Γενικά για Στοχαστικές Διαδικασίες

Η θεωρία των ΣΔ αρχικά συνδέθηκε με την μελέτη των διακυμάνσεων κ' του θορύβου σε φυσικά συστήματα. Μια ΣΔ είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που συνήθως εξελίσσεται στο χρόνο βάσει πιθανοθεωρητικών νόμων

<u>ορσ1</u>: Ένας χώρος πιθανότητας είναι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ όπου Ω ο δειγματικός χώρος (ή χώρος του πειράματος), $\mathcal{F}$ ένα σ-πεδίο του Ω που περιέχει την συνολική πληροφορία για το τυχαίο πείραμα κ' $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ το μέτρο πιθανότητας.

<u>Παρατήρηση</u> (i) θυμίζουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι σ-πεδίο πάνω στον Ω εαν $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \in \mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq n$ τότε κ' $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$, $\forall n \leq \infty$. <u>Για παράδειγμα</u>: $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega = A \cup A' \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$.

(ii) Το $P(\cdot)$ είναι μέτρο πιθανότητας εάν $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ κ' $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

<u>ορσ2</u>: Μια συν/ση $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι μια (διανυσματική) τυχαία μεταβλητή $\omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ <u>όταν</u> $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο Borel του $\mathbb{R}^n$, δηλ. το σύνολο των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$).

Για το μέτρο του $A \in \mathcal{F}$ κ' την τμ X έχουμε:

$$P(A) = \int_{A \ni \omega} P(d\omega) = \int_{A \ni \omega} P(\underbrace{(\omega, \omega + d\omega]}_{X^{-1}(x, x+dx]}) \overset{?}{=}$$

$$\begin{cases} P \circ X^{-1}(\cdot) = P_X(\cdot) \\ X(\omega) = x \\ A = X^{-1}(B) \end{cases}$$

$$= \int_{B \ni x} P_X(dx)$$

δηλ: $P(A) = P(X^{-1}(B)) = P\{X \in B\}$

όπου: $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i=1}^{n}, n \leq \infty$

Εαν: X = διακριτή τμ $\Rightarrow P_X(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\} \delta_{x_i}(dx)$

X = συνεχής τμ $\Rightarrow P_X(dx) = P\{x < X \leq x + dx\} = f_X(x)dx$

$X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$

ορσ3 • Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t \in T}$ είναι συλλογή απο τμ πάνω στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$. Το σύνολο T είναι το σύνολο παραμετρικοποίησης της διαδικασίας με χώρο καταστάσεων $S = \bigcup_{t \in T} X_t(\Omega), \cancel{\forall t \in T}$

• Το X_t στην ουσία είναι μια συν/ση δύο μεταβλητών $X_t(\omega) = X(t, \omega)$. Κρατώντας το t = σταθ. $= t^*$ έχουμε ότι $X_{t^*}(\cdot) = X(t^*, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ δηλ $\omega \mapsto X_{t^*}(\omega)$ κ' το X_{t^*} είναι μια διανυσματική τμ.

Κρατώντας το ω = σταθ $= \omega^*$ έχουμε

ότι $X_\cdot(\omega^*) = X(\cdot, \omega^*) : T \to \mathbb{R}^n$ δηλ $t \mapsto X_t(\omega^*)$

δηλ το σύνολο $X(T, \omega^*) = \{X(t, \omega^*) : t \in T\}$ είναι μια ω^*-πραγματοποίηση της ΣΔ (ή απλά τροχιά)

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις ΣΔ ως προς S κ' T

S \ T	Διακριτό	Συνεχές
Διακριτό	Τυχαίος περίπατος	Διαδικασία Poisson
Συνεχές	Autoregressive of order K	Κίνηση Brown

Το θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov (extension theorem) μας εξασφαλίζει ότι χρησιμοποιώντας μόνο κατανομές πεπερασμένης διάστασης, με συγκεκριμένες ιδιότητες, μπορούμε να ορίσουμε με μοναδικό τρόπο μια ΣΔ, στην ουσία μια κατανομή πιθανότητας με αριθμήσιμο ~~είτε συνεχές~~ πλήθος μεταβλητών

(i) $$P_{X_{t_1},\dots,X_{t_k}}(A_1,\dots,A_k) = P_{X_{t_{\pi(1)}},\dots,X_{t_{\pi(k)}}}(A_{\pi(1)},\dots,A_{\pi(k)})$$

Ισοδύναμα:

$$\underbrace{F_{X_{t_1},\dots,X_{t_k}}(x_{t_1},\dots,x_{t_k})}_{P\{X_{t_1}\le x_1,\dots,X_{t_k}\le x_k\}} = F_{X_{t_{\pi(1)}},\dots,X_{t_{\pi(k)}}}(x_{t_{\pi(1)}},\dots,x_{t_{\pi(k)}})$$

(ii) $$P_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},X_{t_{k+1}},\dots,X_{t_{k+m}}}(A_1,\dots,A_k,\overbrace{\mathbb{R},\dots,\mathbb{R}}^{m}) = P_{X_{t_1},\dots,X_{t_k}}(A_1,\dots,A_k)$$

<u>ορσ4</u> Η (αθροιστική) κατανομή $F_{X_{t_1}}(x_1) = P\{X_{t_1} \leq x_1\}$ (το t_1 είναι σταθερό) είναι η <u>πρώτης τάξης</u> κατανομή της ΣΔ στο t_1. Η $n^{οστής}$ τάξης της ΣΔ στο σταθ. σύνολο $\{t_1, \dots, t_k\}$ είναι η από κοινού κατανομή των $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$

<u>δηλ.</u> $$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}}(x_1, \dots, x_k) = P\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k\} .$$

- Όταν S = διακριτό τότε έχουμε συν/ση μάζας πιθ.

$$n_i \in S, \ \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} : P\{X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k\} = p_{X_1 \dots X_k}(n_1, \dots, n_k)$$

$$n_i \in S, \ \{X_t\}_{t \geq 0} : P\{X_{t_1} = n_1, \dots, X_{t_k} = n_k\} = p_{X_{t_1} \dots X_{t_k}}(n_1, \dots, n_k)$$

- Όταν S = συνεχές τότε έχουμε συν/ση πυκνότητας πιθ.

$$\frac{\partial^k F_{X_1 \dots X_k}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} = f_{X_1 \dots X_k}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{διακριτός χρόνος}$$

$$\frac{\partial^k F_{X_{t_1} \dots X_{t_k}}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} = f_{X_{t_1} \dots X_{t_k}}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{συνεχής χρόνος}$$

<u>ορσ5</u> Τα πιό βασικά χαρακτηριστικά της ΣΔ $\{X_t\}_{t \in T}$ είναι:

(i) η συν/ση <u>μέσης τιμής</u> $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$

(ii) η συν/ση <u>autocovariance</u>

$$g(t,s) = \text{autocov}(t,s) = \text{Cov}\{X_t, X_s\}$$

(iii) η συν/ση <u>autocorrelation</u>

$$\rho(t,s) = \text{autocorr}(t,s) = \frac{g(t,s)}{\sqrt{g(t,t)\, g(s,s)}}$$

ορσ 6 Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\in T}$ ονομάζεται στάσιμη (stationary)

Εαν για κάθε σύνολο $\{t_1,\dots,t_n\}$ τω $t_i \in T$, $\forall n\geq 1$ έχουμε

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h}}(x_1,\dots,x_n), \ \forall h>0 \quad (5.1)$$

Δηλ για την 1ης τάξης κατανομή:

$$F_{X_t}(x) = F_{X_{t+h}}(x) = \text{κατανομή ανεξάρτητη του } t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{X_t}(x) = \text{ανεξ. του } t \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[X_t] = \mu = \text{σταθ.} \\ Var[X_t] = \sigma^2 = \text{σταθ} \end{cases}}$$

για την 2ης τάξης κατανομή:

$$\left.\begin{array}{l} F_{X_{t_1},X_{t_2}}(x_1,x_2) \\ f_{X_{t_1},X_{t_2}}(x_1,x_2) \end{array}\right\} = \text{εξαρτάται μόνο απο την διαφορά } t_2-t_1$$

ορσ 7: Εαν η σχέση (5.1) δεν ισχύει για $\forall n$ αλλά μόνο για $n\leq k$ τότε η ΣΔ $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι στάσιμη έως κ' τάξη κ. Στην ειδική περίπτωση που $k=2$ η ΣΔ ονομάζεται ασθενώς στάσιμη (weak stationary or wide sense stationary) τότε έχουμε ότι:

(i) $E[X_t] = \mu = \text{σταθ.}$

(ii) $g(t,s) = Cov(X_t, X_s) = \tilde{g}(|t-s|)$, $\forall\, t,s \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$g(t,t+\tau) \overset{\tau>0}{=} \tilde{g}(\tau) \Leftrightarrow \{X_t\}_{t\in T} \text{ είναι covariance stationary}$$

<u>ορσ 8</u> Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ έχει <u>ανεξάρτητες προσαυξήσεις</u> (independent increments) εαν οι τμ για $\forall n\geq 1$

$$X_{t_0}, X_{t_1}-X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες

<u>ορσ 9</u> Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ έχει <u>στάσιμες προσαυξήσεις</u> εαν

$$X_{t+h}-X_t \stackrel{d}{=} X_{t'+h}-X_{t'}, \quad \forall\, t\neq t'$$
$$\stackrel{d}{=} X_h$$

<u>ορσ 10</u> Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι <u>Μαρκοβιανή</u> εαν

$$P\{X_{t_{n+1}}\in A \mid X_{t_n},\ldots,X_{t_1}\} = P\{X_{t_{n+1}}\in A \mid X_{t_n}\}$$
$$\forall\ t_1<\cdots<t_{n+1}$$

<u>ορσ 11</u> Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι <u>Martingale</u> όταν

$$\mathbb{E}\left[X_{t_{n+1}} \mid X_{t_n},\ldots,X_{t_1}\right] = X_{t_n}$$

<u>ορσ 12</u> Μια ΣΔ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ είναι <u>κίνηση Brown</u> (Brownian motion) εαν

(i) Έχει στάσιμες κ' ανεξ. προσαυξήσεις, $P\{B_0=0\}=1$

(ii) $\forall\, t>0 \quad B_t \sim N(0, c^2 t)$

<u>ορσ</u> 13 Μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι <u>Gaussian</u> εαν για $\forall \{t_1,\dots,t_n\}$ $(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \sim N_n(\mu,\Sigma)$

<u>ορσ</u> 14. Όταν X_{t_i} είναι ανεξάρτητο του X_{t_j} για κάθε $t_i \neq t_j$ η ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ λέμε ότι είναι ανεξάρτητη

<u>Παράδειγμα</u> Η διαδικασία Bernoulli $\{X_n\}_{n\geq 1}$ έχει $X_n \overset{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(p) = \text{Bin}(1,p)$ για $\forall\, n\geq 1$

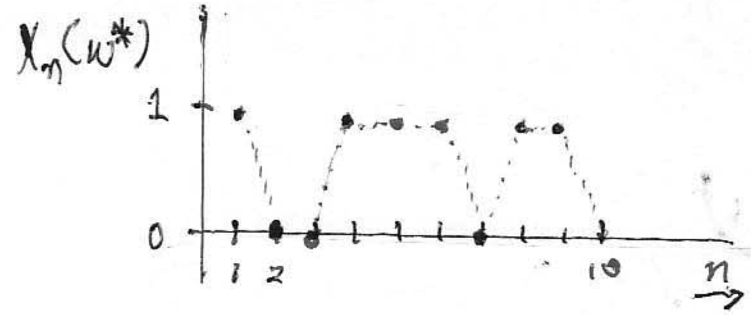
Εδώ ο χώρος καταστάσεων $S=\{0,1\}$ ενώ $T=\mathbb{N}$.

Μια ω-τροχιά μπορούμε να κατασκευάσουμε εαν για κάθε n ρίχνουμε νόμισμα κ' αντιστοιχίσουμε $H\leftrightarrow 1$ κ' $T\leftrightarrow 0$. Για παράδειγμα

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
ρίψη	H	T	T	H	H	H	T	H	H	T	...
X_n	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	...

(7.1)

<u>Δηλ</u> εδώ $\omega = \omega^* = \{1001110110\dots\} \in \{0,1\}^\infty = \Omega$



Η πιθ. να πάρουμε τροχιά που οι 10 πρώτες καταστάσεις είναι οι (7.1) είναι:

$$P\{X_1=1, X_2=0, \dots, X_9=1, X_{10}=0\} \overset{\text{ανεξ}}{=} P\{X_1=1\}\cdots P\{X_{10}=0\}$$
$$= p^6(1-p)^4$$

Η μέση τιμή, το autocovariance κ' autocorrelation είναι

$$\mathbb{E}[X_n] = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p = \text{ανεξάρτητο του } n$$

$$\gamma(m,n) = \mathrm{Cov}(X_m, X_n) = \mathbb{E}[X_m X_n] - \mathbb{E}[X_m]\mathbb{E}[X_n]$$

$$= \begin{cases} 0, & m\neq n \\ p(1-p), & m = n \end{cases} \Rightarrow \rho(m,n) = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ 1, & m=n \end{cases}$$

Φυσικά κ' ισχύει

$$P\{X_1=n_1, \dots, X_K=n_K\} = P\{X_{1+m}=n_1, \dots, X_{K+m}=n_K\} \quad : n_i\in\{0,1\}$$

Δηλ. Το Bernoulli process είναι ένα stationary process

□

Άσκηση Εάν $\{X_n\}_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητη διαδικασία δείξτε ότι είναι stationary κ' υπολογίστε $\mu(n)$, $\gamma(m,n)$ κ' $\rho(m,n)$. Υποθέστε ότι $X_n \overset{iid}{\sim} F_X(\cdot)$

$$F_{X_1\cdots X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{n} F_X(x_j) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_{j+k}}(x_j) =$$

$$= F_{X_{k+1}\cdots X_{k+n}}(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow \{X_n\} = \text{stationary}$$

$$\mu(n) = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] = \text{σταθ. ανεξάρτητη του } n$$

$$\gamma(m,n) = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \mathrm{Var}(X) & m=n \end{cases}, \quad \rho(m,n) = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

□

<u>Ασκηση</u> Δο' εαν μια διαδικασια έχει στασιμη $n^{οστης}$ τάξης κατανομη' τότε έχει κ' στασιμες ολες τις κατανομές ταξης k για $k<n$.

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_{t_1+h},\dots,X_{t_n+h}}(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow$$

$$P\{X_{t_1}\le x_1,\dots,X_{t_n}\le x_n\} = P\{X_{t_1+h}\le x_1,\dots,X_{t_n+h}\le x_n\} \Leftrightarrow$$

$$P\left(X_{t_1}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_n}^{-1}(-\infty,x_n]\right) = P\left(X_{t_1+h}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_n+h}^{-1}(-\infty,x_n]\right)$$

παιρνουμε το όριο $\lim\limits_{x_n\to\infty}(\cdot)$ κ' έχουμε

$$P\left(X_{t_1}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_{n-1}}^{-1}(-\infty,x_{n-1}]\cap\Omega\right)$$

$$= P\left(X_{t_1+h}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_{n-1}+h}^{-1}(-\infty,x_{n-1}]\cap\Omega\right) \Leftrightarrow$$

$$P\left(X_{t_1}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_{n-1}}^{-1}(-\infty,x_{n-1}]\right) = P\left(X_{t_1+h}^{-1}(-\infty,x_1]\cap\dots\cap X_{t_{n-1}+h}^{-1}(-\infty,x_{n-1}]\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad F_{X_{t_1}\dots X_{t_{n-1}}}(x_1,\dots,x_{n-1}) = F_{X_{t_1+h}\dots X_{t_{n-1}+h}}(x_1,\dots,x_{n-1})$$

<u>Δηλ</u> η διαδικασιε έχει στάσιμη $n-1$ ταξης κατανομή. Την ίδια διαδικασία μπορουμε να επαναλάβουμε για $k=n-2,\dots,1$.

$\square$

<u>Ορσ</u> Έστω $Z_i \overset{iid}{\sim} p_Z(\cdot)$ όπου $P\{Z=1\}=p$ κ' $P\{Z=-1\}=1-p$. Θέτουμε $X_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i, & n\geq 1 \end{cases}$, η διαδικασία $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ονομάζεται <u>απλός τυχαίος περίπατος</u> (simple random walk)

- Είναι εμφανές ότι ισχύει η <u>αναδρομική σχέση</u>:

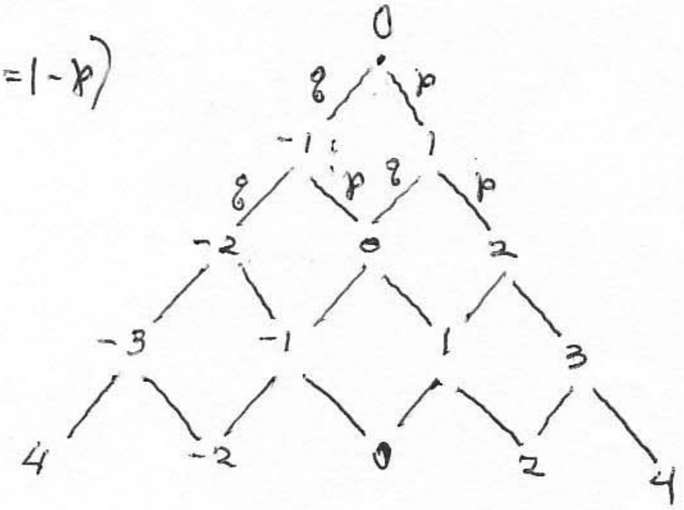
$$X_n = X_{n-1} + Z_n \quad , n\geq 1 \quad \text{με } X_0 = 0 .$$

Ο χώρος καταστάσεων είναι $S=\mathbb{Z}$ με $T=\mathbb{N}_0$.

- <u>Ένα απλοϊκό τυχερό παίγνιο</u>: Εαν $p=1/2$, κάποιος με την ρίψη ενός νομίσματος κερδίζει 1€ : $\{Z_i=1\}$ κ' χάνει 1€ : $\{Z_i=-1\}$, τότε X_n είναι το συνολικό κέρδος μετά από n ρίψεις.

<u>Άσκηση</u>: Εαν $\{X_n\}_{n\geq 1}$ είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος να βρεθεί η κατανομή του X_4. Επίσης να δειχθεί ότι $S=\mathbb{Z}$.

$(q=1-p)$



$X_0(\Omega)=\{0\}$

$X_1(\Omega)=\{-1,1\}$

$X_2(\Omega)=\{-2,0,2\}$

$X_3(\Omega)=\{-3,-1,1,3\}$

$X_4(\Omega)=\{-4,-2,0,2,4\}$

$X_{2m}(\Omega)=\{-2m,-2(m-1),\dots,-2,0,2,\dots,2(m-1),2m\}$

$X_{2m+1}(\Omega)=\{-(2m+1),-(2(m-1)+1),\dots,-3,-1,1,3,\dots,2(m-1)+1,2m+1\}$

$$X_{2m}(\Omega) \cup X_{2m+1}(\Omega) = \{-(2m+1), -2m, \dots, 2m, 2m+1\}$$

$$\Rightarrow \quad S = \bigcup_{n \geq 0} X_n(\Omega) = \mathbb{Z}$$

$P\{X_4 = -4\} = q^4$: $0 \to -1 \to -2 \to -3 \to -4$

$P\{X_4 = -2\} = 4pq^3$:
$$\begin{cases} 0 \to -1 \to -2 \to -3 \to -2 \\ 0 \to -1 \to -2 \to -1 \to -2 \\ 0 \to -1 \to 0 \to -1 \to -2 \\ 0 \to 1 \to 0 \to -1 \to -2 \end{cases}$$

$P\{X_4 = 0\} = 6p^2q^2$:
$$\begin{cases} 0 \to -1 \to -2 \to -1 \to 0 \\ 0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0 \\ 0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \\ 0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 0 \\ 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 0 \\ 0 \to 1 \to 0 \to -1 \to 0 \end{cases}$$

$P\{X_4 = 2\} = 4p^3q$:
$$\begin{cases} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \\ 0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \\ 0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 2 \\ 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \end{cases}$$

$P\{X_4 = 4\} = p^4$: $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$

$$X_4 \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ q^4 & 4pq^3 & 6p^2q^2 & 4p^3q & p^4 \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση</u> Να βρεθούν το mean, variance, autocovariance κ' autocorrelation του απλού τυχαίου περιπάτου.

$$\mathbb{E}(z_i) = (-1)q + (1)p = p - q \qquad \mathbb{E}(z_i^2) = (-1)^2 q + (1)^2 p = 1$$

$$Var(z_i) = 1 - (p-q)^2 = 1 - p^2 + 2pq - q^2 = \underbrace{1 - p^2 - 2pq - q^2}_{0} + 4pq = 4pq$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(z_i) = n(p-q)$$

$$Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(z_i) = 4npq$$

$$\gamma(m,n) = Cov(X_m, X_n) = \mathbb{E}[X_m X_n] - \mathbb{E}[X_m]\mathbb{E}[X_n]$$

<u>Εάν $m<n$:</u> $\mathbb{E}[X_m X_n] = \mathbb{E}\left\{ \sum_{i=1}^{m} z_i \left(\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{j=m+1}^{n} z_j \right) \right\} =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(z_i^2) + 2 \sum_{1 \le i < j \le m} \mathbb{E}(z_i)\mathbb{E}(z_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} \mathbb{E}(z_i)\mathbb{E}(z_j)$$

$$= m + 2\binom{m}{2}(p-q)^2 + m(n-m)(p-q)^2$$

$$= m + (mn - m)(p-q)^2$$

$$\gamma(m,n) = m + (mn-m)(p-q)^2 - mn(p-q)^2 = m\overbrace{\left[1 - (p-q)^2\right]}^{4pq}$$

<u>Απο συμμετρία έχουμε:</u> $\boxed{\gamma(m,n) = 4pq \cdot m \wedge n}$

<u>Εάν $m<n$:</u> $\rho(m,n) = corr(X_m, X_n) = \dfrac{Cov(X_m, X_n)}{\sqrt{Var(X_m)Var(X_n)}}$

$$= \frac{4mpq}{\sqrt{4^2 mn p^2 q^2}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Από συμμετρία έχουμε:

$$\rho(m,n)=\begin{cases}\sqrt{m/n}\,, & m\le n\\ \sqrt{n/m}\,, & m>n\end{cases}$$

$\square$

Άσκηση Δίνεται η ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $X_t = Y\cos(t) \Leftrightarrow X(t,w)=Y(w)\cos(t)$

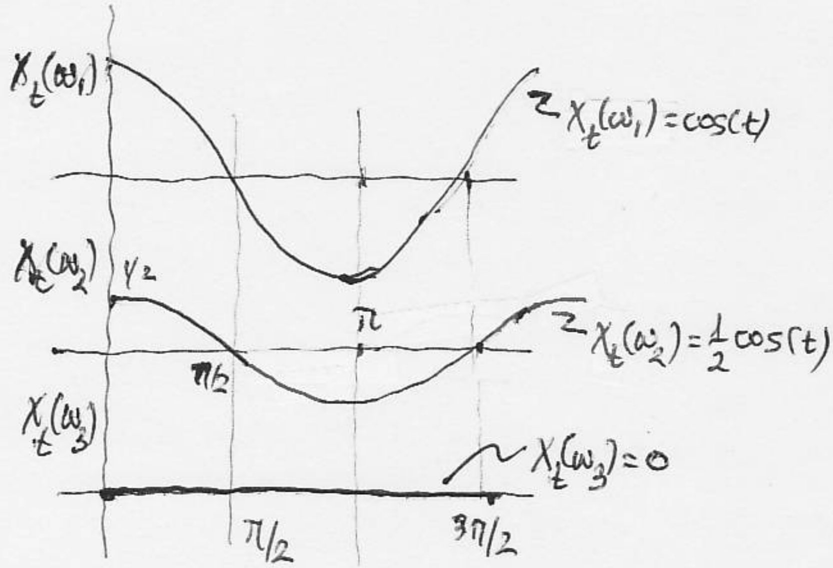
όπου $Y\sim \mathcal{U}(0,1)$

(i) Να βρεθούν οι ω-τροχιές: $Y(\omega_1)=1$, $Y(\omega_2)=1/2$, $Y(\omega_3)=0$

(ii) Να βρεθούν οι πυκνότητες πρώτης τάξης για $t=0, \pi/4, \pi/2, \pi$

(iii) Να βρεθούν τα $\mu(t)$, $\gamma(s,t)$, κ' $\rho(s,t)$.

(i)



(ii) $f_{X_0}(x) = f_Y(x) = \mathcal{U}(x|0,1)$

$$f_{X_{\pi/4}}(x) = f_Y(y(x))\,|y'(x)| = 1(0<\sqrt{2}x<1)\sqrt{2} = \sqrt{2}\,1(0<x<\sqrt{2}/2)$$
$$= \mathcal{U}(x|0,\sqrt{2}/2)$$

$X_{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}Y$

$$X_{\pi/2} = 0 \ , \ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow P\{X_{\pi/2} = 0\} = 1$$

$$X_\pi = -Y \Rightarrow f_{X_\pi}(x) = f_Y(-x) = \mathcal{U}(x|-1,0)$$

(iii)

$$\mathbb{E}[X_t] = \cos(t)\,\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\cos(t)$$

$$Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[X_s X_t] - \mathbb{E}[X_s]\mathbb{E}[X_t] = \cos(t)\cos(s)\overbrace{\mathbb{E}[Y^2]}^{1/3} - \frac{1}{4}\cos(t)\cos(s)$$

$$= \frac{1}{12}\cos(t)\cos(s) \Rightarrow Var(X_t) = \frac{1}{12}\cos^2(t)$$

$$Corr(X_s, X_t) = \frac{\frac{1}{12}\cos(t)\cos(s)}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2\cos^2(s)\cos^2(t)}} = \frac{\cos(t)\cos(s)}{|\cos(t)\cos(s)|}$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: $Corr(\alpha Y + \beta, \gamma Y + \delta) = \dfrac{\alpha\gamma}{|\alpha\gamma|}$.

<u>Πρόταση</u> Εάν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι ΣΔ με $\boxed{X_0 = 0}$ κ' <u>στάσιμες κ' ανεξάρτητες</u> προσαυξήσεις τότε:

(i) $\mathbb{E}[X_t] = \mu(1)t$ <u>όπου</u> $\mu(1) = \mathbb{E}[X_1]$

(ii) $Var[X_t] = \sigma^2(1)t$ κ' $Var[X_t - X_s] = \sigma^2(1)\cdot|t-s|$

<u>όπου</u> $\sigma^2(1) = Var[X_1]$

(iii) $g(t,s) = Cov[X_t, X_s] = \sigma^2(1)\cdot t\wedge s$

Θέτουμε $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_t - X_0]$

$$\mu(t+s) = \mathbb{E}[X_{t+s} - X_0] = \mathbb{E}[X_{t+s} - X_s + X_s - X_0] =$$

$$= \mathbb{E}[X_{t+s} - X_s] + \mathbb{E}[X_s - X_0] \overset{\text{στάσιμες προσαυξήσεις}}{=}$$

$$= \mathbb{E}[X_t - X_0] + \mathbb{E}[X_s - X_0] = \mu(t) + \mu(s)$$

<u>Δηλαδή</u>: η συνάρτηση $\mu(t)$ είναι της μορφής

$$\mu(t) = At \underset{(t=1)}{\Rightarrow} A = \mu(1) \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X_t] = \mu(1)t}$$

<u>Παρατήρηση</u>: $\mu(t_k) = A \cdot t_k \Leftrightarrow A = \dfrac{\mu(t_k)}{t_k}, \ \forall t_k > 0 \Rightarrow$

$$\frac{\mathbb{E}[X_{t_1}]}{t_1} = \dots = \frac{\mathbb{E}[X_{t_k}]}{t_k}$$

(ii) Θέτουμε $\sigma^2(t) = Var(X_t) = Var(X_t - X_0)$

$$\sigma^2(t+s) = Var[X_{t+s} - X_s + X_s - X_0] \overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=}$$

$$= Var[X_{t+s} - X_s] + Var[X_s - X_0] \overset{\text{στασ. προσ.}}{=}$$

$$= Var[X_t - X_0] + Var[X_s - X_0] = \sigma^2(t) + \sigma^2(s)$$

$$\Rightarrow \sigma^2(t) = At \underset{t=1}{\Rightarrow} A = \sigma^2(1) \Rightarrow \boxed{Var(X_t) = \sigma^2(1) \cdot t} \quad (15.1)$$

$s < t \quad Var[X_t] = Var[X_t - X_s + X_s - X_0] =$

$$= Var[X_t - X_s] + Var[X_s - X_0]$$

$$= Var[X_t - X_s] + Var[X_s] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Var[X_t - X_s] = Var[X_t] - Var[X_{s}] \overset{(15.1)}{=} \sigma^2(1)(t-s)$$

Εμφανώς εάν $s > t$ $Var[X_t - X_s] = \sigma^2(1)(s-t)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X_t - X_s) = \sigma^2(1)\cdot|t-s| \;,\; \forall t,s>0} \quad :(16.1)$$

(iii) Παρατηρούμε ότι $Var(X-Y) = \mathbb{E}\left\{(X-Y-\mathbb{E}(X-Y))^2\right\}$

$$= \mathbb{E}\left\{\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right) - \left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right)^2\right\} = Var(X) - 2\,Cov(X,Y) + Var(Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\Big[Var(X) + Var(Y) - Var(X-Y)\Big]$$

$$\underset{=}{\text{έτσι}} \quad Cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\Big[Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_t - X_s)\Big]$$

$$\overset{(15.1)(16.1)}{\Longrightarrow} \quad Cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\sigma^2(1)\cdot\left(t+s-|t-s|\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2(1)\left(t+s-(t-s)\right), & t \geq s \\ \frac{1}{2}\sigma^2(1)\left(t+s-(s-t)\right), & t < s \end{cases} = \begin{cases} \sigma^2(1)s, & t \geq s \\ \sigma^2(1)t, & t < s \end{cases}$$

$$= \sigma^2(1)\cdot s\wedge t \quad \Rightarrow \quad \boxed{Cov(X_t, X_s) = \sigma^2(1)\cdot s\wedge t}$$

□