<u>Πρόταση</u>: Εάν $(N_t)_{t\geq 0}$ είναι ανανεωτική διαδικασία με <u>σσκ</u> ενδιάμεσων χρόνων $F_T(\cdot)$ τότε η ανανεωτική συν/ση ικανοποιεί την σχέση

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{*k}(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \quad :(14.1)$$

όπου $F^{*k} = \underbrace{F * \cdots * F}_{k\text{-φορές}}$.

<u>Πρόγραμμα</u> $(4.1)(4.2) \Rightarrow m(t) = \mathbb{E}[N_t] \overset{(13.1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P\{N_t \geq k\}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{Y_k \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k} T_i \leq t\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{*k}(t)$$

$$T_i \overset{iid}{\sim} F_T(\cdot) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} T_i \sim F_T^{*k}(\cdot)$$

□

<u>Άσκηση</u> Να δειχθεί ότι για την διαδικασία Poisson έχουμε ότι $m(t) = \lambda t$ κάνοντας χρήση της σχέσης (14.1)

Η διαδικασία Poisson είναι ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας <u>όπου</u> $T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda) = Ga(\cdot|1,\lambda) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} T_i \sim Ga(\cdot|k,\lambda) \Rightarrow F_T^{*k}(t) = \int_0^t Ga(u|k,\lambda)\,du =$$

$$= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^t u^{k-1} e^{-\lambda u}\,du \Rightarrow m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{*k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^t u^{k-1} e^{-\lambda u}\,du$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda u} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k u^{k-1}}{(k-1)!} \right\} du = \int_0^t e^{-\lambda u} \{\lambda e^{\lambda u}\}\,du = \lambda t$$

□

<u>Ασκηση</u> Να βρεθεί η ανανεωτική συν/ση στην περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή $Ga(2,\lambda)$

$$T_i \overset{iid}{\sim} Ga(\cdot|\alpha,\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} T_i \sim Ga(\cdot|k\alpha,\lambda) \Rightarrow F_T^{*k}(t) = \int_0^t Ga(u|k\alpha,\lambda)du$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha)} u^{k\alpha-1} e^{-\lambda u} du \Rightarrow m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_T^{*k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha)} u^{k\alpha-1} e^{-\lambda u} du$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda u} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k\alpha} u^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} \right\} du \quad : (15.1)$$

<u>Για $\alpha = 2$</u> έχουμε ότι: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k\alpha} u^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda u)^{2k-1}}{(2k-1)!} =$

$= \lambda \sinh(\lambda u)$ <u>όπου</u> $\sinh(\lambda u) = \frac{e^{\lambda u} - e^{-\lambda u}}{2}$

$$(15.1) \Rightarrow m(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda u} \sinh(\lambda u) du = \frac{\lambda t}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{-2\lambda t} - 1\right)$$

□

<u>Πρόταση</u>: Η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$m(t) = F_T(t) + \underbrace{\int_0^t m(t-x)\, dF_T(x)}_{(m * F_T)(t)} \quad : (15.1)$$

$$m(t) = \mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[N_t | T_1]\} = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[N_t | T_1 = u]\, dF_{T_1}(u) \quad : (15.2)$$

$$\boxed{t < u} \Rightarrow \mathbb{E}[N_t | T_1 = u] = 0 \quad : (15.3)$$

$$t \geq u \Rightarrow \{T_1 = u\} = \{N_u = 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_t \mid T_1 = u] = \mathbb{E}[N_t \mid N_u = 1] = 1 + \mathbb{E}[N_{t-u}] \quad : (16.1)$$

$$(15.3)\,(16.1) \Rightarrow \mathbb{E}[N_t \mid T_1 = u] = \{1 + \mathbb{E}[N_{t-u}]\}\mathbb{1}(u \leq t)$$

$$(15.2) \Rightarrow m(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \{1 + m(t-u)\}\mathbb{1}(u \leq t)\, dF_{T_1}(u) =$$

$$= \int_0^t dF_{T_1}(u) + \int_0^t m(t-u)\, dF_{T_1}(u)$$

$$= F_{T_1}(t) - \underbrace{F_{T_1}(0)}_{0} + \int_0^t m(t-u)\, dF_{T_1}(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m = F_T + m * F_T.$$

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι $\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \mid Y]\} = \mathbb{E}[X]$

(i) Συνεχής περίπτωση:

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \mid Y]\} = \mathbb{E}\left\{\int_X x f_{X\mid Y}(x \mid Y)\, dx\right\} =$$

$$= \int_X x\, \mathbb{E}\{f_{X\mid Y}(x \mid Y)\}\, dx = \int_X x \left[\int_Y f_{X\mid Y}(x \mid y) f_Y(y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_X x \left[\int_Y f_{X,Y}(x,y)\, dy\right] dx = \int_X x f_X(x)\, dx = \mathbb{E}[X]$$

(ii) Διακριτή Περίπτωση

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right] = \mathbb{E}\left\{\sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\pi(x|y)\right\} = \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{E}\left[\pi(x|y)\right] =$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{X}} x \sum_{y\in\mathcal{Y}} \pi(x|y)\pi(y) = \sum_{x\in\mathcal{X}} x \sum_{y\in\mathcal{Y}} \pi(x,y) = \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\pi(x) = \mathbb{E}[X]$$

$\square$

<u>Άσκηση</u>: Εαν για την διαδικασία Poisson γνωρίζουμε ότι $N_t \sim Po(\cdot|\lambda t)$, δείξτε ότι $T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda)$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

$$P\{T_1 > t\} = P\{N_t = 0\} = Po(0|\lambda t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow T_1 \sim Exp(\cdot|\lambda)$$

$$P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} = P\{N_{t+s} - N_s = 0\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}$$

ανεξάρτητο του s

Έως τώρα δείξαμε ότι $T_1, T_2 \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda)$.

Υποθέτουμε ότι $T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda)$, $1 \leq i \leq n$ <u>Τότε</u>

$$P\{T_{n+1} > t \mid T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n\} = P\{N_{t+\tau} - N_\tau = 0\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}$$

όπου $\tau \equiv \sum_{i=1}^{n} t_i$. Δηλαδή T_{n+1} ανεξάρτητο των $T_1, \dots, T_n$ ενώ $T_{n+1} \sim Exp(\cdot|\lambda)$.

$\square$

Ανανεωτικές εξισώσεις

<u>Ορσ</u> Οι ανανεωτικές εξισώσεις, είναι εξισώσεις της μορφής:

$$\mu = g + \varphi\cdot(\mu * F) \qquad : (18.1)$$

ισοδύναμα:

$$\mu(t) = g(t) + \varphi\cdot\int_0^t \mu(t-x)\,dF(x) \qquad : (18.2)$$

<u>όπου</u>: $\begin{cases} \varphi = \text{σταθ},\ 0<\varphi\leq 1, \\ g = \text{φραγμένη συν/ση} \\ F = \text{ασκ} \end{cases}$

(i) Όταν $0<\varphi<1$ ονομάζονται ελλειμματικές (defective)

(ii) Όταν $\varphi=1$ ονομάζονται κανονικές (proper – nondefective)

<u>Πρόταση</u> Η γενική λύση της (18.2) είναι

$$\mu(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)\,dM(x) \qquad : (18.3)$$

<u>όπου</u>: $M(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k F^{*k}(x)$

$$\mu = g + g*M = g + g*\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k\cdot F^{*k}\right\} = g + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k\cdot g*F^{*k}.$$

Αντικαθιστώντας στα δεξιά της (18.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} g + \varphi\cdot\mu*F &= g + \varphi\cdot\left\{g + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k\cdot g*F^{*k}\right\}*F \\ &= g + \left\{\varphi\cdot g + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{k+1}\cdot g*F^{*k}\right\}*F \\ &= g + \varphi\cdot g*F + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{k+1}\cdot g*F^{*(k+1)} = g + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k\cdot g*F^{*k} = \end{aligned}$$

$$= g + g * \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k F^{*k} \right\} = g + g * M = \mu$$

□

<u>Άσκηση</u> Δείξαμε ότι η ανανεωτική συν/ση $m(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $m = F + m*F$ (19.1) (σχέση (15.1)). Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι $m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t)$ (σχέση (14.1)).

Η εξίσωση (19.1) είναι μια κανονική ανανεωτική εξίσωση για $g \equiv F$. Χρησιμοποιώντας την γενική λύση (18.3) έχουμε

$$m = g + g*M = F + F * \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k} \right\} =$$

$$= F^{*1} + \sum_{k=1}^{\infty} F^{*(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}$$

□

Το βασικό ανανεωτικό θεώρημα
(<u>key renewal theorem</u>)

As θεωρήσουμε την κανονική ανανεωτική εξίσωση

$$\mu = g + \mu * F \Leftrightarrow \mu(t) = g(t) + \int_0^t \mu(t-y)\,dF(y) ,$$

όπου μ η άγνωστη συν/ση, g φραγμένη συν/ση και F ασκ τέτοια ώστε $Z \sim F(\cdot)$. Εαν η g είναι φθίνουσα κ' ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^+$ θα έχουμε ασυμπτωτικό ότι

$$(20.0):\quad \mu(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\int_{\mathbb{R}^+} g(y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}^+} y\,dF(y)}$$

όπου $\int_{\mathbb{R}^+} y\,dF(y) = \mathbb{E}[Z]$.

Σύνθετες κατανομές και διαδικασίες

Εάν $Z_i \overset{iid}{\sim} F_Z(\cdot)$ κ' N τμ ανεξάρτητη από τις Z_i με $N(\Omega) = \mathbb{N}_0$, τότε η τμ.

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i, & N \geq 1 \end{cases} \quad : (20.1)$$

λέμε ότι είναι σύνθετη

Κατά αντιστοιχία θεωρώντας την ανανεωτική διαδικασία N_t, ορίζουμε την σύνθετη διαδικασία

$$S_t = \begin{cases} 0, & N_t = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_t} Z_i, & N_t \geq 1. \end{cases} \quad : (20.2)$$

Η διαδικασία S_t παριστάνει το ύψος των ζημιών (αποζημιώσεων) κατά την μοντελοποίηση του αποθεματικού R_t (σχέση (1.1)) με το ανανεωτικό μοντέλο.

Πρόταση Η περιθώρια ασκ του ύψους των αποζημιώσεων είναι $F_{S_t}(x) = P\{S_t \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_Z^{*k}(x)\, P\{N_t = n\}$

όπου $F_Z^{*0}(x) = 1(x \geq 0)$.

Απόδειξη (α) $\{S_t \leq x\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{S_t \leq x, N_t = k\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{S_t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_t \leq x, N_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_t \leq x \mid N_t = k\} P\{N_t = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i \leq x \mid N_t = k\right\} P\{N_t = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k} Z_i \leq x\right\} P\{N_t = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_Z^{*k}(x) P\{N_t = k\}$$

□

Παρατήρηση: Η προηγούμενη απόδειξη είναι ισοδύναμη με το εξής:

$$F_{S_t}(x) = P\{S_t \leq x\} = \mathbb{E}\left[P\{S_t \leq x \mid N_t\}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{S_t \leq x \mid N_t = k\} P\{N_t = k\} \qquad \text{κλπ..}$$

Άσκηση Να δειχθεί ότι

$$Var(X) = Var(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}(Var(X|Y))$$

$$Var(\mathbb{E}(X|Y)) + \mathbb{E}(Var(X|Y)) =$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|Y)^2\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|Y)\right]^2 + \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(X^2|Y) - \mathbb{E}(X|Y)^2\right\}.$$

$$= \mathbb{E}\left[\cancel{\mathbb{E}(X|Y)^2}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|Y)\right]^2 + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X^2|Y)\right] - \cancel{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|Y)^2\right]}$$

$$= -\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X^2) = Var(X)$$

$\square$

<u>Πρόταση</u> (i) Η μέση τιμή του ύψους των ζημιών είναι

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[Z]\,\mathbb{E}[N_t] \qquad : (22.1)$$

(ii) Η διασπορά του ύψους των ζημιών είναι

$$Var[S_t] = \mathbb{E}[Z]^2 Var[N_t] + Var[Z]\,\mathbb{E}[N_t] \quad : (22.2)$$

(iii) Η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων είναι.

$$M_{S_t}(u) = M_{N_t}\left(\log M_Z(u)\right) \quad : (22.3)$$

(iv) Η πιθανογεννήτρια των αποζημιώσεων είναι:

$$\Pi_{S_t}(u) = \Pi_{N_t}\left(\Pi_Z(u)\right) \quad : (22.4)$$

(i)
$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}[S_t|N_t]\right\} \\ &\mathbb{E}[S_t|N_t=n] = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,\Big|\, N_t = n\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i\right\} = n\,\mathbb{E}[Z] \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[\underbrace{N_t\,\mathbb{E}[Z]}_{\mathbb{E}[S_t|N_t]}] = \mathbb{E}[Z]\,\mathbb{E}[N_t] \quad : (22.5)$$

(ii)

$$Var(S_t) = \mathbb{E}\{Var(S_t | N_t)\} + Var\{\mathbb{E}[S_t | N_t]\} \quad : (23.1)$$

$$Var(S_t | N_t = n) = Var\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i \,|\, N_t = n\right\} = Var\left\{\sum_{i=1}^{n} Z_i\right\} = n\,Var(Z)$$

$$\mathbb{E}\{Var(S_t | N_t)\} = \mathbb{E}\{N_t\,Var(Z)\} = Var(Z)\,\mathbb{E}[N_t] \quad : (23.2)$$

$$Var\{\mathbb{E}[S_t | N_t]\} \overset{(22.1)}{=} Var\{N_t\,\mathbb{E}[Z]\} = \mathbb{E}[Z]^2\,Var(N_t) \quad : (23.3)$$

Από τις σχέσεις (23.1), (23.2) και (23.3) παίρνουμε την σχέση (22.2).

(iii) $$M_{S_t}(u) = \mathbb{E}[e^{uS_t}] = \mathbb{E}\{\underbrace{\mathbb{E}[e^{uS_t} | N_t]}_{M_{S_t|N_t}(u)}\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[e^{u\sum_{i=1}^{N_t} Z_i} \,|\, N_t\right]\right\} \quad : (23.4)$$

$$\mathbb{E}\left[e^{u\sum_{i=1}^{N_t} Z_i} \,|\, N_t = n\right] = \mathbb{E}\left\{e^{u\sum_{i=1}^{n} Z_i}\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{uZ_i}]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{uZ}] = M_Z(u)^n$$

Έτσι από τη σχέση (23.4) έχουμε:

$$M_{S_t}(u) = \mathbb{E}\{M_Z(u)^{N_t}\} = \mathbb{E}\{e^{N_t \log M_Z(u)}\} =$$

$$= M_{N_t}(\log M_Z(u)) \quad : (23.5)$$

(iv) $\Pi_{S_t}(u) = \mathbb{E}\left[u^{S_t}\right] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[u^{S_t} \mid N_t\right]\right\}$

$$= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[u^{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i} \mid N_t\right]\right\} \quad : (24.1)$$

$$\mathbb{E}\left[u^{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i} \mid N_t = n\right] = \mathbb{E}\left[u^{\sum_{i=1}^{n} Z_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[u^{Z_i}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[u^{Z}\right] = \Pi_Z(u)^n$$

Έτσι από την σχέση (24.1) έχουμε:

$$\Pi_{S_t}(u) = \mathbb{E}\left\{\Pi_Z(u)^{N_t}\right\} = \Pi_{N_t}\left(\Pi_Z(u)\right)$$

<u>Άσκηση</u> Να βρεθούν οι σχέσεις (22.1) – (22.4) στη περίπτωση της σύνθετης διαδικασίας Poisson

Εδώ η ανανεωτική διαδικασία N_t είναι η διαδικασία Poisson όπου $N_t \sim Po(\cdot|\lambda t)$

$(6.2) \Rightarrow \mathbb{E}[N_t] = \lambda t$

$(6.4) \Rightarrow Var(N_t) = \lambda t$

$(6.1) \Rightarrow M_{N_t}(u) = e^{\lambda t(e^u - 1)}$

$(7.1) \Rightarrow \Pi_{N_t}(u) = e^{\lambda t(u-1)}$

$(22.1) \Rightarrow \mathbb{E}[S_t] = \lambda t\, \mathbb{E}[Z]$

$(22.2) \Rightarrow Var(S_t) = \lambda t \left\{ \mathbb{E}[Z]^2 + Var(Z) \right\} = \lambda t\, \mathbb{E}[Z^2]$

$(22.3) \Rightarrow M_{S_t}(u) = e^{\lambda t \left(e^{\log M_Z(u)} - 1\right)} = e^{\lambda t (M_Z(u) - 1)}$

$(22.4) \Rightarrow \Pi_{S_t}(u) = e^{\lambda t (\Pi_Z(u) - 1)}$

$\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Εστω ότι οι συνολικές αποζημιώσεις απο <u>n</u> ανεξάρτητα χαρτοφυλάκια $S_t^1, \dots, S_t^n$ ακολουθούν ακολουθούν τη σύνθετη Poisson ως εξής:

$$S_t^j = \sum_{i=1}^{N_t^j} Z_i^j \quad , \quad 1 \le j \le n$$

$$N_t^j \sim Po(\cdot \mid \lambda_j t) \quad , \quad Z_i^j \sim Exp(\cdot \mid \mu_j)$$

Να βρεθεί η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων απο όλα τα χαρτοφυλακια, δηλαδή η κατανομή της

$$S_t = \sum_{j=1}^{n} S_t^j$$

Πρώτα θα δουλέψουμε το παράδειγμα χρησιμοποιώντας $Z_i^j \sim F_{Z^j}(\cdot)$ κ' στην συνέχεια θα εξειδικεύσουμε το αποτέλεσμα για εκθετικές αποζημιώσεις.

$$M_{S_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{uS_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{u\sum_{j=1}^{n} S_t^j}\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{uS_t^j}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} M_{S_t^j}(u) \overset{(22.3)}{=} \prod_{j=1}^{n} M_{N_t^j}\left(\log M_{Z^j}(u)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t (M_{Z_j}(u)-1)} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t \left(M_{Z_j}(u)-1\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{t\sum_{j=1}^{n} \lambda_j M_{Z^j}(u) - t\Lambda\right\}$$

$$= \exp\left\{t\Lambda\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} M_{Z_j}(u)}_{} - 1\right]\right\}, \quad :(26.1)$$

<u>όπου</u>: $\Lambda \equiv \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$

Δηλαδή το S_t είναι σύνθετη διαδικασία Poisson με ένταση Λ κ' ροπογεννήτρια αποζημιώσεων

$$M_Z(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} M_{Z_j}(u)$$

Η κατανομή της κάθε απαίτησης θα είναι η <u>μίξη</u> των κατανομών απαιτήσεων των σύνθετων διαδικασιών Poisson S_t^j, $1 \le j \le n$ με αναλογίες λ_j/Λ. Για να το δούμε αυτό, έστω f_{Z_j} η πυκνότητα που αντιστοιχεί στην ασκ F_{Z_j}. Τότε θέτοντας $Z \sim \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} f_{Z_j}(\cdot)$ η αντίστοιχη ροπογεννήτρια θα είναι

$$M_Z(u) = \mathbb{E}\left[e^{uZ}\right] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{ux}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} f_{Z_j}(x)\,dx\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^+} e^{ux} f_{Z_j}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda} M_{Z_j}(u) \quad : (27.1)$$

Πιο συγκεκριμένα εαν $Z_j \sim Exp(\cdot \mid \mu_j)$ τότε

$$M_{Z_j}(u) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{ux} \mu_j e^{-\mu_j x}\,dx = \frac{\mu_j}{\mu_j - u}$$ κ' η (27.1) γίνεται

$$M_Z(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j - u}\right)$$ ενω απο την (26.1) παίρνουμε

$$M_{S_t}(u) = \exp\left\{ t\Lambda \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Lambda}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j - u}\right) - 1 \right] \right\}$$

$\square$