Συμβολίζουμε με R_t το <u>αποθεματικό</u> (πλεόνασμα - reserve) μιας ασφαλιστικής εταιρίας την χρονική στιγμή $t \geq 0$ κ' υποθέτουμε ότι

$$R_t = u + ct - S_t \quad , t \geq 0 \qquad : (1.1)$$

<u>όπου</u>: $u = R_0$ είναι το αρχικό αποθεματικό,

c = το ασφάλιστρο στην μονάδα του χρόνου

S_t = οι συνολικές αποζημιώσεις που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία μέχρι κ' την χρονική στιγμή t.

Όταν κατά την χρονική στιγμή t δεν ζητείται αποζημίωση τότε το αποθεματικό αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Στην μονάδα του χρόνου τα <u>έσοδα</u> $c > 0$ είναι σταθερά, ενώ τα <u>έξοδα</u> S_t είναι τυχαία δηλαδή $S_t = S_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων N_t είναι μια διαδικασία Poisson (δηλαδή $N_t \sim Po(\lambda t)$) τότε το R_t στην σχέση (1.1) ονομάζεται κλασικό μοντέλο αποθεματικού κατά Cramér - Lundberg. Εάν ο αριθμός των αποζημιώσεων είναι γενικά μια ανανεωτική διαδικασία (renewal process) το μοντέλο στην σχέση (1.1) ονομάζεται ανανεωτικό (S. Andersen 1957).

Η διαφορά μεταξύ κλασικού κ' ανανεωτικού μοντέλου οφείλεται αποκλειστικά στην στοχ. διαδικασία $(S_t)_{t\geq 0}$

$$S_t = \begin{cases} 0 & , N_t = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_t} Z_i & , N_t \geq 1 \end{cases} \quad : (2.1)$$

N_t = ο αριθμός των απαιτήσεων προς την εταιρεία
στο χρονικό διάστημα $(0, t]$

Z_i = η απαίτηση για αποζημίωση, $z_i \overset{iid}{\sim} f_Z(\cdot)$
δηλαδή Z_i είναι ανεξάρτητες κ' ισόνομες με
πυκνότητα πιθανότητας f_Z

Η στοχαστική διαδικασία $(N_t)_{t\geq 0}$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία (counting process). Δηλαδή είναι μια σδ σε συνεχή χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων

πιο συγκεκριμένα

$N_t(\Omega) = \mathbb{N}_0$, $N_0 = 0$ σβ. , $N_t \leq N_s$ όταν $t \leq s$

Ένα counting process ορίζει μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots\}$ που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης (των απαιτήσεων)

$$Y_1 = \inf\{t>0 : N_t = 1\}$$
$$Y_2 = \inf\{t>0 : N_t = 2\}$$
$$Y_3 = \inf\{t>0 : N_t = 3\}$$
$$\dots$$

Δηλαδή η τμ $Y_k = \inf\{t>0 : N_t = k\}$ παριστάνει το χρόνο άφιξης (arrival time) της k-αποζημίωσης.

Η ακολουθία τμ $\{T_1, T_2, T_3, \dots\}$ ονομάζεται ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων (interarrival times) ή χρόνων αναμονής

$$T_1 = Y_1$$
$$T_2 = Y_2 - Y_1 \iff Y_k = \sum_{i=1}^{k} T_i \quad :(3.1)$$
$$T_3 = Y_3 - Y_2$$
$$\dots$$

Εάν η απαριθμήτρια διαδικασία N_t είναι διαδικασία Poisson τότε $T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot\,|\lambda)$, δηλαδή οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητες κ' ισόνομες εκθετικές με μέση τιμή $1/\lambda$.

Ορσ Μια ανανεωτική διαδικασία $(N_t)_{t\geq 0}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία στην οποία οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητες τμ που ακολουθούν την ίδια κατανομή $T_i \overset{iid}{\sim} f_T(\cdot)$ (δηλαδή η f_T δεν είναι απαραίτητα εκθετική)

Οι ανανεωτικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται ευρέως στην θεωρία αξιοπιστίας. Έστω σύστημα στο οποίο εγκαθιστούμε μηχανή, η οποία μόλις χαλάσει αντικαθίσταται από καινούρια κάθε φορά που γίνεται αντικατάσταση λέμε ότι το σύστημα ανανεώνεται. Εαν το N_t αναπαριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο $(0,t]$ τοτε η διαδικασία $(N_t)_{t\geq 0}$ είναι ανανεωτική

$$N_t = \sup\{ n \geq 0 : \underbrace{\sum_{i=1}^{n} T_i}_{Y_n} \leq t \} \quad , \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$$T_i \overset{iid}{\sim} f_T(\cdot)$$

Επομένως για κάθε ανανεωτική διαδικασία έχουμε την ιδιότητα ενδεχομένων:

$$\{ N_t \geq n \} = \{ Y_n \leq t \} \quad : (4.1)$$

έχουμε τουλάχιστον <u>n</u> γεγονότα (αφίξεις) εως κ' χρόνο t

Ο χρόνος αναμονής εως ότου συμβουν <u>n</u> γεγονοτα είναι το πολύ t.

<u>ορσ:</u> Η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$, είναι ο αναμενό-μενος αριθμός των γεγονότων - αφίξεων στο διάστημα $(0,t]$, δηλαδη έχουμε ότι:

$$m(t) = \mathbb{E}[N_t] \;, \; t \geq 0 . \quad : (4.2)$$

Η μόνη κατηγορία ανανεωτικών διαδικασιών για τις οποίες ισχύει η ιδιότητα Markov είναι η διαδικασίες Poisson

$$P\{ N_{t_{n+1}} = m_{n+1} \mid N_{t_n} = m_n, \ldots, N_{t_1} = m_1 \} = P\{ N_{t_{n+1}} = m_{n+1} \mid N_{t_n} = m_n \} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \; T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda)$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ότι οφείλεται στην ιδιότητα αμνησίας των ενδιάμεσων χρόνων. δηλαδή ότι

$$P\{T_i > t+s \mid T_i > s\} = P\{T_i > t\} \quad : (5.1)$$

Εαν $T_i \sim Exp(\cdot|\lambda) \Rightarrow P\{T_i > t+s\} = e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda s} =$

$= P\{T_i > t\} P\{T_i > s\}$ <u>έτσι</u> $P\{T_i > t+s \mid T_i > s\} =$

$$= \frac{P\{T_i > t+s, T_i > s\}}{P\{T_i > s\}} = \frac{P\{T_i > t+s\}}{P\{T_i > s\}} = \frac{P\{T_i > t\}\cancel{P\{T_i > s\}}}{\cancel{P\{T_i > s\}}}$$

$= P\{T_i > t\}$, διότι $\{T_i > t+s\} \subset \{T_i > s\}$ $\square$

Στοχαστικές διαδικασίες Poisson.

<u>Ορσ</u> Μια στοχ. διαδ. $(N_t)_{t \geq 0}$ λεγεται στοχ. διαδ. Poisson οταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

(i) $N_0 = 0$ σβ

(ii) $t \leq s \Rightarrow N_t \leq N_s$

Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός κ' η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος h

(iii) $P\{N_{t+h} = n+k \mid N_t = n\} = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & k = 0 \\ \lambda h + o(h), & k = 1 \\ o(h), & k > 1 \end{cases}$

(οπου $o(h)$ συμβολίζει ποσότητα που συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα απο το h καθως $h \to 0$ πχ h^2, h^3, κλπ)

(iv) Η στοχ. διαδ. $(N_t)_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες κ' στάσιμες προσαυξήσεις δηλαδή για κάθε $0=t_0<t_1<\dots<t_n$ έχουμε ότι

$N_{t_0}, N_{t_1}-N_{t_0}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$: ανεξάρτητες τμ

$$N_{t_i}-N_{t_{i-1}} \stackrel{d}{=} N_{t_i-t_{i-1}} \quad 1\leq i\leq n$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εαν $N\sim Po(\cdot|\lambda)$ να βρεθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_N(u)$ της τμ N καθώς κ' η μέση τιμή κ' η διασπορά.

$$M_N(u)=\mathbb{E}[e^{uN}]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{u\cdot n}P\{N=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{u\cdot n}Po(n|\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{u\cdot n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^u)^n}{n!}=e^{\lambda(e^u-1)} \quad : (6.1)$$

$$M_N'(u)=\lambda e^u M_N(u) \Rightarrow M_N'(0)=\mathbb{E}[N]=\lambda \quad : (6.2)$$

$$M_N''(u)=\lambda e^u M_N(u)+(\lambda e^u)^2 M_N(u) \Rightarrow M_N''(0)=\mathbb{E}[N^2]=\lambda+\lambda^2 \quad : (6.3)$$

$$Var\{N\}=\mathbb{E}[N^2]-\mathbb{E}[N]^2=\lambda \quad : (6.4)$$

$\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Να δειχθεί ότι ισχύει $N_t\sim Po(\cdot|\lambda t)$

$$P\{N_{t+h}=m+k \mid N_t=m\}=P\{N_{t+h}-N_t=k\mid N_t=m\}=$$

$$=P\{N_{t+h}-N_t=k\}$$

Για πολύ μικρό h θέτουμε $dN_t=N_{t+dt}-N_t$, $dt=h$

$$P\{N_{t+dt}=n\}=P\left(\bigcup_{i=0}^{n}\{N_t=n-i, dN_t=i\}\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{n} P\{N_t=n-i,\ dN_t=i\} = \sum_{i=0}^{n} P\{N_t=n-i\}P\{dN_t=i\} =$$

$$= P\{N_t=n\}P\{dN_t=0\} + P\{N_t=n-1\}P\{dN_t=1\}$$

$$= P\{N_t=n\}(1-\lambda dt) + P\{N_t=n-1\}\lambda dt \iff$$

$$\iff P\{N_{t+dt}=n\} - P\{N_t=n\} = P\{N_t=n-1\}\lambda dt - P\{N_t=n\}\lambda dt$$

$$\iff dP\{N_t=n\} = P\{N_t=n-1\}\lambda dt - P\{N_t=n\}\lambda dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u^n dP\{N_t=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n-1\}\lambda dt - \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n\}\lambda dt \ :(7.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n-1\} = \sum_{n=1}^{\infty} u^n P\{N_t=n-1\} = u\sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} P\{N_t=n-1\}$$

$$= u\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n\} \ :(7.2)$$

$$(7.1)(7.2) \Rightarrow d\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n\}\right) = (u-1)\lambda dt \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n\}$$

<u>Θέτοντας</u> $\Pi_{N_t}(u) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{N_t=n\} = \mathbb{E}\left[u^{N_t}\right]$ <u>παίρνουμε:</u>

$$d\Pi_{N_t}(u) = (u-1)\Pi_{N_t}(u)\lambda dt \iff \int_{\tau=0}^{t} \frac{d\Pi_{N_\tau}(u)}{\Pi_{N_\tau}(u)} = (u-1)\lambda\int_{\tau=0}^{t} d\tau$$

$$\iff \log\{\Pi_{N_t}(u)\} - \log\{\Pi_{N_0}(u)\} = (u-1)\lambda t$$

αλλά $\Pi_{N_0}(u) = \mathbb{E}\left[u^{N_0}\right] = u^0 \cdot 1 = 1$ από όπου

$$\boxed{\Pi_{N_t}(u) = e^{(u-1)\lambda t}} = e^{-\lambda t} e^{u\lambda t} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n\left\{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\right\} \Rightarrow$$

$:(7.1)$

$$\Rightarrow P\{N_t = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \Leftrightarrow N_t \sim Po(\cdot \mid \lambda t). \quad \square$$

<u>Άσκηση</u>[1] (i) Να βρεθεί η από κοινού πιθανότητα.

$P\{N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_n} = m_n\}$ για $t_1 \le \dots \le t_n$ κ' $m_1 \le \dots \le m_n$.

(ii) Οι αφίξεις των απαιτήσεων σε μια ασφαλιστική εταιρεία ακολουθούν την ανέλιξη Poisson με ένταση $\lambda = 3$ ανά εβδομάδα. Να βρεθούν οι πιθανότητες.

(α) Να υπάρχουν δύο απαιτήσεις σε διάστημα δύο εβδομάδων

(β) Να υπάρχουν τουλάχιστον 2 απαιτήσεις σε διάστημα δύο εβδομάδων.

(γ) Να χρειαστούν τουλάχιστον τρεις εβδομάδες έως την πρώτη απαίτηση.

(δ) Να χρειαστούν τουλάχιστον 1 εβδομάδα για την πρώτη απαίτηση κ' τουλάχιστον 1 εβδομάδα για την δεύτερη απαίτηση

(ε) Να υπάρχει μια απαίτηση σε διάστημα μιας εβδομάδας κ' τρεις απαιτήσεις σε διάστημα δύο εβδομάδων.

(i) $t_0 = 0 < t_1 \leq \cdots \leq t_n$, $m_0 = 0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n$

$$P\{N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_n} = m_n\} = P\{N_{t_1} - N_{t_0} = m_1 - m_0, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = m_n - m_{n-1}\}$$

$$= P\{N_{t_1} - N_{t_0} = m_1 - m_0\} P\{N_{t_2} - N_{t_1} = m_2 - m_1\} \cdots P\{N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = m_n - m_{n-1}\}$$

$$= P_o(m_1 | \lambda t_1) P_o(m_2 - m_1 | \lambda(t_2 - t_1)) \cdots P_o(m_n - m_{n-1} | \lambda(t_n - t_{n-1}))$$

(ii)

(α) $N_2 \sim P_o(\cdot | \overset{\lambda}{3} \cdot \overset{t}{2}) = P_o(\cdot | 6)$

$$P\{N_2 = 2\} = P_o(2|6) = \frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!} = 18 e^{-6}$$

(β) $P\{N_2 \geq 2\} = 1 - P\{N_2 < 2\} = 1 - P\{N_2 = 0\} - P\{N_2 = 1\}$

$$= 1 - \frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} - \frac{e^{-6} \cdot 6^1}{1!} = 1 - 7e^{-6}.$$

(γ) $P\{T_1 > \underset{t}{3}\} = e^{-\lambda t} = e^{-9}$

(δ) $P\{T_1 > 1, T_2 > 1\} = P\{T_1 > 1\} P\{T_2 > 1\} = (e^{-3})^2 = e^{-9}$

(ε) $P\{N_1 = 1, N_2 = 3\} = P\{N_1 = 1\} P\{N_2 = 3 | N_1 = 1\}$

$$= P\{N_1 = 1\} P\{N_2 - N_1 = 2 | N_1 = 1\} = P\{N_1 = 1\} P\{N_2 - N_1 = 2\}$$

$$= P\{N_1 = 1\} P\{N_1 = 2\} = P_o(1|3) P_o(2|3) = \frac{e^{-3} \cdot 3}{1!} \cdot \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!}$$

Συνέλιξη πυκνοτήτων κ' αθροιστικών συν/σεων κατανομών

<u>Έστω</u> $x \sim f_X(\cdot)$, $y \sim f_Y(\cdot)$ κ' $T: \left.\begin{array}{l} z = x+y \\ w = x \end{array}\right\} T^{-1}: \begin{array}{l} x = w \\ y = z-w \end{array}$

με $Jac(T^{-1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x(z,w), y(z,w)) \, |Jac(T^{-1})|$$

$$= f_{XY}(w, z-w)$$

εαν οι τ.μ x κ' y είναι <u>ανεξάρτητες</u> θα έχουμε ότι:

$$f_{ZW}(z,w) = f_X(w) f_Y(z-w) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_Z(z) = \int_{\mathbb{R} \ni w} f_X(w) f_Y(z-w)\, dw = \int_{\mathbb{R} \ni w} f_Y(z-w) f_X(w)\, dw \equiv (f_Y * f_X)(z)$$

<u>δηλαδη:</u> $z = x+y \sim f_Y * f_X(\cdot)$ που είναι η συνέλιξη των <u>πυκνοτήτων</u> $f_Y(\cdot)$ κ' $f_X(\cdot)$

<u>Ισχύει ότι:</u> $f_Y * f_X = f_X * f_Y$, πράγματι

$$f_Y * f_X(z) = \int_{\mathbb{R} \ni w} f_Y(z-w) f_X(w)\, dw \underset{\tau = z-w}{=} \int_{\mathbb{R} \ni \tau} f_Y(\tau) f_X(z-\tau)\, d\tau = f_X * f_Y(z)$$

Εαν F_X κ' F_Y οι αντίστοιχες αθρ. συν/σεις κατανομής έχουμε

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\, du = \int_{-\infty}^{z} \left\{ \int_{\mathbb{R} \ni w} f_Y(u-w) f_X(w)\, dw \right\} du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\ni w} \left\{ \int_{-\infty}^{z} f_Y(u-w)\,du \right\} f_X(w)\,dw \overset{v=u-w}{=} \int_{\mathbb{R}\ni w} \left\{ \int_{-\infty}^{z-w} f_Y(v)\,dv \right\} \underbrace{f_X(w)\,dw}_{dF_X(w)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}\ni w} F_Y(z-w)\,dF_X(w) = F_Y * F_X(z)$$

<u>δηλαδή</u> η <u>ασκ</u> της $z=x+y$ είναι η συνέλιξη των <u>ασκ</u> των x κ' y <u>κατά την έννοια</u>:

$$F_Z(z) = \int_{\mathbb{R}\ni w} F_Y(z-w)\,dF_X(w) \equiv (F_Y * F_X)(z)$$

κ' πάλι επειδή $f_Y * f_X = f_X * f_Y \Rightarrow F_Y * F_X = F_X * F_Y$

<u>Ειδική περίπτωση</u>: Εαν οι x κ' y είναι <u>θετικές τμ</u> δηλ. οι χώροι καταστάσεων είναι $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ θα έχουμε

$$x>0,\ z-x>0 \Leftrightarrow 0<x<z$$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}\ni x} f_Y(z-x) f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{z} f_Y(z-x) f_X(x)\,dx = f_Y * f_X(z)$$

<u>και</u>

$$F_Z(z) = \int_{\mathbb{R}\ni x} F_Y(z-x)\,dF_X(x) = \int_{x=0}^{z} F_Y(z-x)\,dF_X(x) = F_Y * F_X(z)$$

<u>Γενικά</u>: Εαν $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ είναι μια <u>φραγμένη</u> συν/ση κ' $F: \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ μια <u>ασκ</u> η συνέλιξη $h*F$ ορίζεται σαν:

$$(h*F)(z) \equiv \int_{x=0}^{z} h(z-x)\,dF(x)$$

Πρόταση: Έστω ότι η τμ X είναι θετική ($X(\Omega)=\mathbb{R}^+$)

τότε
$$\mathbb{E}[X] = \int_{(0,\infty)\ni u} P\{X>u\}\,du \quad : (12.1)$$
$$= \int_0^\infty [1-F_X(u)]\,du$$

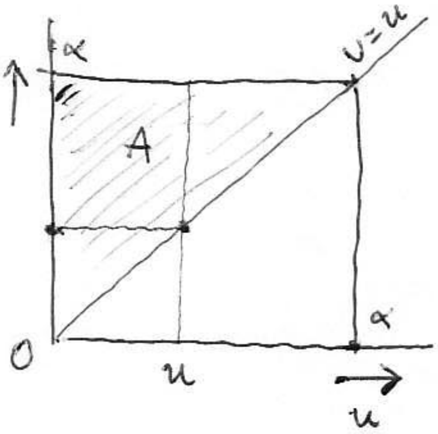
Απόδειξη

$$\int_{u=0}^{\infty} P\{X>u\}\,du = \int_{u=0}^{\infty}\int_{v=u}^{\infty} f_X(v)\,dv\,du$$

Παρατηρούμε ότι
$$\int_{u=0}^{\infty}\int_{v=u}^{\infty} f_X(v)\,dv\,du = \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{v} f_X(v)\,du\,dv$$
$$= \int_{v=0}^{\infty} v f_X(v)\,dv = \mathbb{E}[X]$$

$\square$

Σημειώστε ότι:



$$\int_{u=0}^{\alpha}\int_{v=u}^{\alpha}(\cdots) = \int_{v=0}^{\alpha}\int_{u=0}^{v}(\cdots)$$

για $\forall\, 0<\alpha\leq\infty$

Γενικότερα ισχύει ότι εάν $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$ τότε οι ροπές της X δίνονται από:

$$\mathbb{E}[X^k] = k\int_{(0,\infty)\ni u} u^{k-1} P\{X>u\}\,du = k\int_0^\infty u^{k-1}[1-F_X(u)]\,du$$

Στην <u>διακριτή περίπτωση</u> έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X>k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X>k-1\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X\geq k\} \; : (13.1)$$

<u>Πράγματι</u>: εάν $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ θα έχουμε:

(i) $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P\{X=k\}$$

$$= 1\cdot P\{X=1\} + 2\cdot P\{X=2\} + 3P\{X=3\} + 4P\{X=4\} + \dots$$

$$= \underbrace{P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\} + \dots}_{P\{X\geq 1\}}$$

$$+ \underbrace{P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\} + \dots}_{P\{X\geq 2\}}$$

$$+ \underbrace{P\{X=3\} + P\{X=4\} + \dots}_{P\{X\geq 3\}}$$

$$+ \underbrace{P\{X=4\} + \dots}_{P\{X\geq 4\}}$$

$$\dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X\geq k\}$$

(ii) $$\sum_{x=0}^{\infty} P\{X>x\} = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x}^{\infty} P\{X=y\} = \sum_{y=0}^{\infty} \overbrace{\left(\sum_{x=1}^{y} 1\right)}^{y} P\{X=y\} = \mathbb{E}[X]$$

$\square$