 \\ \omega, & 1/2 \le \omega \le 1 \end{cases}$

Εστω $B \in \mathcal{B}([1/2,1]) \Rightarrow \{\eta \in B\} = B \in \sigma(\eta)$

$$\left.\begin{aligned} &\{\eta \in B\} = B \in \sigma(\eta) \\ &\{\eta \in B\} \cup \{\eta = 2\} = B \cup [0,1/2) \in \sigma(\eta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(\eta) = \sigma\left\{B, B \cup [0,1/2) : B \in \mathcal{B}([1/2,1])\right\} = \mathcal{B}([1/2,1]) \cup [0,1/2)$$

$$\omega \in [0,1/2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta)(\omega) = \mathbb{E}(\xi|\{\eta = 2\}) = \frac{1}{P\{\eta=2\}} \int_{\{\eta=2\}} 2\omega^2 \lambda(d\omega) =$$

$$= \frac{1}{1/2} \int_0^{1/2} 2\omega^2 d\omega = 1/6 \qquad P\{\eta = 2\} = \int_{\{\eta=2\}} \lambda(d\omega) = \int_0^{1/2} d\omega = \frac{1}{2}$$

$$\omega \in [1/2,1] \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta)(\omega) = \mathbb{E}(\xi|\{\omega < \eta < \omega + d\omega\}) = \frac{1}{d\omega} \int_\omega^{\omega+d\omega} 2u^2 du$$

$$= \frac{2\omega^2 d\omega}{d\omega} = 2\omega^2 \qquad P\{\omega < \eta \le \omega + d\omega\} = \int_{\{\omega < \eta \le \omega + d\omega\}} \lambda(d\omega) = d\omega$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta)(\omega) = \begin{cases} 1/6, & \omega \in [0,1/2) \\ 2\omega^2, & \omega \in [1/2,1] \end{cases}$$

<u>Ασκ</u> Δίνεται ο χώρος πιθ. $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

Να βρεθεί η $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ εαν $\eta(\omega) = \eta(1-\omega)$

$$B \in \sigma(\eta) \Leftrightarrow B = \{\eta \in A\} = \eta^{-1}(A) \Leftrightarrow A = \eta(B) = \eta(1-B) \Leftrightarrow 1-B \in \sigma(\eta)$$

Ετσι $\sigma(\eta) = \{B \in \mathcal{B}([0,1]) : B = 1-B\}$

$$\int_B \xi(\omega)\lambda(d\omega) = \int_B \xi(\omega) d\omega = \frac{1}{2}\left\{\int_B \xi(\omega)d\omega + \int_B \xi(\omega)d\omega\right\} = \frac{1}{2}\left\{\int_B \xi(\omega)d\omega + \right.$$

$$\left. + \int_{1-B} \xi(1-\omega)d\omega\right\} = \frac{1}{2}\left\{\int_B \xi(\omega)d\omega + \int_B \xi(1-\omega)d\omega\right\} = \int_B \underbrace{\frac{\xi(\omega)+\xi(1-\omega)}{2}}_{\mathcal{J}(\omega)} d\omega$$

επειδή $\mathfrak{J}(\omega)=\mathfrak{J}(1-\omega) \Rightarrow \sigma(\mathfrak{J})=\sigma(\eta) \overset{(\text{Lemma } 1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{J}|\eta) = \frac{1}{2}\{\mathfrak{J}(\omega)+\mathfrak{J}(1-\omega)\}$$

<u>Ορσ</u> Μια ακολουθία από σ-πεδία τ.ω. $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$ ονομάζεται διήθηση (Filtration).

Το σ-πεδίο $\mathcal{F}_n$ αναπαριστά τη γνώση μας την χρονική στιγμή <u>n</u>. Το $\mathcal{F}_n$ περιέχει όλα τα ενδεχόμενα για τα οποία την χρονική στιγμή <u>n</u> μπορούμε να αποφασίσουμε εάν έχουν πραγματοποιηθεί ή όχι. Όσο ο χρόνος περνά ο αριθμός αυτών των ενδεχομένων θα μεγαλώ-νει.

<u>Ορσ</u> Μια ακολουθία τμ $\{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \dots\}$ λέμε ότι είναι προσηρτημένη σε μια διήθηση εάν $\sigma(\mathfrak{J}_i) \subset \mathcal{F}_i$ $i=1,2,\dots$ <u>δηλ</u> η $\mathfrak{J}_i$ τμ είναι $\mathcal{F}_i$ - μετρήσιμη

<u>Παρ</u> Εάν θέσουμε $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_i)$ η ακολουθία $\{\mathcal{F}_i\}$ είναι διήθηση κ' η διαδικασία $\{\mathfrak{J}_i\}$ είναι προσηρτημένη σε αυτήν. Έστω μια άλλη διήθηση $\{\mathcal{G}_i\}$ στην οποία η $\{\mathfrak{J}_i\}$ είναι προσηρτημένη τότε $\sigma(\mathfrak{J}_i) \subset \mathcal{G}_i$ $i=1,2,\dots$

$$\left.\begin{matrix} \sigma(\mathfrak{J}_1) \subset \mathcal{G}_1 \ , \ \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \\ \sigma(\mathfrak{J}_2) \subset \mathcal{G}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2) \subset \mathcal{G}_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \sigma(\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_n) \subset \mathcal{G}_n$$

<u>Δηλ</u> Η διήθηση $\overbrace{\{\sigma(\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_i)\}}^{\mathcal{F}_i^{\mathfrak{J}}}$ είναι η <u>ελάχιστη διήθηση</u> ως προς την οποία η διαδικασία $\{\mathfrak{J}_i\}$ μπορεί να είναι προσηρτημένη.

<u>ορσ</u> Μια ακολουθία από τμ $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ ονομάζεται <u>martingale</u> ως προς μια διήθηση $\{\mathcal{F}_i\}_{i\geq 1}$ εαν

(i) $\xi_i \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, $i\geq 1$ (integrable)

(ii) $\sigma(\xi_i)\subset \mathcal{F}_i$, $i\geq 1$ (adapted)

(iii) $\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\xi_n$, P-a.s. $\forall n\geq 1$

<u>Παρ 3.3</u> Έστω $\{\eta_i\}$ ακολουθία από iid τ.μ. με $\eta_i\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ κ' $\mathbb{E}(\eta_i)=0$. Ορίζουμε $\xi_{n+1}=\xi_n+\eta_{n+1}$ με $\xi_0=0$. Τότε η $\{\xi_i\}$ είναι martingale ως προς την φυσική διήθηση της $\{\eta_i\}$

$$\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k \Rightarrow \sigma(\xi_n)\subset\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)=\mathcal{F}_n^\eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_n^\eta)=\xi_n$$ (δηλαδή εαν μας δίνονται $\eta_1,\dots,\eta_n$ τότε το ξ_n είναι γνωστό)

$$\mathbb{E}(|\xi_n|)=\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right|\right)\leq\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(|\eta_i|)<\infty\Rightarrow \xi_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P),\ n\geq 1$$

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n^\eta)=\mathbb{E}(\xi_n+\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n^\eta)=\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_n^\eta)}_{\xi_n}+\underbrace{\mathbb{E}(\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n^\eta)}_{\mathbb{E}(\eta_{n+1})=0}=\xi_n$$

<u>Παρ 3.4</u> Δίνεται $\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ κ' $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ διήθηση. Θέτουμε $\xi_n\equiv\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ τότε $\{\xi_n\}$ είναι martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$.

$$\xi_n=\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)\overset{\text{Εξ ορισμού}}{\Longrightarrow}\sigma(\xi_n)\subset\mathcal{F}_n$$

$$|\xi_n|=|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)|\leq\mathbb{E}(|\xi||\mathcal{F}_n)\overset{\mathbb{E}(\cdot)}{\Longrightarrow}\mathbb{E}(|\xi_n|)\leq\mathbb{E}\{\mathbb{E}(|\xi||\mathcal{F}_n)\}=\mathbb{E}(|\xi|)<\infty$$

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\}\underset{\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1}}{=\!=}\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)=\xi_n$$

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) Στο <u>παρ 3.3</u> $\xi_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i=\xi_{n-1}+\eta_n$ = τα κέρδη από ένα τίμιο ($\mathbb{E}(\eta_i)=0$) τυχερό παίγνιο. Τότε η καλύτερη πρόβλεψη για τα κέρδη την χρονική στιγμή <u>n+1</u> δοθέντος του $\mathcal{F}_n$ θα ήταν το ίδιο το ξ_n

(2) Στο <u>παρ 3.4</u> το $\mathcal{F}_n$ αποτελεί ατελείς παρατηρήσεις (έως χρόνο n) του ξ κ' περιμένουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_\infty$ κ' $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\infty)=\xi$

Ασκ 3.3: Εαν $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge1}$ martingale τότε $\mathbb{E}(\xi_n)=\mathbb{E}(\xi_1)$ για $\forall n\ge1$.

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\xi_n \overset{\mathbb{E}(\cdot)}{\Rightarrow} \mathbb{E}(\xi_{n+1})=\mathbb{E}(\xi_n) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n)=\mathbb{E}(\xi_1),\ \forall n\ge1$$

Ασκ: Εαν $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge1}$ martingale τότε

$$\mathbb{E}(\xi_{n'}|\mathcal{F}_n)=\xi_n,\ \forall n'\ge n$$

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\xi_n \Rightarrow \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n\}=\xi_n \overset{\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\xi_{n+2}|\mathcal{F}_n)=\xi_n \Rightarrow\cdots\Rightarrow \mathbb{E}(\xi_{n+k}|\mathcal{F}_n)=\xi_n,\ \forall k\ge0$$

Ασκ 3.4: Έστω $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ mart. ως πρός την διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge1}$. Δείξτε ότι $\{\xi_n\}$ mart. ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n^{\xi}$

Ξέρουμε ότι $\xi_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ κ' ότι $\sigma(\xi_n)\subset\mathcal{F}_n^{\xi}=\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n) \Rightarrow$

$$\xi_n=\mathbb{E}(\xi_n|\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n))=\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)\}$$

όμως $\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$ περιέχεται σε όλες τις δυνατές διηθήσεις της $\{\xi_n\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)\} \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n))$$

Ασκ 3.5: Εαν $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ κ' $\xi_0=0$ P-a.s, είναι συμμετρικός τυχαίος περίπατος, δ.ό. $\{\eta_n\}_{n\ge1}$ με $\eta_n=\xi_n^2-n$ είναι mart. ως προς $\{\mathcal{F}_n^{\xi}\}_{n\ge1}$.

$\xi_{n+1}=\xi_n+\eta_{n+1}$ τ.ώ. $\eta_n \overset{iid}{\sim}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{E}(\eta_i)=0,\ \forall i\ge1$

κ' $\xi_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$, $\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)=\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)=\mathcal{F}_n$

Σαφώς
$$\begin{cases}\eta_i\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \Rightarrow \mathbb{E}(|\xi_n|)\le\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|<\infty \Rightarrow \xi_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\\ \sigma(\xi_n)\subset\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)\\ \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n))=\mathbb{E}(\xi_n|\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n))+\mathbb{E}(\eta_{n+1}|\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n))\\ \qquad =\xi_n+\mathbb{E}(\eta_{n+1})=\xi_n\end{cases}$$

(i) J_n είναι $\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)$-μετρήσιμη διότι $J_n = \left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)^2 - n \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}(J_n \mid \sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)) = J_n \Leftrightarrow \sigma(J_n) \subset \sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)$

(ii) $\mathbb{E}(|J_n|) \leq \mathbb{E}(|\xi_n^2|) + n$, $\eta_i(\Omega) = \{-1,1\} \Rightarrow -n \leq \xi_n \leq n \Rightarrow \xi_n^2 \leq n^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}(|\xi_n^2|) \leq n^2$

<u>έτσι</u> $\mathbb{E}(|J_n|) \leq n^2 + n < \infty \Rightarrow J_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(iii) $\mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((\xi_n + \eta_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n) = \underbrace{\mathbb{E}(\xi_n^2 \mid \mathcal{F}_n)}_{\xi_n^2} + 2\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \eta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{\xi_n \underbrace{\mathbb{E}(\eta_{n+1})}_{0}} + \underbrace{\mathbb{E}(\eta_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n)}_{1}$

$= \xi_n^2 + 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 - (n+1) \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n^2 - n$

<u>Άσκ</u> Δίνεται ότι $\eta_i \overset{iid}{\sim} \pi(\cdot)$ κ' $\mathbb{E}(\eta_i) = 0$, $Var(\eta_i) = \sigma^2$, $\eta_i \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$

<u>Δ.ό.</u> $J_n = \xi_n^2 - n\sigma^2$ με $\xi_n = \sum_{i=1}^{n}\eta_i$ είναι mart ως προς την διήθηση $\sigma(\eta_1,\dots,\eta_n) = \mathcal{F}_n$.

Εμφανώς $\sigma(J_n) \subset \mathcal{F}_n$ <u>δηλ</u> J_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{E}(|J_n|) \leq \mathbb{E}(|\xi_n^2|) + n\sigma^2 \\ &\mathbb{E}(\xi_n^2) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_i^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\overbrace{\mathbb{E}(\eta_i\eta_j)}^{\mathbb{E}(\eta_i)\mathbb{E}(\eta_j)=0} < \infty \end{aligned}\right\} J_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$$

$\mathbb{E}(J_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((\xi_n + \eta_{n+1})^2 - (n+1)\sigma^2 \mid \mathcal{F}_n) =$

$= \mathbb{E}(\xi_n^2 \mid \mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(\eta_{n+1}\xi_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\eta_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) - (n+1)\sigma^2$

$= \xi_n^2 + 2\xi_n \underbrace{\mathbb{E}(\eta_{n+1})}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}(\eta_{n+1}^2)}_{\sigma^2} - (n+1)\sigma^2 = \xi_n^2 - n\sigma^2$

<u>Άσκ 3.6</u> Εάν $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ συμμετρικός τυχαίος περίπατος ($\xi_n = \xi_{n-1} + \eta_n$ με $\eta_i \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$) κ' $J_n = (-1)^n \cos(\pi\xi_n)$, $\{J_n\}_{n\geq 1}$ είναι mart. ως προς $\{\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1,\dots,\eta_n)\}_{n\geq 1}$

(i) $\sigma(J_n) \subset \sigma(\xi_n) \subset \sigma(\eta_1,\dots,\eta_n) = \mathcal{F}_n$

(ii) $\mathbb{E}(|J_n|) \leq \mathbb{E}(1) = 1 \Rightarrow J_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$

(iii) $\mathbb{E}(J_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[(-1)^{n+1}\cos(\pi(\xi_n + \eta_{n+1})) \mid \mathcal{F}_n\right] =$

$$= (-1)^{n+1}\mathbb{E}\{\cos(\pi\xi_n)\cos(\pi\eta_{n+1}) - \sin(\pi\xi_n)\sin(\pi\eta_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\}$$

$$= (-1)^{n+1}\Big\{\cos(\pi\xi_n)\underbrace{\mathbb{E}\big[\cos(\pi\eta_{n+1})\big]}_{\frac12\cos(-\pi)+\frac12\cos(\pi)=-1} - \sin(\pi\xi_n)\underbrace{\mathbb{E}\big[\sin(\pi\eta_{n+1})\big]}_{\frac12\sin(-\pi)+\frac12\sin(\pi)=0}\Big\} = (-1)^n\cos(\pi\xi_n)$$

<u>Έστω</u>: $\eta_k \equiv$ winning or losses ανά μονάδα στοιχήματος στο k-παιγνίο $\overset{iid}{\sim} \pi(\cdot)$

$\xi_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ = total winnings after time $\underline{n}$

Εαν έχουμε παίξει $\underline{n-1}$ παιγνίδια η ολική πληροφορία συγκεντρώνεται στο $\sigma(\eta_1,\dots,\eta_{n-1}) = \mathcal{F}^{\eta}_{n-1}$

- τίμιο παίγνιο $\to$ $\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}^{\eta}_{n-1}) = 0}_{\text{martingale}}$
- Μη τίμιο παίγνιο, ποντάρω στα ευνοϊκά αποτελέσματα $\to$ $\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}^{\eta}_{n-1}) \geq \xi_{n-1}}_{\text{favourable game submartingale}}$
- Μη τίμιο παίγνιο, ποντάρω στα μη ευνοϊκά αποτελέσματα $\to$ $\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}^{\eta}_{n-1}) \leq \xi_{n-1}}_{\text{unfavourable game supermartingale}}$

<u>Ορσ</u> Λέμε ότι η $\{\xi_n\}_{n\geq1}$ είναι μια supermartingale (submartingale) ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq1}$ εάν:

(i) $\xi_n \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ (ii) $\sigma(\xi_i) \subset \mathcal{F}_i$ (iii) $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq \xi_n$ $(\geq \xi_n)$

<u>Ασκ</u> Δίνεται ότι η διαδικασία $\{\xi_n\}_{n\geq0}$ είναι <u>supermartingale</u> ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)\}_{n\geq0}$. Ορίζουμε την διαδικασία

$$M_n = \begin{cases} M_{n-1} + \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}), & n \geq 1 \\ \xi_0, & n = 0, \end{cases}$$

<u>δο</u> (i) $\{M_n\}_{n\geq0}$ martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq0}$

(ii) $A_n \equiv M_n - \xi_n$ είναι μη φθίνουσα.

(i) (α) $M_0 = \xi_0 \Rightarrow \sigma(M_0) = \sigma(\xi_0) = \mathcal{F}_0 \Rightarrow M_0 = \mathcal{F}_0$-meas.

Έστω ότι $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{M_{n-1} \in B\} \in \mathcal{F}_{n-1} \Leftrightarrow \sigma(M_{n-1}) \subset \mathcal{F}_{n-1} \Leftrightarrow M_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1}$-meas

$$M_n = \underbrace{M_{n-1}}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-meas}} + \underbrace{\xi_n}_{\mathcal{F}_n\text{-meas}} - \underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-meas}} \xRightarrow{\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} M_n = \mathcal{F}_n\text{-meas.}$$

(b) $M_0 = \xi_0 \Rightarrow \mathbb{E}(|M_0|) = \mathbb{E}(|\xi_0|) < \infty \Rightarrow M_0 \in L^1$

Έστω ότι $M_{n-1} \in L^1$ τότε

$$\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|M_{n-1}|) + \mathbb{E}(|\xi_n|) + \mathbb{E}\{|\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1})|\}$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}(|M_{n-1}|)}_{<\infty} + \underbrace{\mathbb{E}(|\xi_n|)}_{<\infty} + \underbrace{\mathbb{E}\{\mathbb{E}(|\xi_n| | \mathcal{F}_{n-1})\}}_{\mathbb{E}(|\xi_n|)<\infty} < \infty \Rightarrow M_n \in L^1$$

(c) $$\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}\}$$

$$= \mathbb{E}(M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \cancel{\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1})} - \cancel{\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1})} = M_{n-1}$$

(διότι $\sigma(M_{n-1}) \subset \mathcal{F}_{n-1}$)

(ii) $A_{n+1} \geq A_n \Leftrightarrow M_{n+1} - \xi_{n+1} \geq M_n - \xi_n \Leftrightarrow \cancel{M_n} - \mathbb{E}(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq \cancel{M_n} - \xi_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \xi_n$ που είναι αληθές.

<u>Ορσ</u> Μια στρατηγική παιχνιδιού ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια διαδικασία $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ τ.ω. $\sigma(\alpha_n) \subset \mathcal{F}_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $\sigma(\alpha_1) \subset \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

<u>Ορσ</u> Έστω $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ κ' $\{\alpha_n\}$ <u>φραγμένη</u> στρατηγική παιχνιδιού ($\sigma(\alpha_n) \subset \mathcal{F}_{n-1}$ κ' $\sup_{n,\omega} |\alpha_n(\omega)| = M < \infty$) τότε ορίζουμε την διαδικασία $\{\eta_n\}$, $\eta_n = \alpha_1(\xi_1 - \xi_0) + \dots + \alpha_n(\xi_n - \xi_{n-1}) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \Delta_j \xi$.

Η διαδικασία $\{\eta_n\}$ ονομάζεται "ο μετασχηματισμός martingale" της $\{\xi_n\}$ κ' συμβολίζεται με $\eta_n = (\xi \cdot \alpha)_n$

<u>Prop 3.1</u> Δίνεται η φραγμένη στρατηγική $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$.

(i) Εάν η $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n^\xi\}$ τότε η $\{\eta_n = (\xi \cdot \alpha)_n\}_{n\geq 1}$ είναι κ' αυτή martingale

(ii) Εάν $\alpha_n \geq 0$ κ' $\{\xi_n\}$ supermartingale $\Rightarrow \{\eta_n\}$ = supermartingale

(iii) Εάν $\alpha_n \geq 0$ κ' $\{\xi_n\}$ submartingale $\Rightarrow \{\eta_n\}$ = submartingale

$$\eta_n = \eta_{n-1} + \alpha_n(\xi_n - \xi_{n-1}), \ \forall n \geq 1, \ \eta_0 = 0$$

$$\mathbb{E}(\eta_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\alpha_1(\xi_1 - \xi_0) + \dots + \alpha_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \eta_{n-1} \Rightarrow \sigma(\eta_{n-1}) \subset \mathcal{F}_{n-1}$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_{n-1}+\alpha_n(\xi_n-\xi_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{J}_{n-1}+\alpha_n\{\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})-\xi_{n-1}\}$$

$\{\xi_n\}$ = martingale, $\{\alpha_n\}$ = φραγμένη

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{J}_{n-1}+\alpha_n\{\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})-\xi_{n-1}}_{0}\} = \mathcal{J}_{n-1}$$

A fair game turns into a fair game no matter what you do

$\{\xi_n\}$ = supermartingale, $\{\alpha_n\}$ = φραγμένη, $\alpha_n \geq 0$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{J}_{n-1}+\alpha_n\{\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})-\xi_{n-1}}_{\leq 0}\} \leq \mathcal{J}_{n-1}$$

If you don't run the casino an unfavourable game turns into an unfavourable game

$\{\xi_n\}$ = submartingale, $\{\alpha_n\}$ = φραγμένη, $\alpha_n \geq 0$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{J}_{n-1}+\alpha_n\{\underbrace{\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})-\xi_{n-1}}_{\geq 0}\} \geq \mathcal{J}_{n-1}$$

If you don't run the casino a favourable game turns into a favourable game

---

Χρόνοι στάσης (Stopping times)

Την απόφαση αν θα συνεχίσουμε να παίζουμε ένα τυχαίο παιχνίδι γενικά την παίρνουμε σύμφωνα με την μέχρι τώρα πορεία του παιχνιδιού $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n^\xi$

<u>Ορσ</u> Η τμ $\tau: \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \{1,2,\dots,\infty\}$ ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς την διήθηση $\{\mathcal{F}_n^\xi\}$ εάν για $\forall n\in\overline{\mathbb{N}}$, $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n^\xi$

<u>Ασκ 3.8</u> <u>Δο</u> $\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$, $\forall n\in\overline{\mathbb{N}}$

$$\left[\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n \Rightarrow \{\tau\leq n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n\right] \Rightarrow \{\tau\leq n\}\setminus\{\tau\leq n-1\}=\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$$

$$\{\tau=k\}\in\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_n,\ 1\leq k\leq n \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n}\{\tau=k\}=\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$$

<u>Ορσ</u> Χρόνοι εισόδου κ' εξόδου σε κάποιο σύνολο $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\tau^B(\omega) = \inf\{t\geq 0: \xi_t(\omega)\in B\}$ = ο χρόνος πρώτης εισόδου στο B (1st hitting time)

$\tau^{B'}(\omega) = \inf\{t\geq 0: \xi_t(\omega)\notin B\}$ = ο χρόνος πρώτης εξόδου από το B (1st exit time)