Πιθανότητες μετάβασης κ' Μαρκοβιανές διαδικασίες

Από τον ορισμό της σελ. 6, το βασικό χαρακτηριστικό των Μαρκοβιανών διαδικασιών είναι ότι η μελλοντική τους εξέλιξη εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκονται στο παρόν κ' όχι από το παρελθόν τους.

$$\{X_n\}_{n\geq 0} = \text{ΜΔ} \Leftrightarrow P\{X_n \in A \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = P\{X_n \in A \mid X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

όπου ο χώρος καταστάσεων S είναι διακριτός κ' η χρονική παραμετρικοποίηση T επίσης διακριτή. Σε αυτή την περίπτωση η ΜΔ $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ονομάζεται κ' αλυσίδα Markov

Η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση x στο σύνολο καταστάσεων A (το A μπορεί να είναι κ' το μονοσύνολο πχ $A = \{y\}$) είναι

$$P\{X_{n+1} \in A \mid X_n = x\} = \underline{P}(n, x, A)$$

η' ότι έχει στάσιμη πιθανότητα μετάβασης

Λέμε ότι η ΜΔ είναι κ' χρονικά ομογενής εάν

$$\underline{P}(n, x, A) = \underline{P}(n-1, x, A) = \dots = \underbrace{\underline{P}(0, x, A)}_{\boxed{\mathcal{P}(A|x)}}$$

Παράδειγμα: Ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ είναι μια χρονικά ομογενής αλυσίδα Markov έχουμε ότι $Z_i \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \underbrace{1-p}_{q} & p \end{pmatrix}$, $i \geq 1$ και $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i + X_0$

$\underbrace{X_0 \sim \pi_0(\cdot)}_{\text{αρχική κατανομή}}$ ισοδύναμα $X_n = \begin{cases} X_{n-1} + Z_n, & n \geq 1 \\ X_0, & n = 0 \end{cases}$

(i) $P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0\} =$

$P\{X_n + Z_{n+1} = y \mid X_n = x, \ldots, X_0 = x_0\} \overset{\text{Markov}}{=} P\{Z_{n+1} = y - x\} =$

$= P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} \Rightarrow \{X_n\}_{n \geq 0} =$ αλυσίδα Markov

(ii) Επειδή τα Z_i είναι ισόνομα έχουμε

$P\{Z_{n+1} = y - x\} = P\{Z_n = y - x\} = \ldots = \underbrace{P\{Z_1 = y - x\}}_{p(y|x)}$

κ' ότι

$P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} = P\{X_n = y \mid X_{n-1} = x\} = \ldots = \underbrace{P\{X_1 = y \mid X_0 = x\}}_{p(y|x)}$

$\Rightarrow \{X_n\}_{n \geq 0} =$ χρονικά ομογενής

(iii) Για την πιθανότητα μετάβασης επειδή

θα έχουμε $P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\} = p(y|x) = \begin{cases} q & y = x-1 \\ p & y = x+1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

<u>ορσ</u>: Η πιθανότητα μετάβασης k-τάξης είναι

$P\{X_{n+k} = y \mid X_n = x\}$ κ' εάν η αλυσίδα είναι χρονικά ομογενής θα έχουμε

$$P\{X_{n+k}=y \mid X_n=x\} = P\{X_{n+k-1}=y \mid X_{n-1}=x\} = \dots = \underbrace{P\{X_k=y \mid X_0=x\}}_{p_k(y|x)}$$

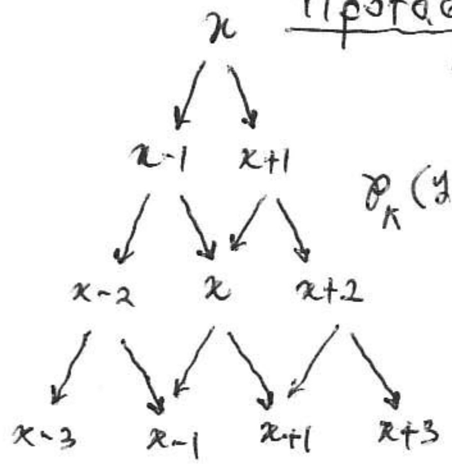
<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί η πιθανότητα μετάβασης $2^{ης}$ κ' $3^{ης}$ τάξης για τον τυχ. περίπατο $\{X_n\}_{n\geq 0}$

$$p_2(y|x) = P\{X_{n+2}=y \mid X_n=x\} = P\{X_{n+1}+Z_{n+2}=y \mid X_n=x\} =$$

$$P\{X_n+Z_{n+1}+Z_{n+2}=y \mid X_n=x\} = P\{Z_{n+1}+Z_{n+2}=y-x\} =$$

$$= \begin{cases} q^2 & -2=y-x \\ 2pq & 0=y-x \\ p^2 & 2=y-x \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad \begin{array}{l} P\{Z_{n+1}=-1, Z_{n+2}=-1\}=q^2 \\ P(\{Z_{n+1}=-1, Z_{n+2}=1\}\cup\{Z_{n+1}=1, Z_{n+2}=-1\})=2pq \\ P\{Z_{n+1}=1, Z_{n+2}=1\}=p^2 \end{array}$$

$\square$



<u>Πρόταση:</u> Η πιθ. μετάβαση $K^{οστής}$ τάξης θα είναι

$$p_k(y|x) = P\{X_{n+k}=y \mid X_n=x\} = P\left\{\sum_{i=1}^{k} Z_{n+i} = y\right\}$$

$$= \begin{cases} Bin(0|k,p), & -k=y-x \\ Bin(1|k,p), & -k+2=y-x \\ \vdots & \vdots \\ Bin(m|k,p), & -k+2m=y-x \\ \vdots & \vdots \\ Bin(k|k,p), & -k+2k=y-x \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$p_k(y|x) = \begin{cases} Bin(m|k,p), & y=x-k+2m, \quad 0\leq m\leq k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p_K(y|x) = \begin{cases} Bin\left(\frac{K+(y-x)}{2} \Big| K, p\right) &, K+y-x = \text{άρτιος} \\ 0 &, K+y-x = \text{περιττός} \end{cases} \quad : (20.0)$$

<u>Πρόταση</u>: Για να χαρακτηρίσουμε μια Μαρκοβιανή διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in T}$ αρκούν οι κατανομές $2^{ας}$ τάξης

Θα εκφράσουμε την $n^{οστής}$ τάξης κατανομή της διαδικασίας χρησιμοποιώντας κατανομές $2^{ας}$ τάξης.

$$F_{X_{t_1}\cdots X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = P\{X_{t_1}\le x_1,\dots,X_{t_n}\le x_n\} =$$

$$= P\{X_{t_1}\le x_1,\dots,X_{t_{n-1}}\le x_{n-1}\}\, P\{X_{t_n}\le x_n \mid X_{t_{n-1}}\le x_{n-1},\dots,X_{t_1}\le x_1\}$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} P\{X_{t_n}\le x_n \mid X_{t_{n-1}}\le x_{n-1}\}\, F_{X_{t_1}\cdots X_{t_{n-1}}}(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad : (20.1)$$

<u>ομοίως</u>

$$F_{X_{t_1}\cdots X_{t_{n-1}}}(x_1,\dots,x_{n-1}) = P\{X_{t_{n-1}}\le x_{n-1} \mid X_{t_{n-2}}\le x_{n-2}\}\, F_{X_{t_1}\cdots X_{t_{n-2}}}(x_1,\dots,x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$F_{X_{t_1},X_{t_2}}(x_1,x_2) = P\{X_{t_2}\le x_2 \mid X_{t_1}\le x_1\}\, F_{X_{t_1}}(x_1)$$

Αντικαθιστώντας στην (20.1) παίρνουμε

$$F_{X_{t_1}\cdots X_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_{t_1}}(x_1)\prod_{j=2}^{n} P\{X_{t_j}\le x_j \mid X_{t_{j-1}}\le x_{j-1}\}$$

$\square$

Άσκηση Δείξτε ότι η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος να ξαναγυρίσει στην κατάσταση απο την οποία ξεκίνησε, μεγιστοποιείται για $p = 1/2$

$$(20\cdot 0) \Rightarrow p_K(x|x) = \begin{cases} \mathrm{Bin}(K/2 \mid K, p) & , K = \text{άρτιος} \\ 0 & , K = \text{περιττός}. \end{cases}$$

Αρκεί λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την συν/ση $p_{2m}(x|x)$

$$p_{2m}(x|x) = \mathrm{Bin}(m \mid 2m, p) = \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m$$

Επειδη οι συν/σεις $p_{2m}(x|x)$ κ΄ $\log p_{2m}(x|x)$ έχουν μεγιστο για το ίδιο $p = p^*$ θα εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial p} \log p_{2m}(x|x) = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \log \binom{2m}{m} + m \log(p) + m \log(1-p) \right\}$$

$$= \frac{m}{p} - \frac{m}{1-p} \Rightarrow p^* = 1/2$$

ενώ

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log p_{2m}(x|x) = -\frac{m}{p^2} - \frac{m}{(1-p)^2} < 0 \quad , \forall p \in (0,1)$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Δίνεται η ΣΔ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ με

$X_t = u\cos(t) + v\sin(t)$ όπου u κ' v τυχαίες μεταβλητές

(i) Δσ' μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\{X_t\}$ <u>statio-nary</u> είναι $\mathbb{E}[u] = \mathbb{E}[v] = 0$

(ii) Δσ' μια αναγκαία κ' ικανή συνθήκη για να είναι η $\{X_t\}$ <u>ασθενώς στάσιμη</u> (weak stationary) είναι η τμ u κ' v να είναι ασυσχέτιστες με ίσες διασπορές.

(i) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}(u)\cos(t) + \mathbb{E}(v)\sin(t)$

Εαν $\{X_t\}$ = στάσιμη $\Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = \mu$ = σταθερά

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow \mathbb{E}(u)=\mu \\ t=\pi/2 \Rightarrow \mathbb{E}(v)=\mu \\ t=\pi \Rightarrow -\mathbb{E}(u)=\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[u]=\mathbb{E}[v]=\mu=0 : (21.1)$$

$\hookrightarrow \mathbb{E}[X_t]=0, \forall t$

(ii) Εαν $\{X_t\}$ = ασθενώς στάσιμη $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[X_t] = \mu = \text{σταθ.} \\ g(t,t+\tau) = Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \tilde{g}(\tau) \end{cases}$

$$(21.1) \Rightarrow \begin{cases} Var[u] = \mathbb{E}[u^2],\ Var[v] = \mathbb{E}[v^2] : (21.2) \\ Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+\tau}] = \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ \left(u\cos(t) + v\sin(t)\right)\left(u\cos(t+\tau) + v\sin(t+\tau)\right) \right\} =$$

$$= \mathbb{E}(u^2)\cos(t)\cos(t+\tau) + \mathbb{E}(uv)\sin(2t+\tau) + \mathbb{E}(v^2)\sin(t)\sin(t+\tau)$$

$$= \tilde{g}(\tau) \quad : (21.3)$$

$$(21.3) \overset{t=0}{\Rightarrow} \mathbb{E}(u^2)\cos(\tau) + \mathbb{E}(uv)\sin(\tau) = \tilde{g}(\tau)$$

$$\overset{t=\pi/2}{\Rightarrow} \mathbb{E}(uv)\underbrace{\sin(\tau+\pi)}_{-\sin(\tau)} + \mathbb{E}(v^2)\underbrace{\sin(\tau+\pi/2)}_{\cos(\tau)} = \tilde{g}(\tau) \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(v^2)\right\}\cos(\tau) + 2\mathbb{E}(uv)\sin(\tau) = 0, \ \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(u^2) - \mathbb{E}(v^2) = 0 \\ \mathbb{E}(uv) = 0 \end{array}\right\} \overset{(21.3)}{\Rightarrow} Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \sigma^2\cos(\tau) = \tilde{g}(\tau)$$

$\underline{\underline{\text{όπου}}}$ $\mathbb{E}(u^2) = \mathbb{E}(v^2) = \sigma^2$

Το ικανό μέρος της (ii) είναι προφανές.

□

<u>Άσκηση</u> Δίνεται πάλι $X_t = u\cos(t) + v\sin(t)$ αλλά αυτή την φορά γνωρίζουμε ότι $u, v \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Δο η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι <u>ασθενώς στάσιμη</u> αλλά <u>όχι στάσιμη</u>.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(u) = \mathbb{E}(v) = \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}(1) = 0 \\ \mathbb{E}(u^2) = \mathbb{E}(v^2) = \frac{1}{3}(-2)^2 + \frac{2}{3}(1)^2 = 2 = \sigma^2 \\ u \perp v \Rightarrow \mathbb{E}(uv) = \mathbb{E}(u)\mathbb{E}(v) = 0 \end{array}\right\} \overset{[\text{Προηγούμενη άσκηση}]}{\Rightarrow} \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}} = \text{ασθενώς στάσιμη.}$$

Εαν $\{X_t\}$ = stationary, μια αναγκαία συνθήκη θα είναι

$$f_{X_t}(x) = f_{X_{t+\tau}}(x), \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f_{X_t}(x) = f_X(x) = \text{ανεξάρτητη του } t$$

$\Rightarrow$ όλες οι ροπές της X_t θα πρέπει να είναι ανεξ. του t εφόσον $\mathbb{E}[X_t^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_{X_t}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx$

<u>Άσκηση</u> Δίνεται η ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $X_t = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$ όπου A_0, A_1, A_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}[A_i]=1$, $Var[A_i]=1$ $i=0,1,2$. Να βρεθούν τα $\mu(t)$, $Var[X_t]$ κ' $\gamma(t,s)$.

$$\mathbb{E}[X_t] = 1+t+t^2$$

$$Var[X_t] = Var[A_0] + t^2 Var[A_1] + t^4 Var[A_2] = 1+t^2+t^4$$

$$Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \mathbb{E}\left[(A_0+A_1t+A_2t^2)(A_0+A_1(t+\tau)+A_2(t+\tau)^2)\right] -$$
$$-(1+t+t^2)(1+(t+\tau)+(t+\tau)^2)$$

$$= \mathbb{E}(A_0^2) + \mathbb{E}(A_0A_1)(t+\tau) + \mathbb{E}(A_0A_2)(t+\tau)^2$$
$$+ \mathbb{E}(A_0A_1)t + \mathbb{E}(A_1^2)t(t+\tau) + \mathbb{E}(A_1A_2)t(t+\tau)^2$$
$$+ \mathbb{E}(A_0A_2)t^2 + \mathbb{E}(A_1A_2)t^2(t+\tau) + \mathbb{E}(A_2^2)t^2(t+\tau)^2$$
$$-(1+t+t^2)(1+(t+\tau)+(t+\tau)^2)$$

$$= 2+(t+\tau)+(t+\tau)^2+t+2t(t+\tau)+t(t+\tau)^2+t^2+t^2(t+\tau)+2t^2(t+\tau)^2$$
$$-1-(t+\tau)-(t+\tau)^2-t-t(t+\tau)-t(t+\tau)^2-t^2-t^2(t+\tau)-t^2(t+\tau)^2$$

$$= 1+t(t+\tau)+t^2(t+\tau)^2 = \gamma(t,t+\tau) \neq \tilde{\gamma}(\tau)$$

□

<u>Άσκηση</u>: $X_t = u+vt$ $\quad u,v \overset{iid}{\sim} U(0,1)$ $\quad \{X_t\}_{t\geq 0}$

(i) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{2}(1+t)$, $Cov(X_t, X_s) = \frac{1}{12}(1+ts)$

(ii) Θέλουμε να βρούμε την πυκνότητα της X_t για $t\geq 0$. Προφανώς $X_0 = u \sim U(0,1)$

για $t>0$ έχουμε $X_t \overset{d}{=} X+Y$ όπου $X \perp Y$

κ' $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,t)$ έτσι εάν $Z = X+Y \Rightarrow$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} U(x|0,1)\,U(z-x|0,t)\,dx =$$

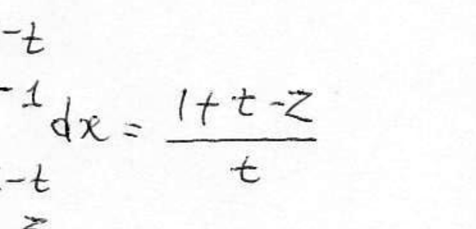
$$= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} 1(0<x<1)\,1(0<z-x<t)\,dx = \frac{1}{t}\int_0^1 1(0<z-x<t)\,dx =$$

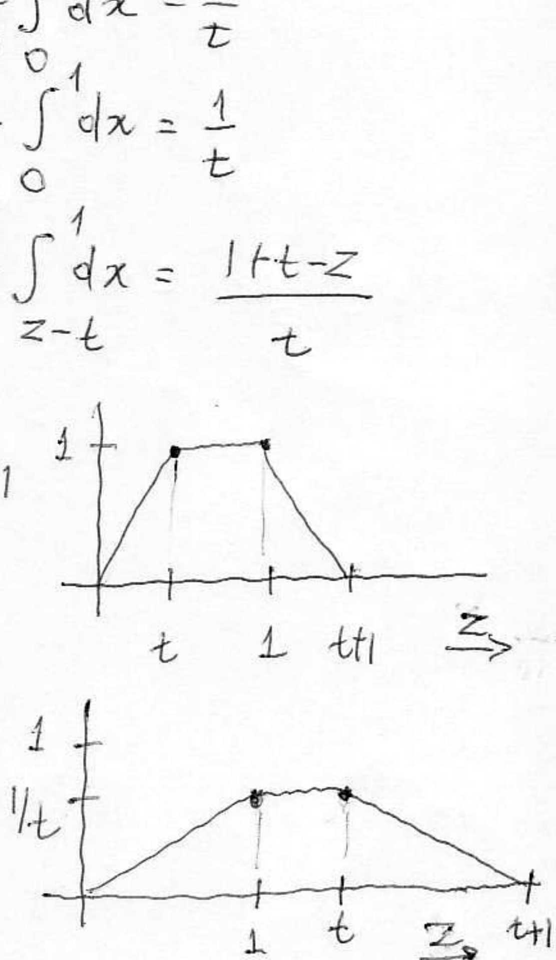
$$= \frac{1}{t}\int_0^1 1(z-t<x<z)\,dx$$

(α) $0<t\le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0<z\le t \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_0^z dx = \frac{z}{t} \\ t\le z\le 1 \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_{z-t}^z dx = 1 \\ 1\le z<1+t \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_{z-t}^1 dx = \frac{1+t-z}{t} \end{cases}$

$1\le t \Rightarrow \begin{cases} 0<z<1\le t \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_0^z dx = \frac{z}{t} \\ 1<z\le t \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_0^1 dx = \frac{1}{t} \\ t\le z<1+t \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{t}\int_{z-t}^1 dx = \frac{1+t-z}{t} \end{cases}$

$$f_{X_t}(z) = \begin{cases} \left\{\begin{array}{ll} z/t & 0<z\le t \\ 1 & t\le z\le 1 \\ (1+t-z)/t & 1\le z\le t+1 \end{array}\right\}, & t\le 1 \\[2ex] \left\{\begin{array}{ll} z/t & 0<z\le 1 \\ 1/t & 1\le z\le t \\ (1+t-z)/t & t\le z\le t+1 \end{array}\right\}, & t\ge 1 \end{cases}$$





$\mathbb{E}[X_t]=0$ (επειδή $\mathbb{E}(u)=\mathbb{E}(v)=0$)

$\mathbb{E}[X_t^2]=\underbrace{\mathbb{E}(u^2)}_{2}\cos^2(t)+2\underbrace{\mathbb{E}(uv)}_{0}\cos(t)\sin(t)+\underbrace{\mathbb{E}(v^2)}_{2}\sin^2(t)=2$

$\mathbb{E}[X_t^3]=\underbrace{\mathbb{E}[u^3]}_{-2}\cos^3(t)+3\underbrace{\mathbb{E}[u^2v]}_{0}\cos(t)\sin(t)+$

$+3\underbrace{\mathbb{E}[uv^2]}_{\mathbb{E}(u)\mathbb{E}(v^2)=0}\cos(t)\sin^2(t)+\underbrace{\mathbb{E}[v^3]}_{-2}\sin^3(t)$

$=-2(\cos^3(t)+\sin^3(t))\Rightarrow\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}\neq$ stationary. $\square$

<u>Άσκηση</u> Δίνεται η ΣΔ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ που ορίζεται από την σχέση $X_t=A\cos(t+\theta)$ όπου $A=$σταθ. κ' $\theta\sim\mathcal{U}(-\pi,\pi)$. Δό $\{X_t\}=$ασθενώς στάσιμη.

$$\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[A\cos(t+\theta)]=A\int_{\mathbb{R}}\cos(t+\vartheta)\,\mathcal{U}(\vartheta|-\pi,\pi)\,d\vartheta$$

$$=\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+\vartheta)\,d\vartheta=\frac{A}{2\pi}\left[\sin(t+\theta)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{A}{2\pi}\Big[\underbrace{\sin(t+\pi)}_{-\sin(t)}-\underbrace{\sin(t-\pi)}_{-\sin(t)}\Big]$$

$$\Rightarrow\mathbb{E}[X_t]=0$$

$$\mathrm{Cov}(X_t,X_{t+\tau})=\mathbb{E}[X_tX_{t+\tau}]=A^2\mathbb{E}\{\cos(t+\theta)\cos(t+\tau+\theta)\}$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t+\vartheta)\cos(t+\tau+\vartheta)\,d\vartheta=\frac{A^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(2t+\tau+2\vartheta)+$$

$$+\cos(\tau)\}\,d\vartheta=\frac{A^2}{2}\cos(\tau)=\tilde{g}(\tau)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\cdot\frac{e^{iB}+e^{-iB}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{i(A+B)}+e^{-i(A+B)}}{2} + \frac{e^{i(A-B)}+e^{-i(A-B)}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Δ.ό. μια ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με $X_0 = x_0$ που έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι Μαρκοβιανή.

$$P\{X_{t_n}\leq y \mid X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1\} =$$

$$= P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \leq y - x \mid X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x - x_{n-2}, \dots, X_{t_1} - X_0 = x_1 - x_0\}$$

$$= P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \leq y - x\} = P\{X_{t_n}\leq y \mid X_{t_{n-1}} = x\}$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u> (i) Στην προηγούμενη άσκηση $T = \mathbb{R}_0^+$ κ' ο χώρος καταστάσεων S είναι συνεχής, σε συνεχή χρόνο. Γενικά έχουμε ότι $P\{X_{t_n}\leq y \mid X_{t_{n-1}} = x\} = \mathbb{P}(t_{n-1}, t_n, x, y)$ δηλ. η αθροιστική πιθ. μετάβασης εξαρτάται από τα t_{n-1}, t_n, x, y. Εάν όμως $P\{X_{t_n}\leq y \mid X_{t_{n-1}} = x\} = \mathbb{P}(t_n - t_{n-1}, x, y)$ δηλ. δεν έχουμε εξάρτηση από τα t_{n-1} κ' t_n αλλά <u>μόνο από τη διαφορά $t_n - t_{n-1}$</u> τότε λέμε ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία είναι <u>χρονικά ομογενής</u> (η' ότι έχει <u>σταθερή</u> αθρ. πιθ. μετάβασης).

(ii) Η αντίστοιχη πυκνότητα μετάβασης όταν $T = \mathbb{R}_0^+$ κ' S = συνεχής θα είναι

$$P\{y < X_{t_n} \le y+dy \mid X_{t_{n-1}} = x\} =$$

$$P\{X_{t_n} \le y+dy \mid X_{t_{n-1}} = x\} - P\{X_{t_n} \le y \mid X_{t_{n-1}} = x\} =$$

$$F_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(y+dy|x) - F_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(y|x) =$$

$$dF_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(y|x) = f_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(y|x)\,dy = \underbrace{p(t_n - t_{n-1}, x, y)\,dy}$$

Η πυκνότητα μετάβασης για χρονικά ομογενή Μαρκοβιανή διαδικασία και $S \subseteq \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_0^+$

Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα σε χρόνο t_{n-1} κ' την πυκνότητα μετάβασης $p(t_n - t_{n-1}, x, y)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την πυκνότητα σε χρονο t_n

$$f_{X_{t_n}}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{t_{n-1}}, X_{t_n}}(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{t_{n-1}}}(x)\, f_{X_{t_n}|X_{t_{n-1}}}(y|x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_{X_{t_{n-1}}}(x)\, p(t_n - t_{n-1}, x, y)\,dx \quad : (25.1)$$

<u>Ορσ</u> Η διαδικασία Wiener $\{W_t\}_{t \ge 0}$ είναι η κίνηση Brown (ο ορσ στη σελ <u>6</u>) για $c=1$. <u>Εναλλακτικά</u> μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμο.

(i) $W_0 = 0$ με πιθανότητα 1.

(ii) $\forall\, \omega =$ σταθερό η αντίστοιχη ω-πραγματοποίηση είναι συνεχής συνάρτηση του t

(iii) για $\forall$ $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ έχουμε

$$P\{x_1 < W_{t_1} \le x_1 + dx_1, \dots, x_n < W_{t_n} \le x_n + dx_n \mid W_0 = 0\} =$$

$$= P\{x_1 < W_{t_1} \le x_1 + dx_1\} P\{x_2 < W_{t_2} \le x_2 + dx_2 \mid W_{t_1} = x_1\} \dots$$

$$\dots P\{x_n < W_{t_n} \le x_n + dx_n \mid W_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

$$= p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$$

<u>με</u> $p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) = N(x_i \mid x_{i-1}, t_i - t_{i-1})$

<u>Παρατήρηση</u> (i) Η διαδικασία Wiener σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό είναι χρ. ορος Markov με πυκνότητα μετάβασης $[W_{t_i} \mid W_{t_{i-1}} = x_{i-1}] \sim N(\cdot \mid x_{i-1}, t_i - t_i) = p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, \cdot)$

ενώ $W_t \overset{d}{=} [W_t \mid W_0 = 0] \sim N(\cdot \mid 0, t) = p(t, 0, \cdot)$

(ii) $$P\{W_{t_1} \in A_1, \dots, W_{t_n} \in A_n\} = \int_{A_1 \ni x_1} \cdots \int_{A_n \ni x_n} p(t_1, 0, x_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \times$$
$$\times\, dx_1 \cdots dx_n$$

<u>Άσκηση</u> Εάν $s < t$ κ' $f_{W_s}(x) = N(x \mid 0, s)$ Δείξτε ότι η πυκνότητα μετάβασης $p(t-s, x, y)$ είναι $N(y \mid x, t-s)$

Από την σχέση (25.1) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\boxed{f_{W_t}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{W_s}(x)\, p(t-s, x, y)\, dx}$$ <u>ή ότι</u>

$$N(y|0,t) = \int_{\mathbb{R}} N(x|0,s)\, N(y|x,t-s)\, dx$$

<u>Πράγματι</u> $I = \int_{\mathbb{R}} N(x|0,s)\, N(y|x,t-s)\, dx =$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{t-s}\right) dx \quad : (27.1)$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{x^2}{s} + \frac{(y-x)^2}{t-s}}_{Q}\Big]\right\} dx$$

$$Q = \frac{(t-s)x^2 + s(y-x)^2}{s(t-s)} = \frac{t}{s(t-s)}\left(x^2 - 2y\frac{s}{t}x + \frac{s}{t}y^2\right)$$

$$= \frac{t}{s(t-s)}\left[x^2 - 2y\frac{s}{t}x + \frac{y^2 s^2}{t^2} + y^2\frac{s}{t} - y^2\frac{s^2}{t^2}\right]$$

$$= \frac{t}{s(t-s)}\left(x - \frac{s}{t}y\right)^2 + \frac{y^2}{t}$$

$$(27.1) \Rightarrow I = \underbrace{\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\, e^{-\frac{y^2}{2t}} \times \sqrt{2\pi s(t-s)/t}}_{N(y|0,t)} \; \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x - sy/t)^2}{s(t-s)/t}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t-s)/t}}}_{1}$$

$\square$