# Doob's Maximal $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ Inequality

**Thm 4.1** Δίνεται $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ submartingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$, $\mathfrak{F}_n \geq 0$ κ' $\mathfrak{F}_n \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ τότε $\mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right] \leq 4\,\mathbb{E}(\mathfrak{F}_n^2)$, $\forall n \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right] = 2\int_{\mathbb{R}^+} t\,P\{\mathfrak{F}_n^* \geq t\}\,dt \overset{(DMI)}{\leq} 2\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{E}\left[\mathfrak{F}_n \mathbb{1}_{\{\mathfrak{F}_n^* \geq t\}}\right] dt =$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^+\ni t} \left\{ \int_{\{\mathfrak{F}_n^* \geq t\}\ni\omega} \mathfrak{F}_n(\omega)\,P(d\omega) \right\} dt \quad \left.\begin{matrix} t: 0\leq t<\infty \\ \omega: t\leq \mathfrak{F}_n^*(\omega)<\infty \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 0\leq \mathfrak{F}_n^*(\omega)<\infty \\ 0\leq t\leq \mathfrak{F}_n(\omega)^* \end{matrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right] \leq 2\int_{\{0\leq \mathfrak{F}_n^*(\omega)<\infty\}\ni\omega} \left\{ \int_0^{\mathfrak{F}_n^*(\omega)} dt \right\} \mathfrak{F}_n(\omega)\,P(d\omega)$$

$$= 2\int_{(\mathfrak{F}_n^*)^{-1}(\mathbb{R}^+) = \Omega\ni\omega} \mathfrak{F}_n^*(\omega)\,\mathfrak{F}_n(\omega)\,P(d\omega) = 2\,\mathbb{E}(\mathfrak{F}_n\mathfrak{F}_n^*) = 2\sqrt{\mathbb{E}(\mathfrak{F}_n\mathfrak{F}_n^*)^2}$$

$$\leq 2\sqrt{\mathbb{E}(\mathfrak{F}_n^2)\,\mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right]} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right]^{\cancel{2}} \leq 4\,\mathbb{E}(\mathfrak{F}_n^2)\,\cancel{\mathbb{E}\left[(\mathfrak{F}_n^*)^2\right]}$$

---

**Ασκ** Δοθείσης μιας προσαρμοσμένης διαδικασίας $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ στη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ κ' $\alpha<b$, $\alpha,b\in\mathbb{R}$ ορίζουμε τον κανόνα

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \alpha_n=0 \text{ κ' } \mathfrak{F}_n<\alpha \\ 1, & \text{εάν } \alpha_n=1 \text{ κ' } \mathfrak{F}_n\leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \alpha_1=0 \qquad \underline{\Delta o'}\ \{\alpha_{n+1}\in B\}\in\mathcal{F}_n$$

$$\alpha_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega\in\{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n<\alpha\}\cup\{\alpha_n=1,\mathfrak{F}_n\leq b\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \mathbb{1}_{\{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n<\alpha\}} + \mathbb{1}_{\{\alpha_n=1,\mathfrak{F}_n\leq b\}}$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}\,),$$

$$\begin{aligned} \text{otherwise} &= \{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n<\alpha\}'\cap\{\alpha_n=1,\mathfrak{F}_n\leq b\}' = \\ &= (\{\alpha_n=1\}\cup\{\mathfrak{F}_n\geq\alpha\})\cap(\{\alpha_n=0\}\cup\{\mathfrak{F}_n>b\}) \\ &= \{\alpha_n=1,\mathfrak{F}_n>b\}\cup\{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n\geq\alpha\}\cup\{\mathfrak{F}_n>b\} = \\ &= \{\alpha_n=1,\mathfrak{F}_n>b\}\cup\{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n\geq\alpha\}\cup\{\alpha_n=0,\mathfrak{F}_n>b\} \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1} = g_1(\alpha_n, \xi_n) = g_1(g_1(\alpha_{n-1}, \xi_{n-1}), \xi_n) = g_2(\alpha_{n-1}, \xi_n, \xi_{n-1}) =$$

$$\dots = g_n(\alpha_1, \xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1) = g_n(\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1) \Rightarrow \{\alpha_{n+1} \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

---

Χρησιμοποιώντας την στρατηγική $\alpha_{n+1} = \mathbb{1}_{\{\alpha_n=0, \xi_n<\alpha\}} + \mathbb{1}_{\{\alpha_n=1, \xi_n\le b\}}$ με $\alpha_1 = 0$, σημαίνει ότι αρχικά δεν παίζουμε έως την στιγμή που θα παρατηρήσουμε ότι $\xi_m < \alpha$. Τότε αρχίζουμε και παίζουμε $\alpha_{m+1} = 1$ κ' συνεχίζουμε έτσι έως την στιγμή που θα παρατηρήσουμε για κάποιο $n > m$ ότι $\xi_n > b$. Τότε σταματάμε να παίζουμε $\alpha_{n+1} = 0$ κ' περιμένουμε να δούμε το πρώτο $n' > n$ για το οποίο $\xi_{n'} < \alpha$ τότε $\alpha_{n'+1} = 1$ κλπ.

<u>Ορίζουμε</u>: $\{u_k = r\} = \{\alpha_r = 1, \alpha_{r+1} = 0\}$ = το $k$-τάξης upcrossing έγινε σε χρόνο $r$

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots$$

$\{U_n[\alpha, b] = k\} = \{u_k \le n, u_{k+1} > n\}$ = ο αριθμός των upcrossings έως κ' χρόνο $n$

---

<u>Λήμμα 4.1</u> (Η ανισότητα upcrossing)

$\{\xi_n\}_{n\ge0}$ supermartingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}_{n\ge0}$, $\alpha < b$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι: $\mathbb{E}\{U_n[\alpha, b]\} \le \frac{1}{b-\alpha} \mathbb{E}[(\xi_n - \alpha)^-]$.

$\gamma_n = (\alpha \cdot \xi)_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\xi_k - \xi_{k-1})$ = συνολικό κέρδος έως κ' χρόνο $n$ με την στρατηγική $\{\alpha_k\}_{k\ge1}$

$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0$, επειδή $\left.\begin{array}{l}\{\xi_n\}_{n\ge0} = \text{supermart} \\ \{\alpha_n\}_{n\ge1} = \text{φραγμένη κ' } \alpha_n \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \{\gamma_n\}_{n\ge1} = \text{supermart}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha_j = 1 \\ \alpha_{j+1} = 0 \end{array}\right\} u_{k-1} = j \\ \vdots \\ \alpha_i = 0 \\ \alpha_i = 0,\ \xi_i < \alpha :\ \alpha_{i+1} = 1 \\ \alpha_{i+1} = 1,\ \xi_{i+1} \le b :\ \alpha_{i+2} = 1 \\ \vdots \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_{i+r-1} = 1,\ \xi_{i+r-1} \le b :\ \alpha_{i+r} = 1 \\ \alpha_{i+r} = 1,\ \xi_{i+r} > b :\ \alpha_{i+r+1} = 0 \end{array}\right\} u_k = i+r \end{array}\right\} \Rightarrow Y_{u_k} - Y_{u_{k-1}} = \sum_{l=j+1}^{i+r} \alpha_l (\xi_l - \xi_{l-1}) = \sum_{l=i+1}^{i+r} (\xi_l - \xi_{l-1})$$

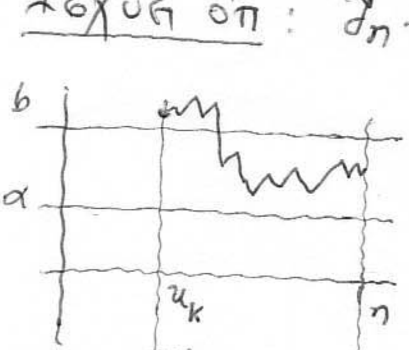
$$= \xi_{i+r} - \xi_i \ge b - \alpha \qquad : (41.1)$$

( <u>διότι</u> $\xi_{i+r} > b$ κ' $\xi_i < \alpha$ )

$$\left.\begin{array}{l} Y_{u_k} = (Y_{u_k} - \cancel{Y_{u_{k-1}}}) + (\cancel{Y_{u_{k-1}}} - \cancel{Y_{u_{k-2}}}) + \cdots + (\cancel{Y_{u_1}} - Y_{u_0}) \overset{(41.1)}{\ge} k\cdot(b-\alpha) \\ Y_{u_0} = Y_0 = 0 \quad ,\ u_0 = 0 < u_1 < \cdots < u_k \le n,\ u_{k+1} > n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

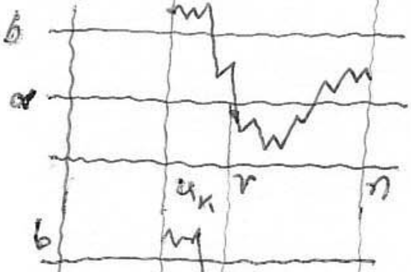
$$\Rightarrow \quad Y_{u_k} \ge (b-\alpha)\, U_n[\alpha, b] \qquad : (41.2)$$

<u>Ισχύει ότι</u>: $Y_n - Y_{u_k} \ge -(\xi_n - \alpha)^-$ , πράγματι από τα διαφορετικά σενάρια για την δυναμική της $\{\xi_n\}$ μετά το κ-τάξης upcrossing, έχουμε



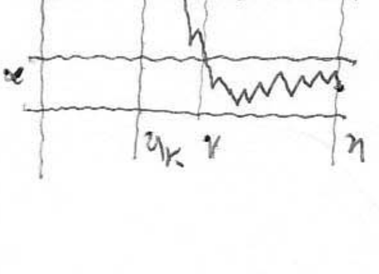

$$\Rightarrow \left[ Y_n - Y_{u_k} = 0,\ \xi_n > \alpha \Rightarrow (\xi_n - \alpha)^- = 0 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_n - Y_{u_k} \ge -(\xi_n - \alpha)^-$$




$$\Rightarrow Y_n - Y_{u_k} = \sum_{i=v+1}^{n} \overset{1}{\alpha_i} (\xi_i - \xi_{i-1}) = \xi_n - \xi_v \underset{\xi_v < \alpha}{\ge} \xi_n - \alpha = (\xi_n - \alpha)^+ - (\xi_n - \alpha)^- \ge$$

$$\ge -(\xi_n - \alpha)^- \quad ( \text{\underline{εδώ}}\ (\xi_n - \alpha)^- = 0 \ \text{\underline{επειδή}}\ \xi_n > \alpha )$$




$$\Rightarrow Y_n - Y_{u_k} = \xi_n - \xi_v \ge \xi_n - \alpha \ge -(\xi_n - \alpha)^-$$

$$( \text{\underline{εδώ}}\ (\xi_n - \alpha)^- > 0 \ \text{\underline{επειδή}}\ \xi_n < \alpha )$$

$$\gamma_n \geq \gamma_{u_K} - (\xi_n-\alpha)^- \overset{(41.2)}{\geq} (b-\alpha)\,U_n[\alpha,b] - (\xi_n-\alpha)^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-\alpha)\,\mathbb{E}\{U_n[\alpha,b]\} - \mathbb{E}\{(\xi_n-\alpha)^-\} \leq \mathbb{E}(\gamma_n)$$

$$\{\gamma_n\} = \text{supermart.} \Rightarrow \mathbb{E}(\gamma_n) \leq \mathbb{E}(\gamma_{n-1}) \leq \dots \leq \mathbb{E}(\gamma_1) = \mathbb{E}[\underbrace{\alpha_1(\gamma_1-\gamma_0)}_{0}] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{U_n[\alpha,b]\} \leq \frac{\mathbb{E}\{(\xi_n-\alpha)^-\}}{b-\alpha}$$

---

## Doob's Martingale Convergence Theorem (Thm 4·2)

Εαν $\{\xi_n\}$ είναι supermartingale ως προς $\{\mathcal{F}_n\}$ κ' $\{\xi_n\}$ φραγμένη στο $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ (δηλ. $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[|\xi_n|] = M < \infty$) τότε: υπάρχει $\xi \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ που είναι το $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ $P$-α.s (δηλ. $P\{\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\} = 1$)

$$\Omega \supset B = \{\liminf_{n\to\infty}\xi_n < \limsup_{n\to\infty}\xi_n\} \Rightarrow \exists\ \alpha<b,\ \liminf_{n\to\infty}\xi_n < \alpha < b < \limsup_{n\to\infty}\xi_n$$

επειδη το $\xi_n$ ταλαντώνεται άπειρες φορές μεταξύ του $\alpha$ κ' $b$ όταν $n\to\infty$ θα έχουμε $\lim_{n\to\infty} U_n[\alpha,b] = \infty$

<u>Εστω ότι</u>: $P(B)>0 \Leftrightarrow P\{\lim_{n\to\infty} U_n[\alpha,b] = \infty\} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{U_n[\alpha,b]\} = \infty$$

$$\mathbb{E}\{U_n[\alpha,b]\} \leq \frac{\mathbb{E}\{(\xi_n-\alpha)^-\}}{b-\alpha} \leq \frac{\mathbb{E}\{(\xi_n-\alpha)^- + (\xi_n-\alpha)^+\}}{b-\alpha} = \frac{\mathbb{E}\{|\xi_n-\alpha|\}}{b-\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}\{|\xi_n|\}+|\alpha|}{b-\alpha} \leq \frac{\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\{|\xi_n|\}+|\alpha|}{b-\alpha} = \frac{M+|\alpha|}{b-\alpha} \overset{\lim_{n\to\infty}(\cdot)}{\Rightarrow} \underbrace{\infty \leq \frac{M+|\alpha|}{b-\alpha}}_{\text{άτοπον}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0 \Leftrightarrow P\{\liminf_{n\to\infty}\xi_n = \limsup_{n\to\infty}\xi_n\} = 1$$

<u>δηλ</u> $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ $P$-α.s.

<u>Θα δείξουμε τώρα ότι $\xi \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$</u> $\mathbb{E}[|\xi|] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty}|\xi_n|] \leq$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\{|\xi_n|\} \leq \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|\xi_n|] = M < \infty \Rightarrow \xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

---

<u>Ασκ</u> Δό $\xi \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P) \Leftrightarrow \forall \epsilon>0\ \exists M>0 : \mathbb{E}\{|\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} < \epsilon$

$(\Leftarrow)$: $\mathbb{E}[|\xi|] = \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} + \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}\} \leq$

$$\leq \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} + M\underbrace{\mathbb{E}\{\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}\}}_{P\{|\xi|\leq M\}} \leq \epsilon + M < \infty$$

$(\Rightarrow)$: Το θεώρημα της Μονότονης σύγκλισης (MCT) μας λέει ότι

Εαν $X_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ τμ : $0 \leq X_k(\omega) \leq X_{k+1}(\omega) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n]$

<u>Θέτουμε</u> $X_M(\omega) = |\xi(\omega)|\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}(\omega)$, τότε $X_M(\omega) \leq X_{M+1}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$

$\{|\xi|\leq M\} \subset \{|\xi|\leq M+1\} \Rightarrow \mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}} \leq \mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M+1\}}$

$$\lim_{M\to\infty} X_M(\omega) = |\xi(\omega)| \underbrace{\lim_{M\to\infty} \mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}(\omega)}_{1} = |\xi(\omega)|$$

(MCT)

$$\Rightarrow \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}] = \mathbb{E}[\lim_{M\to\infty} |\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}] = \mathbb{E}(|\xi|)$$

$$\mathbb{E}(|\xi|) = \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} + \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|\leq M\}}\}$$

$\xrightarrow{\lim_{M\to\infty}(\cdot)}$ $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon>0\ \exists M = M(\epsilon)>0 : \mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>M\}}\} < \epsilon$$

---

<u>Ορσ</u> Μια διαδικασία $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ ονομάζεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη (uniformly integrable) εαν $\forall \epsilon>0\ \exists M = M(\epsilon)>0 : \mathbb{E}\{|\xi_n|\mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\} < \epsilon$ για $\forall n \geq 1$.

<u>Παρατηρηση</u> Εαν μια διαδικασία $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ είναι απλώς ολοκληρώσιμη ($\mathbb{E}\{|\xi_n|\}<\infty$) τότε απο την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι:

$$\forall \epsilon>0\ \exists M_n = M_n(\epsilon)>0 : \mathbb{E}\{|\xi_n|\mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M_n\}}\} < \epsilon$$

<u>δηλ</u> στην διαδ. $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ αντιστοιχεί μια ακολουθία $\{M_n\}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^+$ κ' <u>όχι ένας</u> $M = M(\epsilon) > 0$.

Lem 4.2 Εαν $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τότε για $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $P(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}\{|\xi| \mathbb{1}_A\} < \epsilon$

$$\mathbb{E}\{|\xi|\mathbb{1}_A\} = \int_A |\xi| dP = \overbrace{\int_A |\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi| \le M\}} dP}^{I_1} + \overbrace{\int_A |\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi| > M\}} dP}^{I_2}$$

$$I_1 \le M \cdot \int_A \mathbb{1}_{\{|\xi| \le M\}} dP = M \cdot P(A \cap \{|\xi| \le M\}) \le M \cdot P(A) < M\delta \equiv \epsilon/2$$

$$I_2 \le \int_\Omega |\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi| > M\}} dP = \mathbb{E}\left[|\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi| > M\}}\right] \overset{\xi \in L^1}{\Rightarrow} I_2 < \epsilon/2$$

τελικά: $\mathbb{E}\{|\xi| \mathbb{1}_A\} < \epsilon$

---

Ασκ 4.5 Εαν $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ κ' $\{\mathcal{F}_n\}_{n \ge 1}$ διήθηση τότε $\{\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_n)\}_{n \ge 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale

$\{\xi_n \in B\} = \{\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_n) \in B\} \in \mathcal{F}_n$ διότι $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη

$$\mathbb{E}[|\xi_n|] = \mathbb{E}\{|\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_n]|\} \le \mathbb{E}\{\mathbb{E}[|\xi| | \mathcal{F}_n]\} = \mathbb{E}[|\xi|] < \infty$$

$$\mathbb{E}[\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_{n-1}] \overset{\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n}{=\!=} \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_{n-1}] = \xi_{n-1}.$$

$$\infty > \mathbb{E}[|\xi|] \ge \mathbb{E}[|\xi_n|] \ge \mathbb{E}\left[|\xi_n| \mathbb{1}_{\{|\xi_n| > M\}}\right] > M P\{|\xi_n| > M\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow P\{|\xi_n| > M\} < \mathbb{E}[|\xi|]/M \\ \text{Εαν το } M \text{ είναι τ.ώ. } M > \mathbb{E}[|\xi|]/\delta \end{array}\right\} P\{|\xi_n| > M\} < \delta$$

$$\mathbb{E}\left\{|\xi_n| \mathbb{1}_{\{|\xi_n| > M\}}\right\} = \int_{\{|\xi_n| > M\}} |\xi_n| dP = \int_{\{|\xi_n| > M\}} |\mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_n]| dP \le$$

$$\le \int_{\{|\xi_n| > M\}} \mathbb{E}[|\xi| | \mathcal{F}_n] dP \underset{\{|\xi_n| > M\} \in \mathcal{F}_n}{=\!=\!=} \int_{\{|\xi_n| > M\}} |\xi| dP \overset{(\text{Lem } 4.2)}{<} \epsilon$$

<u>Prop 4.2</u> Έστω διαδικασία $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\xi_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τέτοια ώστε $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} \xi$ ( <u>δηλ</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|] = 0$ ) τότε η διαδικασία $\{\xi_n\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

$$\mathbb{E}\left\{|\xi_n| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\right\} = \mathbb{E}\left\{|\xi + (\xi_n - \xi)| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\right\} \leq$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}\left\{|\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\right\}}_{\mu_1} + \underbrace{\mathbb{E}\left\{|\xi_n - \xi| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\right\}}_{\mu_2}$$

$$\mu_2 = \int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n - \xi| dP \leq \int_{\Omega} |\xi_n - \xi| dP = \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|]$$

$$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi \Leftrightarrow \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|] \to 0 \Rightarrow \mathbb{E}[|\xi_n - \xi|] < \frac{\epsilon}{2}$$

Δηλαδή έχουμε ότι $\mu_2 < \frac{\epsilon}{2}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κ' $\mu_2 < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow \mathbb{E}\left\{|\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\right\} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$. Έχοντας υπόψιν το Lem 4.2 αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $P\{|\xi_n|>M\} < \delta \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$

<u>Πράγματι</u>: $\mathbb{E}[|\xi_n|] \geq \int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n| dP \geq M P\{|\xi_n|>M\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\{|\xi_n|<M\} \leq \frac{\mathbb{E}[|\xi_n|]}{M} \leq \frac{\sup\limits_{n\geq 1} \mathbb{E}[|\xi_n|]}{M} \equiv \delta \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

---

<u>Ασκ 4.6</u> Δ.ό. εάν $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη τότε είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ δηλ. $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbb{E}[|\xi_n|] < \infty$

$$\mathbb{E}[|\xi_n|] = \int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n| dP + \int_{\{|\xi_n|\leq M\}} |\xi_n| dP < \epsilon + M \cdot P\{|\xi_n| \leq M\} \leq$$

$$\leq \epsilon + M < \infty \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|\xi_n|] < \infty$$

__Ασκ__ Δό εαν $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \; (\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\; P\{|\xi_n - \xi| \geq \epsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$

$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi \Leftrightarrow P\{\xi_n \not\to \xi\} = 0 \;,\; N = \{\xi_n \not\to \xi\}$

$$A_n = \bigcup_{m \geq n} \{|\xi_m - \xi| > \epsilon\} \Rightarrow A_n \supset A_{n+1}$$

$$A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow P(A_\infty) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \quad : (46.1)$$

$$\omega \in N' \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\exists n' = n'(\epsilon),\; n > n' \Rightarrow |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \epsilon$$

$$n > n' \Rightarrow \omega \notin A_n \Rightarrow \omega \notin A_\infty \Rightarrow A_\infty \cap N' = \emptyset \Rightarrow A_\infty \subset N \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow P(A_\infty) = 0 \overset{(46.1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \\ \{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \subset A_n \Leftrightarrow P\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \leq P(A_n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

---

__Thm 4.3__ Κάθε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale (submartingale) $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει στον $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ είναι κ' φραγμένη στον $L^1 \Rightarrow$ Από το Doob's Martingale convergence Theorem, υπάρχει $\xi \in L^1$ τέτοιο ώστε $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi \Rightarrow$
$\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$.
Για ευκολία θα θεωρήσουμε $\xi = 0$ : $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P\{|\xi_n| > \epsilon/3\} < \epsilon/3M < 1 \quad (M > \epsilon/3) \quad : (46.2)$
Απο ομοιόμορφη σύγκλιση $\Rightarrow \mathbb{E}[|\xi_n| \mathbb{1}_{\{|\xi_n| > M\}}] < \epsilon/3 \quad : (46.3)$

$$\mathbb{E}[|\xi_n|] = \mathbb{E}[|\xi_n|\mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}] + \mathbb{E}[|\xi_n|\mathbb{1}_{\{|\xi_n|\le \epsilon/3\}}] +$$
$$+ \mathbb{E}[|\xi_n|\mathbb{1}_{\{\epsilon/3<|\xi_n|\le M\}}]$$
$$< \epsilon/3 + \epsilon/3 \cdot P\{|\xi_n|\le \epsilon/3\} + M\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\epsilon/3<|\xi_n|\le M\}}]$$
$$= \epsilon/3 + \epsilon/3 \cdot P\{|\xi_n|\le \epsilon/3\} + M P\{\epsilon/3<|\xi_n|\le M\}$$
$$\le \epsilon/3 + \epsilon/3 \cdot P\{|\xi_n|\le \epsilon/3\} + M P\{\epsilon/3<|\xi_n|\}$$
$$< \epsilon/3 + \epsilon/3 + M\cdot \epsilon/3M = \epsilon$$

---

<u>Thm 4.4</u> Έστω οτι η διαδικασία $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ είναι martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^{\xi}\}_{n\ge1}$ κ' ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη <u>τοτε</u>: η $\xi_n$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν $\xi_n = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_n)$ <u>όπου</u> $\xi$ το $L^1$ όριο της $\xi_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\{\xi_n\} \text{ είναι marting. ως προς } \{\mathcal{F}_n\} \Rightarrow \forall m\ge n \quad \mathbb{E}(\xi_m/\mathcal{F}_n) = \xi_n \\ \forall A\in\mathcal{F}_n \text{ έχουμε } \int_A \mathbb{E}(\xi_m/\mathcal{F}_n)\,dP = \int_A \xi_m\,dP\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \xi_n\,dP = \int_A \xi_m\,dP \quad \forall m\ge n \quad : (47.1)$$

Επειδη η $\{\xi_n\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη θα έχει $L^1$ οριο. Έστω $\xi\in L^1$ αυτό το όριο τοτε

$$(47.1) \Rightarrow \int_A (\xi_n-\xi)\,dP = \int_A (\xi_m-\xi)\,dP \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\mathbb{E}[(\xi_n-\xi)\mathbb{1}_A]| = |\mathbb{E}[(\xi_m-\xi)\mathbb{1}_A]| \le \mathbb{E}[|\xi_m-\xi|\mathbb{1}_A] \le$$

$$\left.\begin{array}{l}\le \mathbb{E}[|\xi_m-\xi|] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_n\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A),\ \forall A\in\mathcal{F}_n \\ \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A) = \int_A \xi\,dP = \int_A \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_n)\,dP\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_A \xi_n\,dP = \int_A \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_n)\,dP \Leftrightarrow \int_A [\underbrace{\xi_n - \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_n)}_{\mathcal{F}_n\text{-μετρήσιμη}}]\,dP = 0,\ \forall A\in\mathcal{F}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_n = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_n) \quad P\text{-a.s.}$$