<u>Ορσ</u> Η διαδικασία Wiener (κίνηση Brown) είναι διαδικασία $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ κ' $S=\mathbb{R}$

(i) $W_0 = 0$, P-α.s.

(ii) ω = σταθ. $t \to W_t(\omega)$ P-α.s. συνεχής

(iii) $\forall\ \Pi = \Pi(t_0=0, t_1, \dots, t_n)$ θα έχουμε

$$P\{x_1 < W_{t_1} \le x_1+dx_1, \dots, x_n < W_{t_n} \le x_n + dx_n \mid W_0 = 0\} \overset{\{W_0=0\}=\Omega}{=}$$

$$\doteq P\{x_1 < W_{t_1} \le x_1+dx_1\} P\{x_2 < W_{t_2} \le x_2+dx_2 \mid W_{t_1}=x_1\} \cdots P\{x_n < W_{t_n} \le x_n+dx_n \mid W_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

$$= p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2-t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

<u>Ισοδύναμα</u>:

$$P\{W_{t_1}\in A_1, \dots, W_{t_n}\in A_n\} = \int_{A_1\times\cdots\times A_n} \overbrace{p(t_1,0,x_1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)}^{f_{W_{t_1},\dots,W_{t_n}}(x_1,\dots,x_n)} \times dx_1\cdots dx_n$$

όπου $p(t,0,x) = N(x\mid 0,t)$

<u>Παρατήρηση</u> Η (iii) μας λέει ότι η διαδ. Wiener είναι Μαρκοβιανή κ' Χ.Ο. ενώ $W_{t_i} \mid W_{t_{i-1}} = x_{i-1} \sim \underbrace{N(\cdot \mid x_{i-1}, t_i - t_{i-1})}_{p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, \cdot)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_t \overset{d}{=} [W_t \mid W_0 = 0] \sim N(\cdot \mid 0, t) \equiv p(t, 0, \cdot)$$

<u>Προτάσεις</u> (i) $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = s\wedge t$

(ii) $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = |t-s|$

(iii) $\mathbb{E}[W_t^{\kappa}] = \begin{cases} 0, & \kappa = \text{περιττός} \\ (\kappa-1)!!\, t^{\kappa/2}, & \kappa = \text{άρτιος} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[W_s] = \int_{\mathbb{R}} x\, P_{W_s}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x\, p(s,0,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x\, N(x|0,s)\,dx = 0$$

$$Cov(W_s,W_t) = \mathbb{E}[W_sW_t] \overset{s<t}{=} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[W_sW_t|W_s]\big] = \mathbb{E}\big[W_s\,\mathbb{E}[W_t|W_s]\big]$$

$$\mathbb{E}[W_t|W_s=x] = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{W_t|W_s}(y|x)\,dy = \int_{\mathbb{R}} y\, p(t-s,x,y)\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y\, N(y|x,t-s)\,dy = x$$

<u>Έτσι</u> $Cov(W_s,W_t) = \mathbb{E}[W_s^2] = Var(W_s) = s$ όταν $s<t$

Εάν $s>t \Rightarrow Cov(W_s,W_t) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[W_sW_t|W_t]\big] = \mathbb{E}[W_t^2] = t$

(ii) $\mathbb{E}[(W_t-W_s)^2] = \mathbb{E}[W_t^2] - 2\mathbb{E}[W_tW_s] + \mathbb{E}[W_s^2] =$

$$= t - 2\cdot t\wedge s + s = \begin{Bmatrix} t-s, & s\le t \\ -t+s, & s>t \end{Bmatrix} = |t-s|$$

(iii) $x \sim N(0,\sigma^2)$

$$\mathbb{E}(x^{2n}) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}dx\right) = 2\int_{\mathbb{R}^+} (x^2)^n e^{-x^2/2\sigma^2}dx \overset{x=\sigma\sqrt{2}u}{=}$$

$$= \frac{2^{n+1}\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^+} u^{2n}e^{-u^2}du = \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^+} u^{2n-1}e^{-u^2}(2u\,du) \overset{u^2=y}{=} \frac{2^n\sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^+} y^{n-1/2}e^{-y}dy$$

$$= \frac{2^n\sigma^{2n}\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{2^n\sigma^{2n}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}(n-1/2)(n-3/2)\cdots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\cancel{\Gamma(1/2)} =$$

$$= (\sigma^2)^n(2n-1)(2n-3)\cdots\underbrace{(2n-(2n-1))}_{} = (\sigma^2)^n(2n-1)!!$$

<u>όπου</u> $n!! = \begin{cases} 2\cdot4\cdot6\cdots(n-2)n, & n = \text{άρτιος} \\ 1\cdot3\cdot5\cdots(n-2)\cdot n, & n = \text{περιτ.} \\ 1, & n=-1,0 \end{cases}$

$$\mathbb{E}(x^{2n+1}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x^{2n+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}}_{g_n(x)} dx = \int_{-\infty}^{0} g_n(x)dx + \int_{0}^{\infty} g_n(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} g_n(-x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^+} g_n(x)dx' = 0$$

Η διαδικασία Wiener έχει στάσιμες κ' ανεξ. προσαυξήσεις

(i) Θέλουμε να δ.ό $W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s} \quad \forall\, t>s$

$$P\{W_t - W_s \in A\} = \int_{\mathbb{R}} P\{W_t - W_s \in A \mid W_s = x\} P_{W_s}(dx) \quad : (71.1)$$

$$P\{W_t - W_s \in A \mid W_s = x\} = P\{W_t \in x+A \mid W_s = x\} = p(t-s, x, x+A)$$

$$= \int_{x+A \ni y} p(t-s, x, y)dy = \int_{x+A \ni y} N(y \mid x, t-s)\,dy \underset{y=x+u}{=}$$

$$\int_{A \ni u} N(x+u / x, t-s)\,du = \int_{A \ni u} N(u \mid 0, t-s)du \quad : (71.2)$$

$$P_{W_s}(dx) = p(s, 0, x)dx = N(x \mid 0, s)dx \quad : (71.3)$$

$$(71.1)(71.2)(71.3) \Rightarrow P\{W_t - W_s \in A\} = \int_{\mathbb{R} \ni x} \left\{ \int_{A \ni u} N(u \mid 0, t-s)du \right\} N(x \mid 0, s)dx$$

$$= \int_{A \ni u} N(u \mid 0, t-s)du = \int_{A \ni u} p(t-s, 0, u)du = p(t-s, 0, A) =$$

$$= P\{W_{t-s} \in A\} \Rightarrow W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s}.$$

(ii) Εάν $r<s<t<u$ θα δ.ό. $W_u - W_t$, $W_s - W_r$ ανεξ. τ.μ.

$W_u - W_t \stackrel{d}{=} W_{u-t} \sim N(0, u-t)$ κ' $W_s - W_r \stackrel{d}{=} W_{s-r} \sim N(0, s-r)$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $W_u - W_t$ κ' $W_s - W_r$ είναι ασυσχέτιστες τ.μ. (επειδή κανονικές τ.μ. είναι ανεξ αν κ' μόνον εαν είναι ασυσχέτιστες).

$$\mathrm{Cov}(W_u - W_t, W_s - W_r) = \mathbb{E}\{(W_u - W_t)(W_s - W_r)\} =$$

$$= \mathbb{E}[W_u W_s] - \mathbb{E}[W_u W_r] - \mathbb{E}[W_t W_s] + \mathbb{E}[W_t W_r]$$

$$= u \wedge s - u \wedge r - t \wedge s + t \wedge r = s - r - s + r = 0$$

Στοχαστική Ολοκλήρωση.

Υποθέτουμε οτι η σχετική αύξηση της διαδικασίας $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι ανάλογη με την αντίστοιχη προσαύξηση μιας διαδικασίας Wiener

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} = \frac{dX_t}{X_t} = \sigma dW_t \Leftrightarrow dX_t = \sigma X_t dW_t \Leftrightarrow$$

$$X_t = X_{t_0} + \sigma \int_{t_0}^{t} X_u dW_u \qquad I^{W}_{t_0,t}(X) = \int_{t_0}^{t} X_u dW_u = \text{στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito}$$

Προσοχή: Το Riemann ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t} X_u \left(\frac{dW_u}{du}\right) du$ δεν ορίζεται γιατί η παράγωγος dW_u/du δεν υπάρχει για κανένα u.

Το Riemann - Stieltjes ολοκλήρωμα

$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} X_{s_j^n}(W_{s_{j+1}^n} - W_{s_j^n})$ δεν υπάρχει γιατί η ολική μεταβολή των τροχιών της κίνησης Brown είναι μη φραγμένη.

<u>Ορσ</u> Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t} h(X_u,u)\,dW_u$ είναι το L^2 όριο $\sum_{i=0}^{n-1} h(X_{t_i},t_i)\Delta_i W \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_{t_0}^{t} h(X_u,u)\,dW_u$,

όπου $\Delta_i W = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ η προσαύξηση της διαδικασίας Wiener στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ στοχ. διαδικασία προσαρτημένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s\in[0,t])$ και $0\leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ διαμέριση του $[0,t]$ τέτοια ώστε $\sup_i \Delta_i t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad (\Delta_i t = t_{i+1}-t_i)$

<u>Ασκ</u> Δείξτε ότι εάν $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi$ τότε $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$ κ' $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi]$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n^2] = \mathbb{E}[\xi^2]$

Ανισότητα Jensen $\Rightarrow |\mathbb{E}(\xi_n) - \mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}\{|\xi_n - \xi|\}$

Ανισότητα Cauchy Schwartz $\Rightarrow \mathbb{E}\{|\xi_n-\xi|\} \leq \sqrt{\mathbb{E}\{(\xi_n-\xi)^2\}}$

Άρα εάν $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$ τότε $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$ κ' $\lim \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi)$

$$|\mathbb{E}(\xi_n^2) - \mathbb{E}(\xi^2)| \leq \mathbb{E}\{|\xi_n^2 - \xi^2|\} = \mathbb{E}\{|\xi_n-\xi||\xi_n+\xi|\} \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\{(\xi_n-\xi)^2\}\,\mathbb{E}\{(\xi_n+\xi)^2\}}$$

Το $\mathbb{E}\{(\xi_n+\xi)^2\}$ είναι φραγμένο διότι $\mathbb{E}(\xi^2)<\infty$ εξ ορισμού κ'

$$\mathbb{E}\{(\xi_n+\xi)^2\} = \mathbb{E}\{((\xi_n-\xi)+2\xi)^2\} = \mathbb{E}[(\xi_n-\xi)^2] + 4\mathbb{E}[\xi(\xi_n-\xi)] + 4\mathbb{E}(\xi^2) \leq$$
$$2\mathbb{E}[(\xi_n-\xi)^2] + 8\mathbb{E}(\xi^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 8\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$$

και $4\mathbb{E}[\xi(\xi_n-\xi)] \leq \mathbb{E}\{(\xi_n-\xi)^2\} + 4\mathbb{E}(\xi^2) \Leftrightarrow \mathbb{E}\{((\xi_n-\xi)-2\xi)^2\} \geq 0$

<u>Ασκ</u> Δείξτε ότι $(dW_t)^2 = dt$ κ' $dW_t dt = 0$

(i) $$\int_{t_0=0}^{t_n=t} (dW_s)^2 = \underset{n\to\infty}{\text{mslim}} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 = t \iff \int_0^t (dW_s)^2 = t$$

$$\iff (dW_t)^2 = dt$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i t = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = t_n - t_0 = t$$

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 - t \right)^2 \right\} = \mathbb{E}\left\{ \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left((\Delta_i W)^2 - \Delta_i t \right) \right]^2 \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left\{ \left((\Delta_i W)^2 - \Delta_i t \right)^2 \right\} + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left\{ \left((\Delta_i W)^2 - \Delta_i t \right)\left((\Delta_j W)^2 - \Delta_j t \right) \right\}$$

$$\Delta_i W \perp \Delta_j W \Rightarrow \mathbb{E}\left\{ \left((\Delta_i W)^2 - \Delta_i t \right)\left((\Delta_j W)^2 - \Delta_j t \right) \right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left((\Delta_i W)^2 - \Delta_i t \right) \right\} \mathbb{E}\left\{ \left((\Delta_j W)^2 - \Delta_j t \right) \right\} = 0$$

Επειδή $\mathbb{E}((\Delta_i W)^2) = \mathbb{E}\{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\} = \mathbb{E}(W^2_{\Delta_i t}) = \Delta_i t$

$$W_{t_{i+1} - t_i} \sim N(\cdot \mid 0, t_{i+1} - t_i)$$

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 - t \right)^2 \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \underbrace{\mathbb{E}\left[(\Delta_i W)^4 \right]}_{3!!(\Delta_i t)^2} - 2\Delta_i t \, \underbrace{\mathbb{E}\left[(\Delta_i W)^2 \right]}_{\Delta_i t} + (\Delta_i t)^2 \right\}$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i t)^2 \leq 2 \sup_i \Delta_i t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i t = 2t \sup_i \Delta_i t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ii) $$\int_0^t ds\, dW_s = 0 \iff dt\, dW_t = 0$$

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i t \, \Delta_i W \right)^2 \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i t)^2 \overbrace{\mathbb{E}\left[(\Delta_i W)^2 \right]}^{\Delta_i t} + \sum_{i<j} \Delta_i t \Delta_j t \, \overbrace{\mathbb{E}[\Delta_i W]}^{0} \overbrace{\mathbb{E}[\Delta_j W]}^{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i t)^3 = \left(\sup_i \Delta_i t \right)^2 t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Άσκ Δ.ό W_t είναι martingale ως πρός $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, αλλά κ' $J_t = W_t^2 - t$ είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t$.

$$(i)\ \mathbb{E}\{W_t | \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{W_t - W_s | \mathcal{F}_s\} + W_s \overset{\text{ανεξ}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[W_t - W_s]}_{0} + W_s = W_s$$

$$(ii)\ \mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s\} \overset{\text{ανεξ}}{=} \mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2\} = |t-s| \overset{t \geq s}{=} t - s \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{W_t^2 | \mathcal{F}_s\} - 2\underbrace{\mathbb{E}\{W_t W_s | \mathcal{F}_s\}}_{W_s \mathbb{E}\{W_t | \mathcal{F}_s\}} + \underbrace{\mathbb{E}\{W_s^2 | \mathcal{F}_s\}}_{W_s^2} = t - s \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}\{W_t^2 | \mathcal{F}_s\} - 2W_s^2 + W_s^2 = t - s \Leftrightarrow \mathbb{E}\{W_t^2 - t | \mathcal{F}_s\} = W_s^2 - s$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: $\mathbb{E}\{X_t - \mathbb{E}[X_t] | \mathcal{F}_s\} = X_s - \mathbb{E}[X_s]$; $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u : u \in [0,s])$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\{X_t - X_s | \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{X_t - X_s\}$$

δηλαδή: $X_t - X_s$, $\mathcal{F}_s$ ανεξάρτητα (ανεξάρτητες προσαυξήσεις).

Παραδ: $X_t = W_t$ κ' $X_t = N_t$

<u>Παρατήρηση 2</u>: Η τετραγωνική μεταβολή της $\{N_t\}$ είναι λt κ' της $\{W_t\}$ είναι t. Έχουμε δεί ότι $(N_t - \mathbb{E}[N_t])^2 - \lambda t$ είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t^N$ κ' ότι $W_t^2 - t$ είναι martingale ως πρός $\mathcal{F}_t^W$. Γενικά ισχύει ότι εάν $\{X_t\}$ είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t^X$ τότε $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t^X$, όπου $\langle X \rangle_t$ η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της $\{X_t\}$.

<u>Πρόταση</u>: Το diffusion integral $Y_t = \int_{t_0}^{t} h(X_u, u)\,dW_u$ είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \in [0,t])$

$$\mathbb{E}\left\{ \int_{t_0}^{t} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} = \mathbb{E}\left\{ \int_{t_0}^{s} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} + \mathbb{E}\left\{ \int_{s}^{t} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\}$$

$$\mathbb{E}\left\{ \int_{t_0}^{s} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} = \int_{t_0}^{s} \mathbb{E}\left\{ h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\}$$

$t_0 < u \leq s \Rightarrow$ δοθέντος του $\mathcal{F}_s$, το $h(X_u,u)$ κ' το dW_u είναι γνωστό <u>επειδή</u> $\{X_{t_i} \in B\} \in \mathcal{F}_{t_i}$ κ' $\{W_{t_i} \in B\} \in \mathcal{F}_{t_i}$

<u>έτσι</u> $\mathbb{E}\left\{ \int_{t_0}^{s} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} = \int_{t_0}^{s} h(X_u,u)\,dW_u$.

$$\mathbb{E}\left\{ \int_{s}^{t} h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} = \int_{s}^{t} \mathbb{E}\left\{ h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\}$$

$$\mathbb{E}\left\{ h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s \right\} \overset{u>s}{=} \mathbb{E}\left\{ \mathbb{E}\left[h(X_u,u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_u \right] \mid \mathcal{F}_s \right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{ h(X_u,u)\,\mathbb{E}\left[dW_u \mid \mathcal{F}_u \right] \mid \mathcal{F}_s \right\} = \mathbb{E}\left\{ h(X_u,u)\,\underbrace{\mathbb{E}[dW_u]}_{0} \mid \mathcal{F}_s \right\} = 0$$

<u>ορσ</u> Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι διαδικασία Ito, εάν οι τροχιές $t \to X_t(\omega)$ είναι σχεδόν βεβαίως συνεχείς κ' η X_t μπορεί να αναπαρασταθεί σαν

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dW_s \quad \text{όπου } b_s = b(s, X_s),\ \sigma_s = \sigma(s, X_s)$$

η b_t είναι προσαρτημένη στο $\mathcal{F}_t^W$, $\int_0^t |b_s|\,ds < \infty$

Το λήμμα του Ito: Εαν X_t διαδικασία Ito τέτοια ώστε

$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ κ' $F(t,x) \in C^{1+2}(\mathbb{R}^+_1, \mathbb{R})$ τότε κ' η

η διαδικασία $F(t, X_t)$ είναι διαδικασία Ito με

$$dF(t, X_t) = \left\{ F_t + F_x b + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 \right\} dt + \left\{ F_x \sigma \right\} dW_t$$

$$dF(t, X_t) = F(t+dt, X_t + dX_t) - F(t, X_t)$$

$$= F_t dt + F_x dX_t + \frac{1}{2} F_{tt} \underbrace{(dt)^2}_{0} + F_{tx} \underbrace{dt\, dX_t}_{0} + \frac{1}{2} F_{xx} \underbrace{(dX_t)^2}_{\sigma^2 dt}$$

$$= \left\{ F_t + F_x b + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 \right\} dt + \left\{ F_x \sigma \right\} dW_t$$

Ασκ Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $Y_t = \int_{t_0}^{t} W_u dW_u$

α' τρόπος: Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito

$F(t, x) = x^2$, $X_t = W_t \Rightarrow dX_t = dW_t = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ \sigma = 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow dF(t, W_t) = dW_t^2 = \left(0 + 2W_t \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2\right) dt + (2W_t \cdot 1) dW_t$$

$$\Leftrightarrow dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} dW_u^2 = \int_{t_0}^{t} du + 2\int_{t_0}^{t} W_u dW_u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} W_u dW_u = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(t - t_0).$$

β' τρόπος: Χρησιμοποιώντας στοχαστικά διαφορικά.

$$dW_t^2 = (W_t + dW_t)^2 - W_t^2 = (\cancel{W_t^2} + 2W_t dW_t + dt) - \cancel{W_t^2} = dt + 2W_t dW_t$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} W_u dW_u = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(t - t_0).$$

<u>γ' Τρόπος</u> : Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του στοχαστικού ολοκλ.

$$\int_{t_0}^{t} W_u \, dW_u = \underset{n\to\infty}{\mathrm{mslim}} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta_i W$$

$$W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 = W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} W_{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2$$

$$= \cancel{W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2} - \left(\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2 + \cancel{W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2} \right) + 2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} W_{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \cdot W_{t_{i+1}} - 2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}^2 = 2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta_i W$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \Delta_i W = \frac{1}{2}\left(W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 \right), \quad t_n = t$$

$$\int_{t_0}^{t} W_u \, dW_u = \frac{1}{2}\Big\{ W_t^2 - W_{t_0}^2 - \underbrace{\underset{n\to\infty}{\mathrm{mslim}} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2}_{\int_{t_0}^{t} (dW_u)^2 = t - t_0} \Big\}$$

<u>Ασκ</u> Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

(i) $\int_0^t W_u^n \, dW_u$ (ii) $\int_0^t u \, dW_u$

(i) $F(t,x) = x^{n+1} \Rightarrow dW_t^{n+1} = \left(0 + (n+1)W_t^n \cdot 0 + \frac{1}{2}(n+1)n W_t^{n-1} \cdot 1\right) dt$

$X_t = W_t \Rightarrow \begin{matrix} b=0 \\ \sigma=1 \end{matrix}$ $\qquad + (n+1) W_t^n \cdot 1 \cdot dW_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^t dW_u^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \int_0^t W_u^{n-1} du + (n+1) \int_0^t W_u^n \, dW_u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t W_u^n \, dW_u = \frac{1}{n+1} W_t^{n+1} - \frac{n}{2} \int_0^t W_u^{n-1} du$$

(ii) $F(t,x) = tx \Rightarrow d(tW_t) = \left(W_t + t \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1\right) dt + t \, dW_t$

$$\Rightarrow \; tW_t = \int_0^t W_u\,du + \int_0^t u\,dW_u \Leftrightarrow \int_0^t u\,dW_u = tW_t - \int_0^t W_u\,du$$

<u>Άσκ</u> Να λυθεί η στοχ. διαφορική εξίσωση

$dX_t = X_t(\bar{\mu}\,dt + \bar{\sigma}\,dW_t)$ με αρχική συνθήκη $X_0 = x$ a.s.

Πότε το X_t είναι martingale ως προς $\mathcal{F}_t^W$?

$$d\ln(X_t) = \left(0 + \bar{\mu}X_t\cdot\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2X_t^2\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)\right)dt + \left(\bar{\sigma}X_t\cdot\left(\frac{1}{X_t}\right)\right)dW_t$$

$$\Leftrightarrow \; d\ln(X_t) = (\bar{\mu} - \bar{\sigma}^2/2)\,dt + \bar{\sigma}\,dW_t \underset{\int_0^t(\cdot)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \; \ln(X_t) - \ln(x) = \left(\bar{\mu} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)t + \bar{\sigma}W_t \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; X_t = x\,e^{(\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2/2)t + \bar{\sigma}W_t} = e^{\ln(x) + (\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2/2)t + \bar{\sigma}W_t}$$

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = x\,e^{(\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2/2)t}\,\mathbb{E}[e^{\bar{\sigma}W_t} \mid \mathcal{F}_s] =$$

$$= x\,e^{(\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2/2)t + \bar{\sigma}W_s}\,\mathbb{E}[e^{\bar{\sigma}(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$\mathbb{E}[e^{\bar{\sigma}(W_t-W_s)} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\bar{\sigma}(W_t-W_s)}] = \mathbb{E}[e^{\bar{\sigma}W_{t-s}}] =$$

$$= e^{0\cdot\bar{\sigma} + (t-s)\bar{\sigma}^2/2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = x\,e^{(\bar{\mu}-\cancel{\bar{\sigma}^2/2})t + \bar{\sigma}W_s + (\cancel{t}-s)\bar{\sigma}^2/2}$$

$$= x\,e^{(\bar{\mu}-\bar{\sigma}^2/2)s + \bar{\sigma}W_s}\cdot e^{\bar{\mu}(t-s)}$$

$$= X_s\,e^{\bar{\mu}(t-s)}, \quad t-s>0$$

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \begin{cases} \geq X_s & \mu \geq 0 \\ \leq X_s & \mu \leq 0 \\ = X_s & \mu = 0 \quad \text{(martingale)} \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u> Η κατανομή του X_t είναι

$$X_t \sim LN\left(\cdot \mid \ln(x) + (\bar{\mu} - \bar{\sigma}^2/2)t, \bar{\sigma}^2 t\right)$$

<u>Να λυθεί η σ.δ.ε.</u>: $dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$

$\alpha, \mu, \sigma > 0$ κ' $X_0 = x$ (a mean reverting process)

$$Y_t = F(t, X_t) = e^{\alpha t}X_t \Rightarrow d(e^{\alpha t}X_t) = \left\{\alpha e^{\alpha t}X_t + \alpha e^{\alpha t}(\mu - X_t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0\right\}dt$$

$$+ \left\{\sigma e^{\alpha t}\right\}dW_t \Rightarrow d(e^{\alpha t}X_t) = \alpha e^{\alpha t}\mu\, dt + \sigma e^{\alpha t}dW_t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha t}X_t - x = \mu(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\int_0^t e^{\alpha u}dW_u$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X_t = \mu + (x-\mu)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u}dW_u} \quad \text{(Ornstein-Uhlebeck process)}$$

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu + (x-\mu)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t}\,\mathbb{E}\Big\{\underbrace{\int_0^t e^{\alpha u}dW_u}_{Z_t}\Big\}$$

$$\mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s] = Z_s \Rightarrow \mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_s], \ \forall\, s \in [0,t] \overset{s=0}{\Rightarrow} \mathbb{E}[Z_t] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = \mu + (x-\mu)e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha t_i} \Delta_i W \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha t_i} N(\cdot|0, \Delta_i t) \sim$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} N(\cdot|0, e^{2\alpha t_i}\Delta_i t) \sim N\left(\cdot \middle| 0, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{2\alpha t_i} \Delta_i t\right) =$$

$$= N\left(\cdot \middle| 0, \int_0^t e^{2\alpha u} du\right) = N\left(\cdot \middle| 0, \frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}\right)$$

$$X_t \sim N\left(\cdot \middle| \mu + (x-\mu)e^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} N\left(\cdot \middle| \mu, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$$
