Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Το βασικό χαρακτηριστικό των ΜΔ είναι ότι η μελλοντική τους εξέλιξη εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκονται στο παρόν κ' όχι από το παρελθόν τους

$$\{\xi_n\}_{n\geq 0} = ΜΔ \iff P\{\xi_n\in A \mid \mathcal{F}_n^{\xi}\} = P\{\xi_n\in A \mid \xi_{n-1}\}$$

Εάν ξ_n είναι στοχ. διαδ. διακριτού χρόνου κ' διακριτού χώρου καταστάσεων S θα ισχύει ότι $\forall A\subseteq S$ $P\{\xi_{n+1}\in A \mid \xi_n = x, \xi_{n-1}=x_{n-1},\dots,\xi_0=x_0\}$

$= P\{\xi_{n+1}\in A \mid \xi_n = x\}$, $\forall x, x_{n-1},\dots,x_0\in S$ (Αλυσίδα Markov)

Τη πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας από το x στο A σε χρόνο n την συμβολίζουμε με

$$P\{\xi_{n+1}\in A \mid \xi_n = x\} = P(n,x,A)$$

Η διαδικασία είναι χρονικά ομογενής εάν

$$P(n,x,A) = P(n-1,x,A) = \dots = P(0,x,A) \equiv P(A|x)$$

<u>Παραδ.</u> Ο τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ $\xi_n = \xi_{n-1} + Z_n$, $\xi_0 = 0$

$Z_n \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \pi(\cdot)$ είναι χρονικά ομογενής αλυσ. Markov

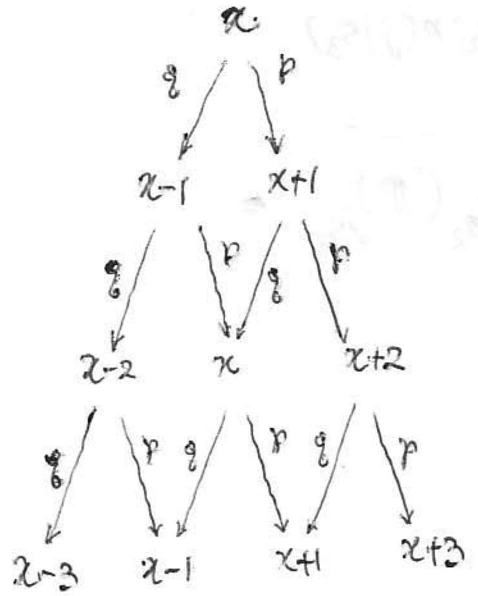
$$P\{\xi_{n+1}=y \mid \xi_n = x, \xi_{n-1}=x_{n-1},\dots,\xi_0=x_0\} = P\{Z_{n+1}=y-x\} = P\{\xi_{n+1}=y \mid \xi_n = x\},$$

$$P\{Z_{n+1}=y-x\} = P\{Z_n = y-x\} = \dots = P\{Z_1 = y-x\} = P(y|x) = \begin{cases} q & y = x-1 \\ p & y = x+1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η πιθανότητα μετάβασης $2^{ας}$ τάξης θα είναι

$$P\{\xi_{n+2}=y \mid \xi_n = x\} = P\{Z_{n+1}+Z_{n+2} = y-x\} =$$

$$= \begin{cases} q^2 & -2 = y-x \quad (Z_{n+1}=Z_{n+2}=-1) \\ 2pq & 0 = y-x \quad (Z_{n+1}=-1, Z_{n+2}=1 \text{ ή } Z_{n+1}=1, Z_{n+2}=-1) \\ p^2 & 2 = y-x \quad (Z_{n+1}=Z_{n+2}=1) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Η πιθ. μετάβασης $k^{οστής}$ τάξης θα είναι

$$\overbrace{P\{\xi_{n+k}=y \mid \xi_n = x\}}^{p_k(y|x)} = P\{\sum_{i=1}^{k} Z_{n+i} = y\} =$$

$$= \begin{cases} Bin(0|k,p) & -k = y-x \\ Bin(1|k,p) & -k+2 = y-x \\ \vdots & \vdots \\ Bin(m|k,p) & -k+2m = y-x \\ \vdots & \vdots \\ Bin(k|k,p) & -k+2k = y-x \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k(y|x) = \begin{cases} Bin(m|k,p), & y = x-k+2m, \quad 0 \le m \le k \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$p_k(y|x) = \begin{cases} Bin\left(\frac{k+(y-x)}{2} \middle| k,p\right), & k+y-x = \text{άρτιος} \\ 0, & k+y-x = \text{περιττός} \end{cases}$$

<u>Ασκ</u> Δείξτε ότι η πιθ. ο τ.π. να ξαναγυρίσει στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε, μεγιστοποιείται όταν $p=1/2$

$$p_k(x|x) = \begin{cases} Bin(k/2|k,p), & k = \text{άρτιος} \\ 0, & k = \text{περιτ.} \end{cases}$$

<u>δηλ</u> θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την συν/ση $p_{2k}(x|x) = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k$

$$\frac{\partial}{\partial p}\log p_{2k}(x|x) = \frac{k}{p} - \frac{k}{1-p} = 0 \Rightarrow p = 1/2, \quad \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log p_{2k}(x|x) = -\frac{k}{p^2} - \frac{k}{(1-p)^2} < 0, \ \forall p \in (0,1)$$

Είδαμε ότι μια <u>MC</u> με τιμές στο S είναι χρονικά ομογενής όταν $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in S^2$ $P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{X_1=j \mid X_0=i\} = p(j|i)$

Η τιμή $p(j|i)$ ονομάζεται πιθ. μετάβασης από την κατάσταση $i \in S$ στην κατάσταση $j \in S$.

<u>Ορσ</u> Ο πίνακας $\mathbb{P} = [\,p(j|i)\,]_{j,i \in S}$ είναι ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας $\{X_n\}$

<u>Ορσ</u> Ο πίνακας $A = [\alpha_{ji}]_{j,i \in S}$ ονομάζεται στοχαστικός εάν:

(i) $\alpha_{ji} \geq 0, \ \forall\, j,i \in S$ (ii) $\sum_{j \in S} \alpha_{ji} = 1$

<u>Ασκ</u> Δείξτε ότι $\mathbb{P}^n$ είναι στοχαστικός $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ο $\mathbb{P}$ είναι στοχ. $\sum_{j \in S} p(j|i) = \sum_{j \in S} P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P\{X_{n+1} \in S \mid X_n=i\} = 1$

Δεχόμαστε ότι ο $\mathbb{P}^n$ είναι στοχ. κ' δείχνουμε ότι ο $\mathbb{P}^{n+1}$ είναι στοχ.

$$\sum_{j \in S} (\mathbb{P}^{n+1})_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} (\mathbb{P}^n)_{jk} (\mathbb{P})_{ki} = \sum_{k \in S} (\mathbb{P})_{ki} \underbrace{\sum_{j \in S} (\mathbb{P}^n)_{jk}}_{1} = \sum_{k \in S} (\mathbb{P})_{ki} = 1$$

<u>Ορσ</u> Ο πίνακας $n^{\text{οστής}}$ τάξης μετάβασης μιας αλυσ. Markov $\{X_n\}$ με πιθ μετάβασης $\mathbb{P}$, είναι ο πίνακας $\mathbb{P}_n$

$$\mathbb{P}_n = [\,p_n(j|i)\,]_{j,i \in S}, \quad p_n(j|i) = P\{X_n=j \mid X_0=i\}$$

<u>Πρόταση</u> Ισχύει ότι $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n$

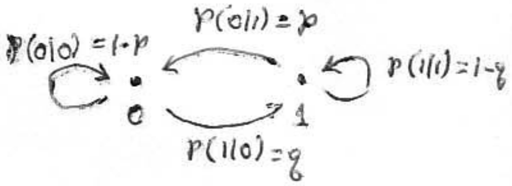
$$P\{X_n=j\} = \sum_{i, s_1, \dots, s_{n-1}} \underbrace{P\{X_0=i, X_1=s_1, \dots, X_{n-1}=s_{n-1}, X_n=j\}}_{P\{X_0=i\} P\{X_1=s_1 \mid X_0=i\} \cdots P\{X_n=j \mid X_{n-1}=s_{n-1}\}} =$$

$$= \sum_{i \in S} P\{X_0=i\} \underbrace{\sum_{s_1, \dots, s_{n-1}} p(s_1|i)\, p(s_2|s_1) \cdots p(s_{n-1}|s_{n-2})\, p(j|s_{n-1})}_{p_n(j|i) = (\mathbb{P}^n)_{ji}}$$

<u>Παρατήρηση</u> Εάν $\pi_n(j) = P\{X_n = j\}$, $\pi_n = [\pi_n(j)]_{j \in S}$

θα έχουμε $\pi_n = \mathbb{P}^n \pi_0 = \mathbb{P}(\mathbb{P}^{n-1}\pi_0) = \mathbb{P}\pi_{n-1}$.

<u>Εφαρμογή</u> Δίνεται διακατάστατη αλυσ. Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(0|1) \\ p(1|0) & p(1|1) \end{bmatrix}$



$$p_n(0|0) = P\{X_n = 0 | X_0 = 0\} = P\{X_n = 0, X_{n-1} = 0 | X_0 = 0\} + P\{X_n = 0, X_{n-1} = 1 | X_0 = 0\}$$

$$= P\{X_{n-1} = 0 | X_0 = 0\} P\{X_n = 0 | X_{n-1} = 0\} + P\{X_{n-1} = 1 | X_0 = 0\} P\{X_n = 0 | X_{n-1} = 1\}$$

$$= p_{n-1}(0|0)\, p(0|0) + (1 - p_{n-1}(0|0))\, p(0|1) = q + (1-p-q)\, p_{n-1}(0|0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(0|0) = q + (1-p-q)\{q + (1-p-q)\, p_{n-2}(0|0)\} = \{1 + (1-p-q)\}q + (1-p-q)^2 p_{n-2}(0|0)$$

$$\Rightarrow p_n(0|0) = \{1 + (1-p-q) + \cdots + (1-p-q)^{n-1}\} q + (1-p-q)^n \overbrace{p_0(0|0)}^{1}$$

$$= \frac{1-(1-p-q)^n}{1-(1-p-q)} + (1-p-q)^n = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$\Rightarrow p_n(1|0) = 1 - p_n(0|0) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

Από συμμετρία θα έχουμε

$$p_n(1|1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

$$p_n(0|1) = 1 - p_n(1|1) = \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} p_n(0|0) & p_n(0|1) \\ p_n(1|0) & p_n(1|1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix} + (1-p-q)^n \begin{bmatrix} \frac{p}{p+q} & -\frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{bmatrix} = A + (1-p-q)^n B$$

<u>Παρατηρούμε ότι</u> (i) $p = q = 0 \Rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{1} \Rightarrow \pi_n = \mathbb{P}^n \pi_0 = \pi_0, \ \forall n \geq 1$

(ii) $p = q = 1 \Rightarrow \mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & n = \text{άρτιος} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & n = \text{περιτ.} \end{cases}$

$\pi_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ αρχική κατανομή της αλυσ. $\alpha = P\{X_0 = 0\}$
$\beta = 1-\alpha$

$\pi_0' = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, τότε $\mathbb{P}^n \pi_0 = \begin{cases} \pi_0 , & n = \text{άρτιος} \\ \pi_0' , & n = \text{περιττός} \end{cases}$

(iii) $|1-p-q| < 1$

τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} \tilde{q} & \tilde{q} \\ \tilde{p} & \tilde{p} \end{bmatrix}$, $\tilde{q} = \frac{q}{p+q}$, $\tilde{p} = \frac{p}{p+q}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim p_n(0|0) = \lim p_n(0|1) = \tilde{q} \\ \lim p_n(1|0) = \lim p_n(1|1) = \tilde{p} \end{cases}$

θέτοντας $\alpha_n = (1-p-q)^n$

$$\pi_n = \mathbb{P}^n \pi_0 = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \alpha_n \begin{bmatrix} \alpha\tilde{p} - \beta\tilde{q} \\ -\alpha\tilde{p} + \beta\tilde{q} \end{bmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \pi_*$$

<u>δηλαδή</u> $\mathbb{P}\pi_* = \pi_*$, το π_* είναι το ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{P}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εαν λύναμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ x+y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -px+qy=0 \\ px-qy=0 \\ x+y=1 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} x = \tilde{q} \\ y = \tilde{p} \end{array}$$

<u>Ορισμός</u> Η κατάσταση $j \in S$ είναι προσπελάσιμη απο την $i \in S$ $(i \to j)$ εαν $\exists n \in \mathbb{N} : p_n(j|i) > 0$

<u>Ορισμός</u> Δύο καταστάσεις $i \in S$ κ' $j \in S$ <u>επικοινωνούν</u> εαν $\exists n \in \mathbb{N} : p_n(j|i) > 0$ κ' $\exists m \in \mathbb{N} : p_m(i|j) > 0$ $(i \leftrightarrow j)$

<u>Ορισμός</u>: Εαν για $\forall (i,j) \in S^2$ έχουμε $i \leftrightarrow j$, τότε όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους κ' η αλυσ. Markov λέμε οτι είναι αδιαχώριστη (irreducible)

Η σχέση $\leftrightarrow$ είναι σχέση ισοδυναμίας που χωρίζει το S σε κλάσεις ισοδυναμίας. Στην περίπτωση που έχουμε μία μόνο κλάση ισοδυναμίας η αλυσ. είναι αδιαχωρίσιμη. Όταν έχουμε περισσότερες από μία κλάσης ισοδυναμίας η αλυσ. είναι διαχωρίσιμη (reducible).

ορσ Η περίοδος $d(j)$ της κατάστασης $j \in S$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (gcd) των $n \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν $p_n(j|j) > 0$

$$d(j) = \gcd\{n \in \mathbb{N} : p_n(j|j) > 0\}$$

$d(j) > 1 \Rightarrow$ η $j \in S$ είναι περιοδική με περίοδο $d(j)$

$d(j) = 1 \Rightarrow$ η $j \in S$ είναι απεριοδική

ορσ Ορίζουμε τον τυχαίο χρόνο $T_j : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (stopping time) να είναι ο χρόνος της πρώτης επίσκεψης της αλυσίδας στην κατάσταση j μετά το χρόνο 0.

ορσ Ορίζουμε την πιθ. η διαδικασία να επισκεφθεί για πρώτη φορά το j, στο βήμα n, δοθέντος ότι ξεκίνησε από το i (first passage time prob.)

$$f_{ji}(n) = P\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i\}$$

ορσ Ορίζουμε την πιθ. η διαδικασία να επισκεφθεί την κατάσταση j σε πεπερασμένο χρόνο, ξεκινώντας από την i

$$\begin{aligned} f_{ji} &= P\{T_j < \infty \mid X_0 = i\} = P\{\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\} \\ &= P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \mid X_0 = i\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_j = n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}(n). \end{aligned}$$

<u>Ορσ</u> Η κατάσταση $j \in S$ είναι <u>επανερχόμενη</u> (recurrent) εαν η διαδικασία ξεκινώντας απο το j θα ξαναγυρίσει στο j σε πεπερασμένο χρόνο

$$f_{jj} = 1 \Leftrightarrow P\{T_j < \infty \mid X_0 = j\} = 1 \Leftrightarrow P\{T_j = \infty \mid X_0 = j\} = 0$$

<u>Ορσ</u> Η κατάσταση $j \in S$ είναι <u>παροδική</u> (transient) εαν υπάρχει θετική πιθανότητα η διαδικασία ξεκινώντας απο το j, να μήν ξαναγυρίσει ποτέ πίσω

$$f_{jj} < 1 \Leftrightarrow P\{T_j < \infty \mid X_0 = j\} < 1 \Leftrightarrow P\{T_j = \infty \mid X_0 = j\} > 0$$

<u>Ορσ</u> Ο αναμενόμενος χρόνος της πρώτης επίσκεψης της διαδικασίας στην κατάσταση j (<u>mean recurrence time</u>) μετά τον χρόνο 0, δοθέντος οτι η διαδικασία ξεκινησε από το i είναι μ_{ji}

$$\mu_{ji} = \mathbb{E}[T_j \mid X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P\{T_j = n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ji}(n)$$

(i) Εαν $f_{jj} = 1$ (j = recurrent) κ' $\mu_{jj} < \infty$ η κατάσταση $j \in S$ λέμε οτι είναι θετικά επανερχόμενη (<u>positive recurrent</u>)

(ii) Εαν $f_{jj} = 1$ κ' $\mu_{jj} = \infty$ λέμε ότι η κατάσταση $j \in S$ είναι μηδενικά επανερχόμενη (<u>null recurrent</u>)

ΕΡΓΟΔΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

<u>Θεώρημα</u> (Το βασικό οριακό θεώρημα για αλυσίδες Markov) Εαν $\{X_n\}_{n \geq 0}$ αδιαχωρίσιμη κ' εργοδική (θετικά επανερχόμενη κ' απεριοδική) αλυσ. Markov τότε

$$\lim_{n \to \infty} p_n(j|i) = \frac{1}{\mu_{jj}}, \ \forall i \in S$$

όπου $\mu_{jj} = \mathbb{E}[T_j \mid X_0 = j]$ το mean recurrence time για την κατάσταση $j \in S$

Εαν $P = [p(j|i)]_{j,i \in S}$ τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή π με $\pi_i > 0$, $\forall i \in S$ που ικανοποιεί $P\pi = \pi$ κ' $\lim_{n \to \infty} p_n(j|i) = \pi_j$, $\forall j, i \in S$

Ενώ (i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = [\pi_{ji}]_{j,i\in S}$ με $\pi_{ji} = \pi_j$, $\forall i \in S$

(ii) $\lim \mathbb{P}^n \pi_0 = \pi$ για κάθε αρχική κατανομή π_0

<u>Παρατήρηση</u> Η στάσιμη κατανομή π ικανοποιεί την εξίσωση

$$\pi_j = \sum_{i\in S} p(j|i)\pi_i \ , \ \forall j \in S \iff \pi = \mathbb{P}\pi$$

<u>Ασκ</u> Δίνεται αλυσ. Markov (όχι κατ' ανάγκη χρονικά ομογενής).

Δείξτε ότι για $\forall\, m<r<n$ έχουμε

$$P\{X_n=j|X_m=i\} = \sum_{s\in S} P\{X_n=j|X_r=s\}P\{X_r=s|X_m=i\}$$

$$P\{X_n=j|X_m=i\} = \sum_{s\in S} P\{X_n=j, X_r=s|X_m=i\} =$$

$$= \sum_{s\in S} P\{X_r=s|X_m=i\}P\{X_n=j|X_r=s, X_m=i\} =$$

$$= \sum_{s\in S} P\{X_n=j|X_r=s\}P\{X_r=s|X_m=i\} \quad : (55.1)$$

<u>Παρατήρηση</u> Εάν η αλυσ. είναι χρονικά ομογενής

$$(55.1) \Rightarrow P\{X_{n-m}=j|X_0=i\} = \sum_{s\in S} P\{X_{n-r}=j|X_0=s\}P\{X_{r-m}=s|X_0=i\}$$

θέτοντας $n-r=\alpha$ κ' $r-m=b$ παίρνουμε την <u>εξίσωση των Chapman – Kolmogorov</u>

$$p_{\alpha+b}(j|i) = \sum_{s\in S} p_\alpha(j|s)p_b(s|i)$$

<u>Ασκ</u> Δ.ό. εάν υπάρχουν δύο στάσιμες κατανομές π κ' $\tilde{\pi}$ $(\pi\neq\tilde{\pi})$ τότε υπάρχουν κ' άπειρες στάσιμες κατανομές

ορίζουμε $\varphi = \alpha\pi + (1-\alpha)\tilde{\pi}$ $\quad 0\leq\alpha\leq 1$ $\quad$ τότε

$$\sum_{i\in S} p(j|i)\varphi_i = \sum_{i\in S} p(j|i)\{\alpha\pi_i + (1-\alpha)\tilde{\pi}_i\} = \alpha\sum_{i\in S} p(j|i)\pi_i +$$

$$+ (1-\alpha)\sum_{i\in S} p(j|i)\tilde{\pi}_i = \alpha\pi_j + (1-\alpha)\tilde{\pi}_j = \varphi_j \ , \ \forall \alpha\in[0,1].$$

<u>Θεώρημα</u>: Σε μια αλυσ. με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων, που είναι αδιαχωρίσιμη, όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναλαμβανόμενες.

<u>Παράδειγμα</u>: Να δειχθεί ότι η αλυσ Markov με πίνακα μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ έχει μοναδική στάσιμη κατανομή στην οποία κ' συγκλίνει.

$S = \{0,1,2\}$ κ' $p(j|i) > 0, \forall i,j \in S \Rightarrow$ Η αλυσ. είναι αδιαχωρίσιμη

$\Rightarrow$ Επειδή $|S| < \infty$ όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναλαμβανόμενες.

Επειδή $p(j|j) > 0 \Rightarrow d(j) = 1, \forall j \in S \Rightarrow$ Η αλυσ. είναι απεριοδική

Έτσι υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή στην οποία η αλυσίδα συγκλίνει.

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}\pi = \pi \\ &\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{6}\pi_2 &= \pi_0 \\ \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{3}\pi_2 &= \pi_1 \\ \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \left.\right\} \left.\begin{aligned} -6\pi_0 \qquad + 4\pi_2 &= 0 \\ 2\pi_0 - 3\pi_1 + 2\pi_2 &= 0 \\ 6\pi_0 \qquad - 4\pi_2 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_2 &= \tfrac{3}{2}\pi_0 \\ \pi_1 &= \tfrac{5}{3}\pi_0 \\ \pi_0 + \tfrac{5}{3}\pi_0 + \tfrac{3}{2}\pi_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \pi_0 &= 6/25 \\ \pi_1 &= 10/25 \\ \pi_2 &= 9/25 \end{aligned}$$

<u>Ορσ</u> Ένας πίνακας μετάβασης $\mathbb{P}$ ονομάζεται διπλά στοχαστικός όταν ισχύει $\sum_{i \in S} p(j|i) = 1$

<u>Ασκ</u> (i) Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ αλυσ. Markov με διπλά στοχαστικό πίνακα μετάβασης $\mathbb{P}$. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της αλυσ.

(ii) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι αλυσίδες με πίνακες μετάβασης $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{bmatrix}$, $p+q=1$

(i) $\mathbb{P}\pi = \pi \Leftrightarrow \pi_j = \sum_{i\in S} p(j|i)\pi_i \,, \forall j \in S$ θέτω $\pi_j = c, \forall j \in S$

$\Rightarrow c = \sum_{i\in S} p(j|i) c \Leftrightarrow \sum_{i \in S} p(j|i) = 1$ που είναι αληθές

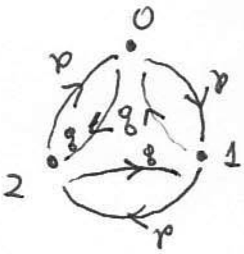
επειδή ο $\mathbb{P}$ είναι διπλά στοχαστικός. Όμως $\sum_{j\in S} \pi_j = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j\in S} c = 1 \Rightarrow c = |S|^{-1}$

(ii) – (α) : Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi^T = [1/3, 1/3, 1/3]$ αλλά δεν έχουμε σύγκλιση στην στάσιμη κατανομή <u>επειδή</u> $\mathbb{P}^{3n} = \mathbb{1}\,, \forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow p_{3n}(j|j) > 0 \,, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow d(j) = \gcd\{3, 6, 9, \ldots\} = 3$

(ii) – (β) : Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi^T = [1/3, 1/3, 1/3]$



Όμως $d(j) = \gcd\{2, 3, \ldots\} = 1$ δηλ. η αλυσ. είναι απεριοδική, επειδή $p_n(j|i) > 0$ κ' $p_m(i|j)$ για κατάλληλα n, m, είναι κ' αδιαχώριστη (άρα κ' θετικά επαναλαμβανόμενη) $\Rightarrow p_n(j|i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/3 \,, \forall j, i \in S$ δηλ. η αλυσίδα συγκλίνει στην στάσιμη κατανομή της

(ii) – (γ) : Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi^T = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$

αλλά $p_n(j|i)$ δεν έχει όριο όταν $n \to \infty$. Για παράδειγμα

$$p_n(1|1) = \begin{cases} a_n \,, & n = \text{άρτιος} \\ 0 \,, & n = \text{περιττός} \end{cases} \,, \quad a_n \neq 0$$

$$a_n = q \sum_{\substack{k=0 \\ k = \text{περιττός}}}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k+1} + p \sum_{\substack{k=0 \\ k = \text{άρτιος}}}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k+1}$$

δηλαδή η διαδικασία δεν συγκλίνει στη στάσιμη κατανομή της

Ασκ Δό για $\forall m<n$ κ' $\forall y, x, s_{m-1}, \dots, s_0 \in S$

$$P\{\xi_n = y \mid \xi_m = x, \xi_{m-1} = s_{m-1}, \dots, \xi_0 = s_0\} = P\{\xi_n = y \mid \xi_m = x\}$$

$$P\{\xi_n = y \mid \xi_m = x, \dots, \xi_0 = s_0\} = \sum_{s_{n-1}, \dots, s_{m+1} \in S} P\{\xi_n = y, \xi_{n-1} = s_{n-1}, \dots, \xi_{m+1} = s_{m+1} \mid \xi_m = x, \dots\}$$

$$= \sum_{s_{n-1}, \dots, s_{m+1} \in S} P\{\xi_{m+1} = s_{m+1} \mid \xi_m = x\} P\{\xi_{m+2} = s_{m+2} \mid \xi_{m+1} = s_{m+1}\} \cdots P\{\xi_n = y \mid \xi_{n-1} = s_{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{P\{\xi_m = x\}} \sum_{s_{n-1}, \dots, s_{m+1} \in S} P\{\xi_m = x, \xi_{m-1} = s_{m-1}, \dots, \xi_{n-1} = s_{n-1}, \xi_n = y\}$$

$$= \frac{1}{P\{\xi_m = x\}} P\{\xi_m = x, \xi_n = y\} = P\{\xi_n = y \mid \xi_m = x\}$$

Ασκ Δό εαν $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}$ = αλυσ. Markov τότε κ' η χρονικά ανεστραμμένη ακολουθία τ.μ. $\{\xi_N, \xi_{N-1}, \dots, \xi_0\}$ = αλυσ. Markov, $\forall N \in \mathbb{N}$.

$$P\{\xi_n = y \mid \xi_{n+1} = x, \xi_{n+2} = s_{n+2}, \dots, \xi_N = s_N\} = \frac{P\{\xi_n = y, \dots, \xi_N = s_N\}}{P\{\xi_{n+1} = x, \dots, \xi_N = s_N\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi_n = y\} P\{\xi_{n+1} = x \mid \xi_n = y\} P\{\xi_{n+2} = s_{n+2} \mid \xi_{n+1} = x\} \cdots P\{\xi_N = s_N \mid \xi_{N-1} = s_{N-1}\}}{P\{\xi_{n+1} = x\} \cdot P\{\xi_{n+2} = s_{n+2} \mid \xi_{n+1} = x\} \cdots P\{\xi_N = s_N \mid \xi_{N-1} = s_{N-1}\}}$$

$$= \underbrace{\frac{P\{\xi_n = y\} P\{\xi_{n+1} = x \mid \xi_n = y\}}{P\{\xi_{n+1} = x\}}}_{P\{\xi_n = y \mid \xi_{n+1} = x\}} = \text{ανεξάρτητο του } \xi_{n+2}, \dots, \xi_N \quad : (58.1)$$

Παρατήρηση Ας υποθέσουμε οτι η διαδικασία $\{\xi_0, \dots, \xi_N\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι χρονικά ομογενής δηλ $P\{\xi_{n+1} = x \mid \xi_n = y\} = \dots = P\{\xi_1 = x \mid \xi_0 = y\} = \underbrace{p(x|y)}_{P(y,x)}$

$$(58.1) \Rightarrow P\{\xi_n = y \mid \xi_{n+1} = x\} = \frac{\pi_n(y)\, p(x|y)}{\pi_{n+1}(x)} \quad (58.2)$$

$\boxed{\text{Δηλ το time reversed chain γενικά δεν είναι χρονικά ομογενής αλυσίδα}}$

<u>Συμβολισμός</u> $\underline{P}(n,x,y) = P\{X_{n+1}=y \mid X_n=x\}$

$\underline{P}^*(n,x,y) = P\{X_n=y \mid X_{n+1}=x\}$ time reversed

Εαν η αλυσίδα $\{X_n\}$ είναι χρονικά ομογενής

$$\underline{P}(n,x,y) = \underline{P}(n-1,x,y) = \dots = \underline{P}(0,x,y) \equiv \underline{P}(x,y)$$

Έτσι η σχέση (58.2) γίνεται $\underline{P}^*(n,x,y) = \dfrac{\pi_n(y)\,\underline{P}(y,x)}{\pi_{n+1}(x)}$ (59.1)

Εαν για την $\{X_n\}$ ισχύει το <u>εργοδικό</u> <u>θεώρημα</u>, δηλ υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή $\pi(\cdot)$ τέτοια ώστε όταν $n \to \infty$, $X_n \sim \pi(\cdot)$ για $\forall$ αρχική κατανομή $X_0 \sim \pi_0(\cdot)$ <u>τότε</u>:

(i) Εαν $X_0 \sim \pi(\cdot) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: X_n \sim \pi(\cdot) \overset{(59.1)}{\Rightarrow} \underline{P}^*(x,y) = \dfrac{\pi(y)\,P(y,x)}{\pi(x)}$

δηλαδή κ' η time reversed chain είναι χρονικά ομογενής.

(ii) Εαν ζητήσουμε $\underline{P}^*(x,y) = \underline{P}(x,y) \Rightarrow \underline{P}(x,y)\pi(x) = \underline{P}(y,x)\pi(y)$

<u>Ορσ</u> Μια αλυσ. Markov $\{X_n\}$ είναι αναστρέψιμη (reversible) εαν $\underline{P}(x,y)\pi(x) = \underline{P}(y,x)\pi(y)$, $\forall (x,y) \in S^2$ (detailed balance equation)

<u>Παρατήρηση</u> Εαν $\{X_n\}$ = reversible $\Leftrightarrow \underline{P}(x,y)\pi(x) = \underline{P}(y,x)\pi(y)$

$$\Rightarrow \sum_{x\in S} \underline{P}(x,y)\pi(x) = \pi(y) \underbrace{\sum_{x\in S} \underline{P}(y,x)}_{1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \pi(y) = \sum_{x\in S} \underline{P}(x,y)\pi(x)$ που είναι η εξίσωση στασιμότητας