Συνεχής χώρος καταστάσεων $S \subseteq \mathbb{R}^d$

Η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ είναι Μαρκοβιανή εάν

$$P\{X_{t+1} \le y \mid \mathcal{F}_t\} = P\{X_{t+1} \le y \mid X_t\} = \mathcal{P}(t, X_t, y)$$

$$P\{X_{t+1} \le y \mid X_t = x\} = F_{X_{t+1}\mid X_t}(y\mid x) = \text{δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής}$$

Εάν η $\{X_t\}$ είναι χρονικά ομογενής $P\{X_{t+1} \le y \mid X_t = x\} = F(y\mid x)$
$= \mathcal{P}(x, y)$

<u>Ορσ</u> Η πυκνότητα μετάβασης από το x στο y είναι

$$p(t,x,y)\,dy = P\{y < X_{t+1} \le y+dy \mid X_t = x\} = P\{X_{t+1} \le y+dy \mid X_t = x\} - P\{X_{t+1} \le y \mid X_t = x\}$$

$$= \mathcal{P}(t,x,y+dy) - \mathcal{P}(t,x,y) = \left\{\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{P}(t,x,y)\right\} dy$$

<u>επλ</u> $p(t,x,y) = f_{X_{t+1}\mid X_t}(y\mid x)$ = δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας

Η κατανομή της X_t είναι $f_{X_t}(x) \equiv \pi_t(x)$ κ' έχουμε ότι

$$\pi_t(y) = \int_S \pi_{t-1}(x)\, p(t,x,y)\,dx$$

$$\pi_t(y) = f_{X_t}(y) = \int_S f_{X_{t-1},X_t}(x,y)\,dx = \int_S f_{X_{t-1}}(x) f_{X_t\mid X_{t-1}}(y\mid x)\,dx =$$

$$= \int_S \pi_{t-1}(x)\, p(t,x,y)\,dx$$

<u>Για χρονικά ομογενής αλυσ</u>: $\pi_t(y) = \int_S \pi_{t-1}(x)\, p(x,y)\,dx$

Η $n^{\text{οστής}}$ τάξης πυκνότητα μετάβασης είναι

$$p^n(t,x,y)\,dy = P\{y < X_{t+n} \le y+dy \mid X_t = x\} \underset{\text{εάν Χ.Ο.}}{\overset{\uparrow}{=}} p^n(x,y)$$

<u>Chapman - Kolmogorov</u> Εαν $\{X_t\}$ Μαρκοβιανη διαδικασία διακριτού χρόνου κ' συνεχή χώρου καταστάσεων S, που είναι Χ.Ο. έχουμε:

$$p^{n+m}(x,z) = \int_S p^n(x,y)\,p^m(y,z)\,dy$$

$$p^{n+m}(x,z)\,dz = P\{z<X_{n+m}\le z+dz \mid X_0=x\} = \frac{P\{x<X_0\le x+dx,\ z<X_{n+m}\le z+dz\}}{P\{x<X_0\le x+dx\}}$$

$$= \int_{S\ni y} \frac{P\{x<X_0\le x+dx,\ y<X_n\le y+dy,\ z<X_{n+m}\le z+dz\}}{P\{x<X_0\le x+dx\}}$$

$$= \int_{S\ni y} \frac{\cancel{P\{x<X_0\le x+dx\}}\,P\{y<X_n\le y+dy \mid X_0=x\}\,P\{z<X_{n+m}\le z+dz \mid X_n=y\}}{\cancel{P\{x<X_0\le x+dx\}}}$$

$$= \int_{S\ni y} \underbrace{P\{y<X_n\le y+dy \mid X_0=x\}}_{p^n(x,y)\,dy}\ \underbrace{P\{z<X_m\le z+dz \mid X_0=y\}}_{p^m(y,z)\,dz}$$

<u>Detailed Balance equation</u>: $p^*(t,x,y) = \dfrac{\pi_t(y)\,P(y,x)}{\pi_{t+1}(x)}$

Εαν $x_0 \sim \pi(\cdot)$ = η στάσιμη κατανομή

έχουμε $p^*(x,y) = \dfrac{\pi(y)\,p(y,x)}{\pi(x)}$. Ζητώντας $p^*(x,y) = p(x,y)$ (balance), $\forall (x,y)\in S^2$ παίρνουμε $\boxed{\pi(x)\,P(x,y) = \pi(y)\,p(y,x)}$

<u>Ασκ</u> Εαν για Χ.Ο. Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X_t\}$ υπάρχει πυκνότητα $\pi(\cdot)$ τέτοια ώστε $\pi(x)\,p(x,y) = \pi(y)\,p(y,x)$ τότε είναι reversible κ' $X_t \sim \pi(\cdot)$ όταν $t\to\infty$ (δηλ. $\pi(\cdot)$ = η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας)

$$\pi(x)p(x,y)=\pi(y)p(y,x) \overset{\int_S(\cdot)dx}{\Longrightarrow} \pi(y)=\int_S \pi(x)p(x,y)dx$$

<u>δηλ</u> η πυκνότητα $\pi(\cdot)$ ικανοποιεί την εξίσωση στασιμότητας.

Έστω τελεστής $\mathcal{P}(\cdot)=\int_S(\cdot)p(x,y)dx : M(S)\to M(S)$

όπου $M(S)$ οι πυκνότητες πάνω στο S κ' $p(x,y)$ η πυκνότητα μετάβασης της Χ.Ο. Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{X_t\}$ τότε η στάσιμη κατανομή είναι λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών

$\pi=\mathcal{P}\pi$

<u>Άσκ</u> $\quad \xi_{t+1}=\alpha\xi_t+\eta_{t+1}\ ,\quad \eta_{t+1}\overset{iid}{\sim}N(\cdot|0,\sigma^2),\ \forall t\geq 0$

$$\xi_{t+1}|\xi_t=x \overset{d}{=} \alpha x+\eta_{t+1}\overset{d}{=}N(\cdot|\alpha x,\sigma^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\xi_t\}=$ Χ.Ο.Μ.Δ. <u>κ'</u> $p(x,y)=N(y|\alpha x,\sigma^2)$

εάν λοιπόν $\xi_{t+1}\xrightarrow{d}\xi\ ,\ t\to\infty \Rightarrow \xi\overset{d}{=}\alpha\xi+\eta\ ,\ \eta\overset{d}{=}N(0,\sigma^2)$

$\Rightarrow \begin{cases}\mathbb{E}(\xi)=\alpha\mathbb{E}(\xi)+\mathbb{E}(\eta)\\ Var(\xi)=\alpha^2 Var(\xi)+Var(\eta)\end{cases}$ (επειδή ξ κ' η ανεξάρτητες)

$\Rightarrow \begin{cases}\mathbb{E}(\xi)=0\\ Var(\xi)=\dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}>0 \Leftrightarrow |\alpha|<1\end{cases} \quad : (62.1)$

$$\xi_t=\alpha\xi_{t-1}+\eta_t=\dots=\alpha^t\xi_0+\sum_{l=1}^{t-1}\alpha^l\eta_{t-l} \underset{t\to\infty}{\sim} \sum_{l=1}^{t-1}\alpha^l N(0,\sigma^2)=\sum_{l=1}^{t-1}N(0,\sigma^2\alpha^{2l})$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\xi_t\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right),\ |\alpha|<1\ ,\ \forall \xi_0\in M(S)$$

$$\pi(x)p(x,y) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}x^2\right] \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\alpha x)^2\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\alpha xy + y^2)\right] = \pi(y)p(y,x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi(x) = N(x|0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2})$

Η διαδικασία Poisson

Έστω $\eta_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda) = Ga(\cdot|1,\lambda)$ ο χρόνος αναμονής για την άφιξη ενός τυχαίου ενδεχόμενου τότε ορίζουμε

$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$ = ο χρόνος αναμονής για την άφιξη n ενδεχομένων

$$\begin{cases} N_t = \sup\{n \geq 0 : \zeta_n \leq t\} = \text{ο αριθμός των τυχαίων αφίξεων στο χρονικό διάστημα } [0,t] \\ N_0 = 0 \quad P\text{-a.s.} \end{cases}$$

$$P\{N_t = n\} = P(\{N_t < n+1\} \setminus \{N_t < n\}) = P(\{\zeta_{n+1} > t\} \setminus \{\zeta_n > t\}) =$$

$$= P\{\zeta_{n+1} > t\} - P\{\zeta_n > t\} = \int_t^\infty Ga(x|n+1,\lambda)dx - \int_t^\infty Ga(x|n,\lambda)dx =$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \int_t^\infty x^n e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = -\frac{\lambda^n}{n!} \int_{[t,\infty)\ni x} x^n d(e^{-\lambda x}) - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{\lambda^n}{n!}\left\{(0 - t^n e^{-\lambda t}) - n\cancel{\int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx}\right\} - \cancel{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx}$$

$$= e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n! = Po(n|\lambda t) \iff N_t \sim Po(\cdot|\lambda t)$$

<u>Μπορεί να δειχθεί ότι:</u> $\forall\ 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ οι προσαυξήσεις

$N_{t_1} - N_0,\ N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ είναι ανεξ. τυχαίες μεταβλητές κ' ότι έχουν κατανομές $N_{t_1}, N_{t_2 - t_1}, \ldots, N_{t_n - t_{n-1}}$. (63.1)

<u>Άσκ</u> (i) Δ.ό η διαδ. Poisson είναι Μαρκοβιανή διαδικασία

(ii) Βρείτε την από κοινού πιθ. $P\{N_{t_1}=x_1,\dots,N_{t_n}=x_n\}$ κ' την πιθ $P\{N_1=1, N_2=2,\dots,N_n=n\}$

(i) $P\{N_{t_{n+1}}=y \mid N_{t_n}=x, N_{t_{n-1}}=s_{n-1},\dots,N_{t_1}=s_1\}=$

$$=P\{N_{t_{n+1}}-N_{t_n}=y-x \mid N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x-s_{n-1},\dots,N_{t_1}-N_0=s_1-0\}\overset{(63.1)}{=}$$

$$=P\{N_{t_{n+1}}-N_{t_n}=y-x\}.$$

<u>Δηλ</u> έχουμε ότι $P\{N_{t_{n+1}}=y \mid \mathcal{F}_n\}=P\{N_{t_{n+1}}=y \mid N_t\}$

(ii) $P\{N_{t_1}=x_1,\dots,N_{t_n}=x_n\}=P\{N_{t_1}=x_1, N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1,\dots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x_n-x_{n-1}\}$

$$=P\{N_{t_1}=x_1\}P\{N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1\}\cdots P\{N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x_n-x_{n-1}\}$$

$$=P\{N_{t_1}=x_1\}P\{N_{t_2-t_1}=x_2-x_1\}\cdots P\{N_{t_n-t_{n-1}}=x_n-x_{n-1}\}$$

$$=P_o(x_1 \mid \lambda t_1)P_o(x_2-x_1 \mid \lambda(t_2-t_1))\cdots P_o(x_n-x_{n-1} \mid \lambda(t_n-t_{n-1})).$$

$$P\{N_1=1,\dots,N_n=n\}=P_o(1\mid\lambda)^n=\lambda^n e^{-n\lambda}.$$

<u>Άσκ</u> Δ.ό η διαδικασία Poisson δεν είναι martingale, αλλά η διαδικασία $N_t-\mathbb{E}[N_t]$ είναι martingale

$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^N=\sigma(N_r : r\in[0,t])$ κ' επειδή N_t-N_s, $\mathcal{F}_s^N$ ανεξάρτητα για $\forall s<t$ έχουμε $\mathbb{E}[N_t-N_s \mid \mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[N_t-N_s]=\mathbb{E}[N_{t-s}]$

$=\lambda(t-s) \Leftrightarrow \mathbb{E}[N_t \mid \mathcal{F}_s]-N_s=\lambda t-\lambda s \Leftrightarrow$

$$\mathbb{E}[N_t-\lambda t \mid \mathcal{F}_s]=N_s-\lambda s \Leftrightarrow \mathbb{E}\{N_t-\mathbb{E}[N_t] \mid \mathcal{F}_s\}=N_s-\mathbb{E}[N_s]$$

Ασκ (i) Δο΄ $N_s \mid N_t = n \overset{s<t}{\sim} Bin(\cdot \mid n, \frac{s}{t})$

(ii) Δο΄ $Cov(N_s, N_t) = \lambda(s \wedge t)$

(i) $$P\{N_s = m \mid N_t = n\} = \frac{P\{N_s = m, N_t = n\}}{P\{N_t = n\}} = \frac{P\{N_s = m, N_t - N_s = n-m\}}{P\{N_t = n\}}$$

$$= \frac{P\{N_s = m\} P\{N_t - N_s = n-m\}}{P\{N_t = n\}} = \frac{\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^m}{m!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m} = Bin\left(m \mid n, \frac{s}{t}\right)$$

(ii) $$\mathbb{E}[N_s N_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[N_s N_t \mid N_t]\} = \mathbb{E}\{N_t \, \mathbb{E}[N_s \mid N_t]\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{N_t \cdot \left(N_t \cdot \frac{s}{t}\right)\right\} = \frac{s}{t}\mathbb{E}[N_t^2] = \frac{s}{t}(\lambda t + \lambda^2 t^2)$$

$$Cov(N_s, N_t) = \frac{s}{t}(\lambda t + \lambda^2 t^2) - (\lambda s)(\lambda t) = \lambda s + \lambda^2 s t - \lambda^2 s t = \lambda s$$

Εαν επαναλάβουμε την διαδικασία για $s>t$ θα πάρουμε ότι $Cov(N_s, N_t) = \lambda t$

Επλ $$Cov(N_s, N_t) = \begin{cases} \lambda t & s>t \\ \lambda s & s<t \end{cases} = \lambda(t \wedge s)$$

Ορσ (i) Μια διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ είναι κάθε ακολουθία $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$, και τη συμβολίζουμε με $\Pi = \Pi(t_0, \dots, t_n)$. Δοθείσας συνεχούς συνάρτησης $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ η ολική μεταβολή της f [total variation] ορίζεται σαν

$$V_1(f) = \sup_{\Pi} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

όπου το sup είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του $[0,T]$.

Η μεταβολή τάξης p της f θα είναι

$$V_p(f) = \sup_{\Pi} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \quad , \; p>0$$

(ii) Έστω $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ στοχ. διαδ. διακριτού χρόνου η τετραγωνική μεταβολή (quadratic variation) ορίζεται σαν η διαδικασία

$$\langle \xi \rangle_t = \sum_{i=1}^{t} (\xi_i - \xi_{i-1})^2$$

ενώ το quadratic covariation δύο στοχ. διαδ. $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ κ' $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ ορίζεται σαν η διαδικασία

$$\langle \xi, \eta \rangle_t = \sum_{i=1}^{t} (\xi_i - \xi_{i-1})(\eta_i - \eta_{i-1})$$

(iii) Όταν ο χρόνος είναι συνεχής έστω $\Pi = \Pi(t_0, \dots, t_n)$ (έτσι ώστε $\sup_i \Delta_i^n t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) διαμέριση του $[0,T]$ κ' $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$

$$V_2(\xi, \Pi) = \sum_{k=1}^{n} (\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}})^2 = \sum_{k=1}^{n} (\Delta_{k-1}^n \xi)^2$$

Τότε $\quad V_2(\xi, \Pi) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} \langle \xi \rangle_T$ = το quadratic variation της ξ στο $[0,T]$

Ασκ Εάν $\eta_t = N_t - \lambda t$ δείξτε ότι η διαδικασία $\eta_t^2 - \langle \eta \rangle_t$ είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^N$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n \eta)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta_j^n N - \lambda \Delta_j^n t)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ (\Delta_j^n N)^2 - 2\lambda \Delta_j^n t \Delta_j^n N + \lambda^2 (\Delta_j^n t)^2 \right\}$$

$\Delta_j^n t = t_{j+1}^n - t_j^n = t/n$ (διαμέριση $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$ του $[0,t]$)

$\Delta_j^n N = N_{t_{j+1}^n} - N_{t_j^n} = N_{\Delta_j^n t} = N_{t/n} \sim P_0(\cdot \mid \lambda t/n)$

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta_j^n Y)^2\right\} = \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\mathbb{E}(N_{t/n}^2) - 2\lambda\frac{t}{n}\,\mathbb{E}(N_{t/n}) + \lambda^2\left(\frac{t}{n}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left\{\left[\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2+\left(\frac{\lambda t}{n}\right)\right] - 2\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\lambda t}{n}\right) + \lambda^2\frac{t^2}{n^2}\right\} = \lambda t$$

Η παραπάνω απόδειξη του ότι $\langle Y\rangle_t = \lambda t$ δεν είναι αυστηρή. Ουσιαστικά είναι μια εικασία εφόσον

$$\left|\mathbb{E}\{|\xi_n|-|\xi|\}\right| \le \mathbb{E}\{\left||\xi_n|-|\xi|\right|\} \le \mathbb{E}\{|\xi_n-\xi|\}$$

$$\mathbb{E}\left[(Y_t-Y_s)^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left\{\left[(N_t-N_s)-\lambda(t-s)\right]^2|\mathcal{F}_s\right\}$$

$$= \mathbb{E}\{(N_t-N_s)^2|\mathcal{F}_s\} - 2\lambda(t-s)\,\mathbb{E}\{N_t-N_s|\mathcal{F}_s\} + \lambda^2(t-s)^2$$

$$= \mathbb{E}\{(N_t-N_s)^2\} - 2\lambda(t-s)\,\mathbb{E}\{N_t-N_s\} + \lambda^2(t-s)^2$$

$$= \mathbb{E}(N_{t-s}^2) - 2\lambda(t-s)\mathbb{E}(N_{t-s}) + \lambda^2(t-s)^2 = \left[\lambda(t-s)+\lambda^2(t-s)^2\right] -$$

$$- 2\lambda(t-s)(\lambda(t-s)) + \lambda^2(t-s)^2 = \lambda(t-s) \iff$$

$$\mathbb{E}(Y_t^2|\mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}[Y_tY_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[Y_s^2|\mathcal{F}_s] = \lambda(t-s) \iff$$

$$\mathbb{E}(Y_t^2|\mathcal{F}_s) - 2Y_s\underbrace{\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s)}_{\mathbb{E}(N_t-\lambda t|\mathcal{F}_s) = N_s-\lambda s = Y_s} + Y_s^2 = \lambda t - \lambda s \iff$$

$$\iff \mathbb{E}(Y_t^2-\lambda t|\mathcal{F}_s) = Y_s^2 - \lambda s$$

Συνεχής χρόνος κ' συνεχής χώρος καταστάσεων

Η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$, $T\subseteq \mathbb{R}$ κ' $S\subseteq \mathbb{R}^d$ είναι Μαρκοβιανή εάν $P\{X_t\le y\,|\,\mathcal{F}_s^X\} = P\{X_t\le y\,|\,X_s=x\} = F_{X_t|X_s}(y|x)$

η πυκνότητα μετάβασης θα είναι

$$p(s,t,x,y) = \frac{\partial}{\partial y}F_{X_t|X_s}(y|x).$$

Η $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι Χ.Ο. εάν η πυκνότητα μετάβασης εξαρτάται μόνο από το μήκος χρόνου $t-s$ κ' όχι από τα t κ' s

$$p(s+h,t+h,x,y) = p(s,t,x,y) \Rightarrow p(s,t,x,y)\equiv p(t-s,x,y)$$

δηλαδή

$$\underbrace{P\{X_t\in A\,|\,X_s=x\}}_{p(t-s,x,A)} = \underbrace{P\{X_{t+h}\in A\,|\,X_{s+h}=x\}}_{p(t-s,x,A)},\ \forall\, t,s,t+h,s+h\in T$$

$$= P\{X_{t-s}\in A\,|\,X_0=x\}$$

Η εξίσωση Chapman - Kolmogorov είναι

$$p(t,x,z)dz = P\{z<X_t\le z+dz\,|\,X_0=x\}$$

$$= \int_{S\ni y}\frac{P\{x<X_0\le x+dx,\ y<X_s\le y+dy,\ z<X_t\le z+dz\}}{P\{x<X_0\le x+dx\}}$$

$$= \int_{S\ni y} P\{y<X_s\le y+dy\,|\,X_0=x\}\,P\{z<X_{t-s}\le z+dz\,|\,X_0=y\}$$

$$= \int_{S\ni y} p(s,y,x)dy\, p(t-s,y,z)dz$$

<u>Ορ 6</u> Η διαδικασία Wiener (κίνηση Brown) είναι διαδικασία $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ κ' $S=\mathbb{R}$

(i) $W_0 = 0$, P-α.s.

(ii) $\omega =$ σταθ. $t \to W_t(\omega)$ P-α.s. συνεχής

(iii) $\forall\ \Pi = \Pi(t_0=0, x_1, \dots, x_n)$ θα έχουμε

$$P\{x_1 < W_{t_1} \le x_1+dx_1, \dots, x_n < W_{t_n} \le x_n+dx_n \mid W_0=0\} \overset{\{W_0=0\}=\Omega}{=}$$

$$\doteq P\{x_1<W_{t_1}\le x_1+dx_1\}P\{x_2<W_{t_2}\le x_2+dx_2 \mid W_{t_1}=x_1\}\cdots P\{x_n<W_{t_n}\le x_n+dx_n \mid W_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

$$= p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2-t_1, x_1, x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1\cdots dx_n$$

<u>Ισοδύναμα</u>:

$$P\{W_{t_1}\in A_1, \dots, W_{t_n}\in A_n\} = \int_{A_1\times\cdots\times A_n} \overbrace{p(t_1,0,x_1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)}^{f_{W_{t_1},\dots,W_{t_n}}(x_1,\dots,x_n)} \times dx_1\cdots dx_n$$

όπου $p(t,0,x) = N(x|0,t)$

<u>Παρατήρηση</u> Η (iii) μας λέει ότι η διαδ. Wiener είναι Μαρκοβιανή κ' Χ.Ο. ενώ $W_{t_i} \mid W_{t_{i-1}} = x_{i-1} \sim \underbrace{N(\cdot \mid x_{i-1}, t_i - t_{i-1})}_{p(t_i-t_{i-1}, x_{i-1}, \cdot)}$,

$$W_t \overset{d}{=} W_t \mid W_0 = 0 \sim N(\cdot \mid 0, t) \equiv p(t, 0, \cdot)$$