<u>Πρόταση</u>: Χρησιμοποιώντας τον ορσ της σελ. <u>25</u> για την διαδικασία Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$, ισχύουν τα παρακάτω.

(i) $Cov(W_s, W_t) = g(s,t) = s \wedge t$.

(ii) $\mathbb{E}\{(W_t - W_s)^2\} = |t-s|$

(iii) Η διαδικασία Wiener έχει <u>στάσιμες</u> κ' <u>ανεξάρτητες</u> προσαυξήσεις

(i) $$\mathbb{E}[W_s] = \int_{\mathbb{R}} x P_{W_s}(dx) = \int_{\mathbb{R}} x p(s,0,x) dx = \int_{\mathbb{R}} x N(x|0,s) dx = 0$$

<u>έτσι</u> $$Cov(W_s, W_t) = \mathbb{E}[W_s W_t] \overset{s<t}{=} \mathbb{E}\{\mathbb{E}[W_s W_t | W_s]\}$$

$$= \mathbb{E}\{W_s \mathbb{E}[W_t | W_s]\} \quad : (28.1)$$

$$\mathbb{E}[W_t | W_s = x] = \int_{\mathbb{R}} y f_{W_t|W_s}(y|x) dy = \int_{\mathbb{R}} y p(t-s, x, y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y N(y|x, t-s) dy = x \quad \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[W_t | W_s] = W_s}$$

$$(28.1) \Rightarrow Cov(W_s, W_t) = \mathbb{E}[W_s^2] = Var[W_s] = s$$

<u>Εάν</u> $s > t \Rightarrow Cov(W_s, W_t) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[W_s W_t | W_t]\} =$

$$= \mathbb{E}[W_t^2] = Var[W_t] = t$$

<u>Δηλαδή</u>: $$\boxed{Cov(W_s, W_t) = s \wedge t}$$

(ii) $\mathbb{E}\left[(W_s - W_t)^2\right] = \mathbb{E}[W_s^2] - 2\mathbb{E}[W_s W_t] + \mathbb{E}[W_t^2]$

$= s - 2\cdot s\wedge t + t = \begin{cases} s - 2s + t, & s \le t \\ s - 2t + t, & s > t \end{cases} = \begin{cases} t-s, & s \le t \\ -(t-s), & s > t \end{cases}$

$= |t-s| \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[(W_s - W_t)^2\right] = |t-s|}$

(iii) - (α) Θέλουμε να δ.ό. $W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s}$ $\forall t > s$

$P\{W_t - W_s \in A\} = \mathbb{E}\left[P\{W_t - W_s \in A \mid W_s\}\right] =$

$= \int_{\mathbb{R}} P\{W_t - W_s \in A \mid W_s = x\} f_{W_s}(x)\,dx \quad : (29.1)$

$f_{W_s}(x) = p(s, 0, x) = N(x \mid 0, s) \quad : (29.2)$

$P\{W_t - W_s \in A \mid W_s = x\} = P\{W_t \in A + x \mid W_s = x\} =$

$= P(t-s, x, A+x) = \int_{A+x \ni y} p(t-s, x, y)\,dy \underset{y = x+u}{=}$

$= \int_{A \ni u} p(t-s, x, x+u)\,du = \int_{A \ni u} N(x+u \mid x, t-s)\,du =$

$= \int_{A \ni u} N(u \mid 0, t-s)\,du \quad : (29.3)$

$$(29.1)-(29.3) \Rightarrow P\{W_t - W_s \in A\} = \int_{\mathbb{R}\ni x} \left\{ \int_{A\ni u} N(u|0,t-s)\,du \right\} N(x|0,s)\,dx$$

$$= \overbrace{\int_{\mathbb{R}\ni x} N(x|0,s)\,dx}^{1} \cdot \int_{A\ni u} N(u|0,t-s)\,du = \int_{A\ni u} p(t-s,0,u)\,du$$

$$= p(t-s,0,A) = P\{W_{t-s} \in A\} \Rightarrow \boxed{W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s} \quad \forall\, t>s}$$

(iii) - (β) Θέλουμε να δ.ό.

$$W_u - W_t \perp W_s - W_r \quad \forall\, r<s<t<u$$

Από στάσιμες προσαυξήσεις έχουμε ότι

$W_u - W_t \overset{d}{=} W_{u-t} \sim N(0,u-t)$, $W_s - W_r \overset{d}{=} W_{s-r} \sim N(0,s-r)$

Επειδή κανονικές τμ είναι ανεξάρτητες εάν κ' μόνον εάν είναι ασυσχέτιστες, αρκεί να δ.ό. cov = 0

$$\mathrm{Cov}(W_u - W_t, W_s - W_r) = \mathbb{E}[(W_u - W_t)(W_s - W_r)] =$$

$$= \mathbb{E}[W_u W_s] - \mathbb{E}[W_u W_r] - \mathbb{E}[W_t W_s] + \mathbb{E}[W_t W_r]$$

$$= u\wedge s - u\wedge r - t\wedge s - t\wedge r = s - r - s + r = 0$$

Άσκηση (i) Δ.ό. $x_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $1\le i\le n$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες εάν κ' μόνον εάν $Cov(x_i,x_j)=0$, $\forall\, i\neq j$

(ii) Να βρεθεί η πυκνότητα τάξης 2 της διαδικασίας Wiener.

(i) Εάν $(x_1,\dots,x_n)\sim N_n(\mu,\Sigma)$ όπου $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$ κ' $\Sigma=[Cov(x_i,x_j)]_{1\le i,j\le n}$ κ' δοθέντος ότι $cov(x_i,x_j)=\sigma_i^2\,1(i=j)$ ο πίνακας Σ είναι διαγώνιος $\Sigma=diag(\sigma_1^2,\dots,\sigma_n^2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Sigma^{-1}=diag\left(\frac{1}{\sigma_1^2},\dots,\frac{1}{\sigma_n^2}\right)$. Θέτοντας $x-\mu=(x_1-\mu_1,\dots,x_n-\mu_n)$ θα έχουμε:

$$N_n(x\mid\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|det(\Sigma)|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}= \quad (31.1)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\sigma_1^2\cdots\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\mu_i)^2\right\}=\prod_{i=1}^{n}N(x_i\mid\mu_i,\sigma_i^2)$$

$$\Rightarrow f_{X_1\cdots X_n}(x_1,\dots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)\Leftrightarrow x_i\perp x_j,\ \forall i\neq j$$

$s<t \Rightarrow f_{W_s W_t}(x,y) = f_{W_s}(x) f_{W_t|W_s}(y|x) =$

$= N(x|0,s)\, N(y|x, t-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$

$= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2s(t-s)}\left[tx^2 - 2sxy + sy^2\right]\right\}$; (32.1)

$\Sigma = \left[cov(W_{t_i}, W_{t_j})\right]_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} s\wedge s & s\wedge t \\ t\wedge s & t\wedge t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}$

$t_i = s, \ t_j = t$

$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{(31.1)}{\Longrightarrow} (x,y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{s(t-s)}(x,y)\begin{pmatrix} t & -s \\ -s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{s(t-s)}(tx^2 - 2sxy + sy^2)$: (32.2)

$(32.1)(32.2) \Rightarrow \boxed{f_{W_s W_t}(x,y) = N_2\left(x,y \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}\right), \forall s<t}$

<u>Άσκηση</u> Να βρεθεί η ροπογεννήτρια του (W_s, W_t) για $s<t$ κ' να υπολογιστούν οι από κοινού ροπές $\mathbb{E}[W_s W_t]$ κ' $\mathbb{E}[W_s^2 W_t]$

$M_{W_s, W_t}(u,v) = \mathbb{E}\left[e^{uW_s + vW_t}\right] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{uW_s+vW_t} \,\middle|\, W_s\right]\right\}$

$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[e^{uW_s+vW_t} \,\middle|\, W_s = x\right] \underbrace{f_{W_s}(x)}_{N(x|0,s)} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{ux}\, \mathbb{E}\left[e^{vW_t} \mid W_s = x \right] N(x|0,s)\,dx \overset{s<t}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{ux} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{vy} \underbrace{f_{W_t|W_s}}_{N(y|0,t-s)} (y|x)\,dy \right\} N(x|0,s)\,dx$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow M_X(v) = e^{\mu v + \sigma^2 v^2/2}$$

$$X \sim N(x, t-s) \Leftrightarrow M_X(v) = e^{xv + (t-s)v^2/2}$$

$$= \frac{e^{(t-s)v^2/2}}{\sqrt{2\pi s}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ \underbrace{(u+v)x - x^2/2s}_{-\frac{1}{2s}\left[\underbrace{x^2 - 2s(u+v)x + s^2(u+v)^2}_{(x - s(u+v))^2} - s^2(u+v)^2\right]} \right\} dx}_{e^{s(u+v)^2/2} \sqrt{2\pi s} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} N(x|s(u+v), s)\,dx}_{1}}$$

$$= \exp\left\{ (t-s)v^2/2 + s(u+v)^2/2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2}(su^2 + 2suv + tv^2) \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2}(u,v)\begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$$

Για την από κοινού ροπογεννήτρια των τμ X,Y έχουμε

$$M_{X,Y}(u,v) = \mathbb{E}\left[e^{uX+vY}\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ux+vy} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k X^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{v^l Y^l}{l!}\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{u^k v^l}{k!\,l!}X^k Y^l\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{u^k v^l}{k!\,l!}\mathbb{E}\left[X^k Y^l\right]$$

$$\frac{\partial^{k+l} M_{X,Y}(u,v)}{\partial u^k \partial v^l} = \mathbb{E}\left[X^k Y^l e^{uX+vY}\right] = M^{(k,l)}_{X,Y}(u,v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{(k,l)}_{X,Y}(0,0) = \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right]$$

$$\mathbb{E}\left[W_s W_t\right] = M^{(1,1)}_{W_s,W_t}(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} e^{\frac{1}{2}(su^2+2suv+tv^2)}\Big|_{(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{2}(2su+2sv)\,e^{\frac{1}{2}(su^2+2suv+tv^2)}\right\}\Big|_{(0,0)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2s + \frac{1}{2}(2su+2sv)(2su+2tv)\right\}e^{\frac{1}{2}(su^2+2suv+tv^2)}\Big|_{(0,0)} = s$$

<u>Παρατήρηση</u>: Εάν $s>t$ $M_{W_s,W_t}(u,v) = \exp\left\{\frac{1}{2}(u,v)\begin{pmatrix} t & t \\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right\}$ με αποτέλεσμα $\mathbb{E}\left[W_s W_t\right] = t$

Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι $\mathbb{E}\left[W_s^2 W_t\right] = 0$

<u>Πρόταση</u> Η διαδικασία Wiener $\{W_t\}_{t\geq 0}$ καθώς και η διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ <u>όπου</u> $X_t = W_t^2 - t$ είναι martingales.

(i) Θέλουμε να δ.ο. $\mathbb{E}[W_{t_i} | W_{t_{i-1}}, \dots, W_{t_0}] = W_{t_{i-1}}$ για κάθε $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_i$. Επειδή η διαδικασία Wiener έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι Markovian (άσκηση σελ <u>24</u>) αυτό σημαίνει ότι

$$[W_{t_i} | W_{t_{i-1}}, \dots, W_{t_0}] \stackrel{d}{=} [W_{t_i} | W_{t_{i-1}}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[W_{t_i} | W_{t_{i-1}}, \dots, W_{t_0}] = \mathbb{E}[W_{t_i} | W_{t_{i-1}}] =$$

$$= \mathbb{E}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}} | W_{t_{i-1}} - \underbrace{W_0}_{0}] + W_{t_{i-1}} \quad \underline{\underline{\text{ανεξ. προσαυξ.}}}$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]}_{0} + W_{t_{i-1}} = W_{t_{i-1}}$$

(ii) Απο την πρόταση στη σελ <u>28</u> (είτε απο στάσιμες προσαυξήσεις) έχουμε:

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] \stackrel{t>s}{=} t - s$$

απο ανεξάρτητες προσαυξήσεις: $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | W_s] =$

$$= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[(W_t-W_s)^2 \mid W_s\right] = t-s \iff$$

$$\mathbb{E}\left[W_t^2 \mid W_s\right] - 2\mathbb{E}\left[W_t W_s \mid W_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s^2 \mid W_s\right] = t-s \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}\left[W_t^2 \mid W_s\right] - 2W_s\mathbb{E}\left[W_t \mid W_s\right] + W_s^2 = t-s \\ (i) \Rightarrow \mathbb{E}\left[W_t \mid W_s\right] = W_s \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[W_t^2 - t \mid W_s\right] = W_s^2 - s \overset{\{W_t\} = \text{Markov}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[W_{t_i}^2 - t_i \mid W_{t_{i-1}}, \dots, W_{t_0}\right] = W_{t_{i-1}}^2 - t_{i-1} \qquad \square$$

<u>Πρόταση</u>: Εάν η τμ $X \sim N(0,s)$ είναι δηλ. κανονική με μέση τιμή 0 κ' διασπορά s, οι ροπές της δίνονται από την

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \begin{cases} (k-1)!! \cdot s^{k/2}, & k = \text{άρτιος} \\ 0, & k = \text{περιττός} \end{cases}$$

<u>όπου</u> με $n!!$ συμβολίζουμε το <u>διπλό</u> παραγοντικό του n

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 4\cdot 2, & n = \text{άρτιος} \\ n(n-2)\cdots 3\cdot 1, & n = \text{περιττός} \\ 1, & n = -1, 0, 1 \end{cases}$$

$k = 2r$

$$\mathbb{E}\left[X^{2r}\right] = \int_{\mathbb{R}} x^{2r} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}^+} (x^2)^r e^{-x^2/2s} \overset{x = u\sqrt{2s}}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}^+} (u^2 \cdot 2s)^r e^{-u^2} \sqrt{2s}\, du = \frac{2^{r+1} s^r}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} u^{2r} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{2^r s^r}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} u^{2r-1} e^{-u^2} (2u\,du) \overset{u^2=y}{=} \frac{2^r s^r}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} y^{r-1/2} e^{-y} dy$$

$$= \frac{2^r s^r}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} y^{(r+1/2)-1} e^{-y} dy = \frac{2^r s^r}{\sqrt{\pi}} \Gamma(r+1/2)$$

$$= \frac{2^r s^r}{\sqrt{\pi}} (r-1/2)(r-3/2)\cdots\left(r-\frac{2r-1}{2}\right) \underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= s^r (2r-1)(2r-3)\cdots(1) = (2r-1)!! \cdot s^r$$

όταν k = περιττός η συν/ση $x^k f_X(x)$ είναι περριτή κ' $\mathbb{E}[X^k] = 0$

<u>Άσκηση</u> Χρησιμοποιώντας τις προτάσεις στις σελ <u>35</u> κ' <u>36</u> να βρεθούν οι ροπές $\mathbb{E}[W_s^2 W_t]$ κ' $\mathbb{E}[W_s^2 W_t^2]$ όταν $s<t$

(i) $$\mathbb{E}[W_s^2 W_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[W_s^2 W_t | W_s]\} = \mathbb{E}\{W_s^2 \overbrace{\mathbb{E}[W_t|W_s]}^{W_s}\}$$

$$= \mathbb{E}[W_s^3] = 0$$

(ii) $$\mathbb{E}[W_s^2 W_t^2] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[W_s^2 W_t^2 | W_s]\} = \mathbb{E}\{W_s^2\, \mathbb{E}[W_t^2 | W_s]\}$$

$$= \mathbb{E}\{W_s^2 (\mathbb{E}[W_t^2 - t | W_s] + t)\} = \mathbb{E}\{W_s^2 (W_s^2 - s + t)\} =$$

$$= \mathbb{E}[W_s^4] + (t-s)\mathbb{E}[W_s^2] = 3s^2 + (t-s)s = s(t+2s)$$

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με μέση συνάρτηση $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = 0, \forall t \geq 0$, $P\{X_0 = 0\} = 1$ κ' ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Τότε η $\{X_t\}$ είναι martingale

$$\mathbb{E}[X_{t_i} | X_{t_{i-1}}, \dots, X_{t_0}] \overset{\text{ασκ } 24}{=\!=} \mathbb{E}[X_{t_i} | X_{t_{i-1}}], \ \forall\, 0 \leq t_0 < \dots < t_i$$

$$= \mathbb{E}[X_{t_i} - X_{t_{i-1}} | X_{t_{i-1}} - X_0] + X_{t_{i-1}} \overset{\text{ανεξ. προσ}}{=}$$

$$= \mathbb{E}[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] + X_{t_{i-1}} = \underbrace{\mu(t_i)}_{0} - \underbrace{\mu(t_{i-1})}_{0} + X_{t_{i-1}} = X_{t_{i-1}}$$

□

<u>Άσκηση</u> Να βρεθεί η προς τα πίσω πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας Wiener δηλ. η κατανομή της τμ $[W_s | W_t]$ όταν $t > s$

$$f_{W_s|W_t}(x|y) = f_{W_s,W_t}(x,y) \big/ f_{W_t}(y) = f_{W_s}(x) f_{W_t|W_s}(y|x) / f_{W_t}(y)$$

$$= \frac{p(s,0,x)\, p(t-s,x,y)}{p(t,0,y)} = \frac{N(x|0,s)\, N(y|x,t-s)}{N(y|0,t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{s}{t}(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{x^2}{s}+\frac{(y-x)^2}{t-s}-\frac{y^2}{t}\right]}_{Q}\right\}$$

$$Q = \frac{1}{st(t-s)}\cdot\left[t(t-s)x^2 + st(y-x)^2 - s(t-s)y^2\right]$$

$$= \frac{(tx-sy)^2}{st(t-s)} = \frac{\left(x-\frac{s}{t}y\right)^2}{\frac{s}{t}(t-s)}$$

<u>ΟΠΌΤΕ</u>: $f_{W_s|W_t}(x|y) = N\left(x \,\middle|\, \frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s)\right), \quad s<t$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Δίνεται Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$.
Δ.ό κ' η ανεστραμμένη διαδικασία $\{X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0}\}$ $\forall\ 0\leq t_0<t_1<\dots<t_n$ είναι Μαρκοβιανή.

$$P\{X_{t_0}\in A_0 \mid X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_n}\in A_n\} =$$

$$= \frac{P\{X_{t_0}\in A_0, X_{t_1}\in A_1, X_{t_2}\in A_2,\dots,X_{t_n}\in A_n\}}{P\{X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_n}\in A_n\}}$$

$$= \frac{P\{X_{t_0}\in A_0\}P\{X_{t_1}\in A_1|X_{t_0}\in A_0\}P\{X_{t_2}\in A_2|X_{t_1}\in A_1\}\cdots P\{X_{t_n}\in A_n|X_{t_{n-1}}\in A_{n-1}\}}{P\{X_{t_1}\in A_1\}P\{X_{t_2}\in A_2|X_{t_1}\in A_1\}\cdots P\{X_{t_n}\in A_n|X_{t_{n-1}}\in A_{n-1}\}}$$

$$= \frac{P\{X_{t_0}\in A_0\}P\{X_{t_1}\in A_1|X_{t_0}\in A_0\}}{P\{X_{t_1}\in A_1\}} =$$

$$= \frac{P\{X_{t_0}\in A_0, X_{t_1}\in A_1\}}{P\{X_{t_1}\in A_1\}} = P\{X_{t_0}\in A_0 \mid X_{t_1}\in A_1\}$$

$\square$

<u>Άσκηση</u> Πότε ο απλός τυχαίος περίπατος είναι martingale?

$$\{X_n\}_{n\geq 0} \; : \; X_n = X_{n-1} + Z_n \;, \; n\geq 1 \iff X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i + X_0$$

Ενώ $Z_i \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}[X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0] = \mathbb{E}[X_{n-1} + Z_n \mid X_{n-1}, \dots, X_0]$$

$$= X_{n-1} + \mathbb{E}[Z_n \mid X_{n-1}, \dots, X_0] = X_{n-1} + \mathbb{E}[Z_n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_n] = 0 = 2p-1 \iff p = 1/2$$

Δηλαδή εάν ο απλός τυχαίος περίπατος είναι κ' συμμετρικός, θα είναι martingale δηλ.

$$\mathbb{E}[X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_0] = X_{n-1}$$

$\square$