Παραδ 3.5 Έστω ότι ρίχνουμε νόμισμα κ' ανάλογα με το εάν έρθει Η ή Τ κερδίζω κ' χάνω αντίστοιχα 1€ $\Rightarrow \Delta_{n-1}\xi = \underbrace{\xi_n - \xi_{n-1}}_{\text{ανεξάρτητες προσαυξήσεις}} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Έστω $\tau = \inf\{t \geq 0 : \xi_n = 10 \text{ ή } \xi_n = 0\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

κ' ότι αρχίζω να παίζω με ποσό $0 < \xi_0 < 10 \Rightarrow \Omega = \{0 < \xi_0 < 10\}$

$B = (-\infty, 0] \cup [10, \infty)$

$$\{\tau^B = n\} = \Big(\underbrace{\{0<\xi_1<10\}}_{\in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_n} \cap \dots \cap \underbrace{\{0<\xi_{n-1}<10\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n}\Big) \cap \underbrace{\Big(\{\xi_n = 10\} \cup \{\xi_n = 0\}\Big)}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ο χρόνος εισόδου στο B είναι χρόνος στάσης

Άσκηση 3.9 Εάν $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ σ.δ. προσαρτημένη στη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ κ' $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Δ.ό. ο χρόνος εισόδου της $\{\xi_n\}$ στο B είναι χρόνος στάσης

$$\tau^B = \inf\{t \geq 0 : \xi_n \in B\}$$

$$\{\tau^B = n\} = \Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} \underbrace{\{\xi_k \notin B\}}_{\{\xi_k \in B\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n}\Big) \cap \overbrace{\{\xi_n \in B\}}^{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

Ορσ Εάν τ είναι χρόνος στάσης ορίζουμε την σταματημένη διαδικασία στο τ, $\xi_n^\tau = \xi_{\tau \wedge n}$ όπου $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$ (the sequence stopped at τ)

$$\xi_{\tau\wedge n}(\omega) = \xi_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega)$$

Ασκ 3.10 Δ.ό. εάν $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ είναι προσαρτημένη στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$, τότε κ' η $\{\xi_{\tau\wedge n}\}_{n\geq 1}$ είναι προσαρτημένη στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$

$$\xi_{\tau\wedge n}(\omega) = \begin{cases} \xi_{\tau(\omega)}, & \tau(\omega) \leq n \\ \xi_n(\omega), & \tau(\omega) > n \end{cases} \Rightarrow \xi_{\tau\wedge n} = \xi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} + \xi_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\xi_{\tau\wedge n} \in B\} = \{\xi_\tau \in B, \tau \leq n\} \cup \{\xi_n \in B, \tau > n\} \quad : (30.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\xi_\tau \in B, \tau \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n}\big(\{\xi_k \in B\} \cap \{\tau = k\}\big) \\ \{\xi_k \in B\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n, \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \{\xi_\tau \in B, \tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad : (30.2)$$

$$\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n \overset{(\cdot)'}{\Leftrightarrow} \{\tau>n\}\in\mathcal{F}_n \xRightarrow{\{\xi_n\in B\}\in\mathcal{F}_n} \{\xi_n\in B,\ \tau>n\}\in\mathcal{F}_n \quad :(31.1)$$

$$(31.1)(30.1)(30.2) \Rightarrow \{\xi_{\tau\wedge n}\in B\}\in\mathcal{F}_n$$

<u>Άσκ</u> Έστω $\tau=$ stopping time κ' $\{\xi_n\}_{n\ge0}$, $\xi_0=0$ martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_n^{\xi}\}_{n\ge0}$ <u>δ.ό.</u> (i) η διαδικασία $\{\alpha_n\}_{n\ge1}$ με $\alpha_n=\mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}}$ είναι στρατηγική παιχνιδιού (ii) η διαδικασία $\xi_{\tau\wedge n}\equiv\xi_n^{\tau}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μετασχηματισμός martingale $\xi_n^{\tau}=(\alpha\cdot\xi)_n$

(i) $$\alpha_n=\mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}}=\begin{cases}1, & \tau\ge n\\ 0, & \tau<n\end{cases} \Rightarrow \{\alpha_n\in B\}=\{\mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}}\in B\}=$$

$$=\mathbb{1}^{-1}_{\{\tau\ge n\}}(B)=\begin{cases}\emptyset, & 0\notin B,\ 1\notin B\\ \Omega, & 0\in B,\ 1\in B\\ \{\tau\ge n\}, & 0\notin B,\ 1\in B\\ \{\tau<n\}, & 0\in B,\ 1\notin B\end{cases} \quad :(31.2)$$

$$\tau=\text{stopping time} \Leftrightarrow \{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1} \Leftrightarrow \{\tau<n\}\in\mathcal{F}_{n-1} \quad :(31.3)$$

$$\{\tau\ge n\}=\{\tau>n-1\}=\{\tau\le n-1\}' \xRightarrow{\{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}} \{\tau\ge n\}\in\mathcal{F}_{n-1} \quad :(31.4)$$

$$(31.2)(31.3)(31.4) \Rightarrow \{\alpha_n\in B\}\in\mathcal{F}_{n-1}$$

(ii) $$\xi_{\tau\wedge n}=(\xi_\tau-\xi_0)\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}+(\xi_n-\xi_0)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\tau}(\xi_k-\xi_{k-1})\underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}}_{k\le\tau\Rightarrow1}\right]\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}+\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi_{k-1})\underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}}_{k\le n<\tau\Rightarrow1}\right]\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\tau}(\xi_k-\xi_{k-1})\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}+\sum_{k=\tau+1}^{n}(\xi_k-\xi_{k-1})\underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}}_{0}\right]\mathbb{1}_{\{\tau\le n\}}+\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi_{k-1})\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}\right]\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi_{k-1})\mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}}$$

<u>Ασκ</u> Δ.ο΄ εαν τ_1 κ΄ τ_2 είναι stopping times τότε κ΄

$\tau_1 \wedge \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$ είναι stopping times όπου $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ κ΄

$\tau_1 \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$

(i) $\{\tau_1 \wedge \tau_2 = n\} = \{\tau_1 \wedge \tau_2 = n, \tau_1 \le \tau_2\} \cup \{\tau_1 \wedge \tau_2 = n, \tau_1 > \tau_2\}$

$= \{\tau_1 = n, \tau_2 \ge n\} \cup \{\tau_2 = n, \tau_1 > n\} = (\{\tau_1 = n\} \cap \{\tau_2 \ge n\}) \cup (\{\tau_2 = n\} \cap \{\tau_1 > n\})$

$\tau_1 = s.t. \Leftrightarrow \{\tau_1 = n\} \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau_1 \le n\} \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau_1 > n\}' \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau_1 > n\} \in \mathcal{F}_n$

$\tau_2 = s.t. \Leftrightarrow \{\tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau_2 \le n\} \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \{\tau_2 \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\tau_2 > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \Leftrightarrow \{\tau_2 \ge n\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$

(ii) $\{\tau_1 \vee \tau_2 = n\} = \{\tau_1 \vee \tau_2 = n, \tau_1 \le \tau_2\} \cup \{\tau_1 \vee \tau_2 = n, \tau_1 > \tau_2\}$

$= \{\tau_2 = n, \tau_1 \le n\} \cup \{\tau_1 = n, \tau_2 < n\}$ κλπ...

<u>Προτ. 3.2</u> Εαν $\{\mathfrak{Z}_n\}_{n\ge 0}$ martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n^{\mathfrak{Z}}\}_{n \ge 0}$ τότε $\{\mathfrak{Z}_{\tau \wedge n}\}_{n \ge 0}$ είναι martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n^{\mathfrak{Z}}\}_{n \ge 0}$. Το ίδιο ισχύει για supermartingales κ΄ submartingales.

Γνωρίζουμε ότι $\mathfrak{Z}_{n\wedge\tau} = \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{Z}_{k-1}) \mathbb{1}_{\{\tau \ge k\}} = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{Z}_{k-1}) \mathbb{1}_{\{\tau\ge k\}} + (\mathfrak{Z}_n - \mathfrak{Z}_{n-1}) \mathbb{1}_{\{\tau \ge n\}}$

$\Leftrightarrow \mathfrak{Z}_{n\wedge\tau} = \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} + (\mathfrak{Z}_n - \mathfrak{Z}_{n-1}) \mathbb{1}_{\{\tau \ge n\}} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{Z}_{n\wedge\tau} | \mathcal{F}_n^{\mathfrak{Z}}) = \mathbb{E}\left[\mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} | \mathcal{F}_{n-1}^{\mathfrak{Z}}\right] + \mathbb{E}\left[(\mathfrak{Z}_n - \mathfrak{Z}_{n-1}) \mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}} | \mathcal{F}_n^{\mathfrak{Z}}\right] \\ \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{Z}_{k-1})}_{\mathcal{F}_k-\text{μετρ.}} \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \ge k\}}}_{\mathcal{F}_{k-1}-\text{μετρ.}} = \mathcal{F}_{n-1}-\text{μετρήσιμο} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{Z}_{n\wedge\tau} | \mathcal{F}_n^{\mathfrak{Z}}) = \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} + \{\mathbb{E}(\mathfrak{Z}_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\mathfrak{Z}}) - \mathfrak{Z}_{n-1}\} \mathbb{1}_{\{\tau \ge n\}} =$

$$= \begin{cases} = \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} & , \mathbb{E}(\mathfrak{Z}_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\mathfrak{Z}}) = \mathfrak{Z}_{n-1} \\ \le \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} & , \mathbb{E}(\mathfrak{Z}_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\mathfrak{Z}}) \le \mathfrak{Z}_{n-1} \\ \ge \mathfrak{Z}_{(n-1)\wedge\tau} & , \mathbb{E}(\mathfrak{Z}_n | \mathcal{F}_{n-1}^{\mathfrak{Z}}) \ge \mathfrak{Z}_{n-1} \end{cases}$$

Το τυχερό παίγνιο martingale

Νόμισμα ρίχνεται επαναληπτικά $\eta_i = \xi_i - \xi_{i-1} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} T=-1 & H=1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ κ' κερδίζει κάποιος 1€ στα Heads κ' -1€ στα Tails. Αν κερδίσει σταματάει να παίζει ενώ εαν χάσει διπλασιάζει το στοίχημα κ' ξαναπαίζει εαν κερδίσει σταματάει εαν όχι ξαναδιπλασιάζει κ' συνεχίζει

$\tau = \inf\{n \geq 0 : \eta_n = 1\}$

$\alpha_n = 2^{n-1}\mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}}$

Το συνολικό κέρδος $\mathcal{J}_n$ ακολουθώντας την στρατηγική α_n θα είναι

$$\mathcal{J}_n = (\alpha \cdot \xi)_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\xi_k - \xi_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_{k-1}) 2^{k-1} \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}}$$

που είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_n^{\xi}$

<u>Ασκ</u> Δ.ό (i) $\tau \sim Geo(\cdot | 1/2)$

(ii) $\mathcal{J}_\tau(\omega) = 1, \ \forall \omega \in \Omega$

(iii) Εαν κάποιος παίζει με στρατηγική "martingale" οι αναμενόμενες απώλειες πρίν την τελική νίκη (την στάση) θα είναι άπειρες.

(i) $\{\tau \geq 1\} = \{H, TH, T^2H, \dots\} = \Omega$, $\{\tau = 1\} = \{H\}$

$\{\tau \geq 2\} = \{TH, T^2H, \dots\}$, $\{\tau = 2\} = \{TH\}$

$\vdots$

$\{\tau \geq n\} = \{T^{n-1}H, T^nH, \dots\}$, $\{\tau = n\} = \{T^{n-1}H\}$

$P\{\tau = \infty\} = 0$

$$P\{\tau \geq n\} = \sum_{k=n-1}^{\infty} P\{T^kH\} = \sum_{k=n-1}^{\infty} (1-p)^k p = p \cdot \frac{(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1} \overset{p=1/2}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P\{\tau = n\} = P\{T^{n-1}H\} = (1-p)^{n-1}p \overset{p=1/2}{=} 2^{-n}$$

(ii)
$$\mathcal{J}_\tau(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau} 2^{k-1} \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}}(\omega)\eta_k(\omega) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\tau-1} 2^{k-1}(-1)}_{\mathcal{J}_{\tau-1}(\omega)} + 2^{\tau-1}(+1) = -\sum_{k=0}^{\tau-2} 2^k + 2^{\tau-1} =$$

$$= -\frac{2^{\tau-1}-1}{2-1} + 2^{\tau-1} = 1, \ \forall \omega \in \Omega$$

(iii)
$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\tau-1}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\tau-1} | \tau)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}(\mathcal{J}_{\tau-1} | \tau = n)}_{-(2^{n-1}-1)} \underbrace{P\{\tau = n\}}_{2^{-n}} = -\infty$$

Το θεώρημα της επιλεκτικής στάσης (optional stopping thm)

Σε μια martingale $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \xi_{n-1} \overset{\mathbb{E}(\cdot)}{\Rightarrow} \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi_{n-1}),\ \forall n\geq 1 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1),\ \forall n\geq 1$$

κ' επειδή $\{\xi_{n\wedge\tau}\}_{n\geq 1}$ ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ είναι martingale κ' εδώ έχουμε ότι $\mathbb{E}(\xi_{n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(\xi_{1\wedge\tau}) = \mathbb{E}(\xi_1)$, $\forall n\geq 1$.

Για την τμ ξ_τ = κέρδη την στιγμή της στάσης γενικά $\mathbb{E}(\xi_\tau) \neq \mathbb{E}(\xi_1)$

<u>Παραδ</u>

$$\mathcal{J}_n = \sum_{i=1}^n \bar{\eta}_i\ ,\ \bar{\eta}_i = 2^{i-1}\eta_i = 2^{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1})\ ,\ \eta_i \overset{d}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{n\wedge\tau} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}\bar{\eta}_i$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_1) = \mathbb{E}(\bar{\eta}_1) = \mathbb{E}(\eta_1) = 0$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_{n\wedge\tau}) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_{1\wedge\tau}) = \mathbb{E}(\mathcal{J}_1) = 0$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_\tau) = \mathbb{E}(1) = 1 \neq \mathbb{E}(\mathcal{J}_1) \quad \text{κ'} \quad \mathbb{E}(\mathcal{J}_{\tau-1}) = -\infty$$

<u>Optional Stopping Thm</u>: Εάν $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ κ' τ είναι stopping time ως προς $\mathcal{F}_n$ τότε οι συνθήκες:

(i) $\tau < \infty$ P-a.s. (η τμ τ είναι πλήρης)

(ii) $\xi_\tau \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = 0$

μας εξασφαλίζουν ότι $\mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(\xi_1)$.

$$\xi_{\tau\wedge n}(\omega) + [\xi_\tau(\omega) - \xi_n(\omega)]\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(\omega) = \begin{cases} \xi_n(\omega) + [\xi_\tau(\omega) - \xi_n(\omega)]\cdot 1, & \omega\in\{\tau>n\} \\ \xi_\tau(\omega) + [\xi_\tau(\omega) - \xi_n(\omega)]\cdot 0, & \omega\in\{\tau\leq n\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \xi_\tau = \xi_{\tau\wedge n} + (\xi_\tau - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) - \mathbb{E}(\xi_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}})$$

$$\underset{n\to\infty}{\overset{\lim(\cdot)}{\Longrightarrow}} \mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(\xi_1) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) \quad :(34.1)$$

$$\{\tau > n\} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{\tau = k\} \Rightarrow \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau = k\}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_\tau \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_\tau \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{F}_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) \quad : (35 \cdot 1)$$

$$\mathfrak{F}_\tau \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau) = \mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau \mathbb{1}_{\Omega}) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_\tau \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) < \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathfrak{F}_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\right) = 0 \quad : (35 \cdot 2)$$

$$(34 \cdot 1)(35 \cdot 1)(35 \cdot 2) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau) = \mathbb{E}(\mathfrak{F}_1)$$

<u>Ασκ</u> Δ.ό στο παίγνιο "Martingale" το optional stopping thm δεν ισχύει.

$$\mathcal{J}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(\mathfrak{F}_k - \mathfrak{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \eta_k$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathcal{J}_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) \neq 0$

$$\mathbb{E}(\mathcal{J}_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \mathbb{E}(\eta_k \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) \quad : (35 \cdot 3)$$

$$\mathbb{E}(\eta_k \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = \sum_{\omega\in\Omega} \eta_k(\omega) \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}(\omega) P\{\omega\} = \sum_{\omega\in\{\tau>n\}} \overbrace{\eta_k(\omega)}^{-1 \Leftarrow k \leq n} P\{\omega\} =$$

$$= -\sum_{\omega\in\{\tau>n\}} P\{\omega\} = -P\{\tau>n\} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$(35 \cdot 3) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{J}_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n 2^{k-1} = -1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathcal{J}_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = -1$$

Η αναμενόμενη τιμή του χρόνου εισόδου για τυχαίο περίπατο.

$\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 0}$ = συμμετρικός τυχ. περιπ.

$\tau = \inf\{n\geq 0 : |\mathfrak{F}_n| = K\}$ θέλουμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}(\tau)$.

Γνωρίζουμε ότι $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}\}_{n\geq 0}$ κ' ακόμα ότι $\{\mathfrak{F}_n^2 - n\}_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}\}_{n\geq 0}$. Εαν ισχύει το optional stopping thm για την διαδικασία $\{\mathfrak{F}_n^2 - n\}_{n\geq 0}$ θα έχουμε ότι: $\mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau^2 - \tau) = \mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau^2) - \mathbb{E}(\tau) = \mathbb{E}(\mathfrak{F}_1^2 - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K^2 - \mathbb{E}(\tau) = \underbrace{\mathbb{E}(\eta_1^2)}_{1} - 1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\tau) = K^2}$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύει το OST για την $\mathfrak{F}_n^2 - n$.

(i) $\boxed{\tau < \infty,\ P\text{-α.σ.} \Leftrightarrow P\{\tau = \infty\} = 0}$

Ορίζουμε X = η τμ που δίνει τον αριθμό των $T=-1$ σε $2K$ πραγματοποιήσεις της $\eta \overset{d}{=} \begin{pmatrix} T=-1 & H=+1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \sim Bin(\cdot|2K, 1/2) \Rightarrow P\{X\geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2K}$

Εστω ότι έχουμε $\underline{n}$ ακολουθίες απο $\underline{2K}$ πραγματοποιήσεις της η

$X_i \overset{iid}{\sim} Bin(\cdot|2K, 1/2)$, $i=1,\dots,n \Rightarrow P\{X_1\geq 1,\dots,X_n\geq 1\} = \left(1 - \frac{1}{2^{2K}}\right)^n$.

Το ενδεχόμενο $\{X_1\geq 1,\dots,X_n\geq 1\}$ περιέχει όλες τις τροχιές της $\{\mathfrak{F}_n\}$ (χωρισμένες σε n-blocks μήκους $2K$) εκτός απο εκείνες που έχουν έστω κ' ένα block μόνο από $H=+1$.

Ετσι $\{\tau > 2Kn\} \subset \{X_1\geq 1,\dots,X_2\geq 1\} \Rightarrow P\{\tau > 2Kn\} \leq \left(1 - \frac{1}{2^{2K}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: (36.1)

$\{\tau > 2Kn\} \supset \{\tau > 2K(n+1)\} \Rightarrow \{\tau = \infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{\tau > 2Kj\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\{\tau = \infty\} = P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{\tau > 2Kj\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\{\tau > 2Kn\} \overset{(36.1)}{=} 0$

(ii) $\boxed{\mathfrak{F}_\tau^2 - \tau \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)}$

$\mathbb{E}(|\mathfrak{F}_\tau^2 - \tau|) \leq \underbrace{\mathbb{E}(\mathfrak{F}_\tau^2)}_{K^2} + \mathbb{E}(\tau) < \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}(\tau) < \infty$

$$\mathbb{E}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{\tau=n\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2K}(2Kn+i)P\{\tau=2Kn+i\}\right) \le \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2K}(2Kn+2K)P\{\tau=2Kn+i\}\right)$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\left(2K\sum_{i=1}^{2K}(n+1)P\{\tau>2Kn\}\right) = (2K)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P\{\tau>2Kn\} \le$$

$$\le (2K)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^{2K}}\right)}_{q}^{n} = (2K)^2\left\{q\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n\right\} = (2K)^2\left\{q\left(\frac{1}{1-q}\right)' + \frac{1}{1-q}\right\}$$

$$= \left(\frac{2K}{1-q}\right)^2 < \infty$$

(iii) $$\mathbb{E}\left\{(\xi_n^2-n)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\omega \in \{\tau>n\} \Rightarrow |\xi_n(\omega)| \le K \Rightarrow \xi_n^2\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le K^2 \Rightarrow \int_{\{\tau>n\}} \xi_n^2\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}dP \le K^2\int_{\{\tau>n\}}dP$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \xi_n^2\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}dP \le K^2P\{\tau>n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[\xi_n^2\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad : (37.1)$$

$$n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} < \tau \Rightarrow \int_{\{\tau>n\}} n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}dP \le \int_{\{\tau>n\}}\tau\, dP \Leftrightarrow \int_\Omega n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}dP \le \int_\Omega \tau\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}dP$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] \le \mathbb{E}\left[\tau\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] \quad : (37.2)$$

$$\mathbb{E}\left[\tau\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] = \mathbb{E}\left[\tau\sum_{K=n+1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau=K\}}\right] = \sum_{K=n+1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\tau\mathbb{1}_{\{\tau=K\}}\right] = \sum_{K=n+1}^{\infty} K P\{\tau=K\} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[\tau\mathbb{1}_{\{\tau=K\}}\right] = \int_\Omega \tau\mathbb{1}_{\{\tau=K\}}dP = \int_{\{\tau=K\}}\tau\, dP = K\int_{\{\tau=K\}}dP = K P\{\tau=K\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\tau\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] = \lim_{n\to\infty} n P\{\tau=n\} = 0 \underset{(37.2)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[n\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] = 0 \underset{(37.1)}{\Rightarrow}$$

$$\mathbb{E}(\tau) = \sum_{K=1}^{\infty} K P\{\tau=K\} < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left\{(\xi_n^2-n)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right\} = 0$$

Ασκ $\{\xi_n\}_{n\ge 0}$, $\xi_0=0$ είναι συμμετ. τυχ. περ. κ' $\{\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\xi\}_{n\ge0}$ κ' $\tau = \inf\{n\ge0 : |\xi_n| = K\}$. (i) Δ.ο' $\{Y_n = (-1)^n\cos(\pi(\xi_n+K))\}$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}$. (ii) Δ.ο' $\{Y_n\}$ κ' τ ικανοποιούν τις συνθήκες OST (iii) $\mathbb{E}\left[(-1)^\tau\right] = ?$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\{Y_n\}$ = mart ως προς $\{\xi_n\}$ κ' ότι $\tau<\infty$, P-a.s. Τώρα $Y_\tau \in L^1$ διότι $\mathbb{E}(|Y_\tau|) \leq \mathbb{E}(1) = 1$.

Αρκεί να δ.ό. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = 0$

πράγματι $|\mathbb{E}(Y_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}})| \leq \mathbb{E}\left[|Y_n| \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}\right] \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}) = P\{\tau>n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\text{OST} \Rightarrow \mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}(Y_1) = -\mathbb{E}\left[\cos(\pi(\xi_1+k))\right] = -\left[\tfrac{1}{2}\cos(\pi(k+1)) + \tfrac{1}{2}\cos(\pi(k-1))\right]$$

$$= (-1)\cdot \begin{cases} +1, & k = \text{περιττός} \\ -1, & k = \text{άρτιος} \end{cases} = (-1)(-1)^{k-1} = (-1)^k$$

Doob's Maximal Inequality (DMI)

__Θεωρ 4.1__ Δίνεται $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\xi_n \geq 0$ submartingale κ' $\xi_n^* = \max_{k\leq n} \xi_k$ τότε για $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}(\xi_n \mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}) \geq \lambda P\{\xi_n^* \geq \lambda\}$. (38.1)

Για να δείξουμε την (38.1) θα χρειαστούμε stopping time με την ιδιότητα $\tau \leq n$ P-a.s. $\Leftrightarrow P\{\tau\leq n\} = 1$. Ένα τέτοιο s.t. θα πρέπει να εξαρτάται από το n __δηλ__ $\tau \equiv \tau_n$

$$\tau = \begin{cases} \inf\{k\leq n : \xi_k \geq \lambda\}, & \exists k_i \leq n : \xi_{k_i} \geq \lambda \\ n, & \nexists k_i \leq n : \xi_{k_i} \geq \lambda \end{cases} \leq n, \text{ P-a.s.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\xi_n\} = \text{submart} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n) \geq \mathbb{E}(\xi_{n-1}) \geq \dots \geq \mathbb{E}(\xi_1) \underset{\tau\leq n \text{ P-a.s.}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(\xi_n) \geq \mathbb{E}(\xi_\tau) \\ \mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}) + \mathbb{E}(\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* < \lambda\}}) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(\xi_n) \geq \mathbb{E}\left[\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}\right] + \mathbb{E}\left[\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* < \lambda\}}\right] \\ \omega \in \{\xi_n^* < \lambda\} \Rightarrow \xi_\tau(\omega) = \xi_n(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n) \geq \mathbb{E}\left[\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}\right] + \mathbb{E}\left[\xi_n \mathbb{1}_{\{\xi_n^* < \lambda\}}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\Big[\xi_n \underbrace{(1 - \mathbb{1}_{\{\xi_n^* < \lambda\}})}_{\mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}}\Big] \geq \mathbb{E}\left[\xi_\tau \mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}\right] \underset{\omega \in \{\xi_n^* \geq \lambda\} \Leftrightarrow \xi_\tau(\omega) \geq \lambda}{\geq} \lambda \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\xi_n^* \geq \lambda\}}\right] = \lambda P\{\xi_n^* \geq \lambda\}$$