Άσκηση Δ.ό η διαδικασία Poisson (i) Έχει στάσιμη πιθανότητα μετάβασης (δηλ ότι είναι χρονικά ομογενής) (ii) Η διαδικασία Poisson έχει συνεχή χρόνο $T=\mathbb{R}_0^+$ κ' διακριτό χώρο καταστάσεων $S=\mathbb{N}_0$. Έχουμε δει ότι για ΣΔ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ όπου $T=\mathbb{R}_0^+$, $S\subseteq\mathbb{R}$ με στάσιμη πιθ. μετάβασης, ισχύει ότι: $f_{X_t}(y)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_s}(x)\,p(t-s,x,y)\,dx$

Δείξτε αντίστοιχη σχέση για την διαδικασία Poisson.

(i) $P\{N_t=n \mid N_s=m\} = P\{N_t-N_s=n-m \mid N_s=m\}$

$\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=} P\{N_t-N_s=n-m\} \overset{\text{στασ. προσ}}{=} P\{N_{t-s}=n-m\}$

$= P_o(n-m \mid \lambda(t-s))$, $t<s$, $m\leq n$

Δηλ. η πιθ μετάβασης εξαρτάται μόνο απο το $n-m$ κ' όχι απο τα n,m.

$p(s,m,t,n) = p(t-s,m,n)$

(ii) $p_{N_t}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{N_s}(m)\, p(t-s,m,n) =$

$= \sum_{m=0}^{\infty} P_o(m\mid\lambda s)\, P_o(n-m\mid\lambda(t-s))$

$= \sum_{m=0}^{n} P_o(m\mid\lambda s)\, P_o(n-m\mid\lambda(t-s))$

$= \sum_{m=0}^{n} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^m}{m!}\, \underbrace{\frac{e^{-\lambda(t-s)}\{\lambda(t-s)\}^{n-m}}{(n-m)!}} =$

$$= \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}s^m(t-s)^{n-m}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}\left\{\frac{s}{t}+\left(1-\frac{s}{t}\right)\right\}^n = P_o(n|\lambda t)$$

<u>Άσκηση</u> (i) Δείξτε ότι $\left[N_s \mid N_t = n\right] \overset{s<t}{\sim} Bin\left(n, \frac{s}{t}\right)$

(ii) Χρησιμοποιείστε το (i) για να δ.ο.

$$Cov(N_s, N_t) = \lambda \cdot s \wedge t$$

(i) $P\{N_s = m \mid N_t = n\} = \dfrac{P\{N_s = m, N_t = n\}}{P\{N_t = n\}} =$

$$= \frac{P\{N_s = m, N_t - N_s = n-m\}}{P\{N_t = n\}} = \frac{P\{N_s = m\}P\{N_t - N_s = n-m \mid N_s = m\}}{P\{N_t = n\}}$$

$$\underset{\text{ανεξ. προσ.}}{=} \frac{P\{N_s = m\}P\{N_t - N_s = n-m\}}{P\{N_t = n\}} \underset{\text{στασ. προσ.}}{=}$$

$$= \frac{P\{N_s = m\}P\{N_{t-s} = n-m\}}{P\{N_t = n\}} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^m}{m!}\dfrac{e^{-\lambda(t-s)}\{\lambda(t-s)\}^{n-m}}{(n-m)!}}{\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-m} = Bin(m \mid n, s/t)$$

(ii) $\mathbb{E}[N_s N_t] \overset{t>s}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[N_s N_t | N_t]\right] = \mathbb{E}\left[N_t \, \mathbb{E}[N_s | N_t]\right]$

$= \mathbb{E}\left[N_t \cdot \left(N_t \cdot \frac{s}{t}\right)\right] = \frac{s}{t}\mathbb{E}[N_t^2] = \frac{s}{t}\left(\lambda t + (\lambda t)^2\right)$

$Cov(N_s, N_t) = \frac{s}{t}\left(\lambda t + (\lambda t)^2\right) - (\lambda s)(\lambda t) = \lambda s$

Απο συμμετρία εαν $\underline{t<s} \Rightarrow \mathbb{E}[N_s N_t] = \frac{t}{s}\left(\lambda s + (\lambda s)^2\right)$

$\Rightarrow Cov(N_s, N_t) = \lambda t$

έτσι $\boxed{Cov(N_s, N_t) = \lambda \cdot s \wedge t}$

□

Ασκ (i) Δό η διαδικασία $J_t = N_t - \lambda t$

είναι martingale

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) δ.ό $\overbrace{Cov(N_s, N_t)}^{\lambda \cdot s \wedge t}$

(i) $\mathbb{E}[N_{t_n} | N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_0}] = \mathbb{E}[N_{t_n} | N_{t_{n-1}}] =$

$= \mathbb{E}[N_{t_n} - N_{t_{n-1}} | N_{t_{n-1}}] + N_{t_{n-1}} = \mathbb{E}[N_{t_n} - N_{t_{n-1}}] + N_{t_{n-1}}$

$= \lambda(t_n - t_{n-1}) + N_{t_{n-1}} = \lambda t_n + \left(N_{t_{n-1}} - \lambda t_{n-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[N_{t_n} - \lambda t_n | N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_0}] = N_{t_{n-1}} - \lambda t_{n-1}$

$\forall \; 0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n$

(ii) $\mathbb{E}[N_t N_s] \overset{t>s}{=} \mathbb{E}[N_s \mathbb{E}[N_t | N_s]] =$

$\mathbb{E}[N_s \cdot [\mathbb{E}[N_t - \lambda t | N_s] + \lambda t]] =$

$\mathbb{E}[N_s \cdot (N_s + \lambda(t-s))] = \mathbb{E}[N_s^2] + \lambda(t-s)\mathbb{E}[N_s] =$

$(\lambda s + (\lambda s)^2) + \lambda(t-s)\cdot \lambda s = \frac{s}{t}(\lambda t + (\lambda t)^2)$ ⌑

<u>Άσκηση</u> Δό η διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $X_t = Y_t^2 - \lambda t$ είναι martingale

$$\mathbb{E}[(Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})^2 | N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_0}] = \mathbb{E}[(Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})^2 | N_{t_{n-1}}]$$

$$= \mathbb{E}\{[(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) - \lambda(t_n - t_{n-1})]^2 | N_{t_{n-1}}\} =$$

$$= \mathbb{E}\{(N_{t_n} - N_{t_{n-1}})^2 | N_{t_{n-1}}\} - 2\lambda(t_n - t_{n-1})\mathbb{E}[N_{t_n} - N_{t_{n-1}} | N_{t_{n-1}}]$$

$$+ \lambda^2(t_n - t_{n-1}) = \mathbb{E}\{(N_{t_n} - N_{t_{n-1}})^2\} - 2\lambda(t_n - t_{n-1})\mathbb{E}[N_{t_n} - N_{t_{n-1}}]$$

$$= \mathbb{E}[N_{t_n - t_{n-1}}^2] - 2\lambda(t_n - t_{n-1})\mathbb{E}[N_{t_n - t_{n-1}}] + \lambda^2(t_n - t_{n-1})$$

$$= \{\lambda(t_n - t_{n-1}) + \lambda^2(t_n - t_{n-1})^2\} - 2\lambda^2(t_n - t_{n-1})^2 + \lambda^2(t_n - t_{n-1})$$

$$= \lambda(t_n - t_{n-1}) \quad (*)$$

$$\mathbb{E}[(Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})^2 | N_{t_{n-1}}] = \mathbb{E}[Y_{t_n}^2 | N_{t_{n-1}}] - 2\mathbb{E}[Y_{t_n} Y_{t_{n-1}} | N_{t_{n-1}}]$$
$$+ \mathbb{E}[Y_{t_{n-1}}^2 | N_{t_{n-1}}] =$$

$\boxed{5}$

$$= \mathbb{E}\left[J_{t_n}^2 \mid N_{t_{n-1}} \right] - 2 J_{t_{n-1}} \underbrace{\mathbb{E}\left[J_{t_{n-1}} \mid N_{t_{n-1}} \right]}_{J_{t_{n-1}}} + \underbrace{\mathbb{E}\left[J_{t_{n-1}}^2 \mid N_{t_{n-1}} \right]}_{J_{t_{n-1}}^2} =$$

$$\overset{(*)}{=} \lambda(t_n - t_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}\left[J_{t_n}^2 - \lambda t_n \mid N_{t_{n-1}} \right] = J_{t_{n-1}} - \lambda t_{n-1}$$

$\square$

<u>Πρόταση</u>: Έστω Y_k ο χρόνος αναμονής για την κ άφιξη διαδικασίας Poisson με ένταση λ (<u>δηλ</u> $N_t \sim PP(\lambda)$). Εάν $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ δείξτε ότι $[Y|N_t=n] \sim \mathcal{U}(R_t)$ όπου R_t το πολύεδρο

$$R_t = \{ s=(s_1,\dots,s_n)\in \mathbb{R}^n : 0<s_1<\cdots<s_n<t \}$$

<u>δηλ</u> το τυχαίο διάνυσμα $[Y|N_t=n]$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο R_t.

Εαν η πυκνότητα του $S=[Y|N_t=n]$ είναι $f_S(s)$ θα έχουμε:

$$f_S(s_1,\dots,s_n)\,ds_1\cdots ds_n = P\{s_i<Y_i\le s_i+ds_i,\ 1\le i\le n \,|\, N_t=n\}$$

$$= P\{ s_i<Y_i\le s_i+ds_i,\ 1\le i\le n,\ N_t=n\} / P\{N_t=n\}$$

$$= P\{ N_{s_1}=0,\ dN_{s_1}=1,\ N_{s_2}-N_{s_1+ds_1}=0,$$
$$dN_{s_2}=1,\ N_{s_3}-N_{s_2+ds_2}=0,$$
$$\vdots$$
$$dN_{s_{n-1}}=1,\ N_{s_n}-N_{s_{n-1}+ds_{n-1}}=0,$$
$$dN_{s_n}=1,\ N_t-N_{s_n+ds_n}=0 \} / P\{N_t=n\}$$

$$= P\{N_{s_1}=0\}\prod_{i=1}^{n} P\{dN_{s_i}=1\}\prod_{i=2}^{n} P\{N_{s_i-s_{i-1}-ds_{i-1}}=0\}\,P\{N_{t-s_n-ds_n}=0\}/P\{N_t=n\}$$

$$= e^{-\lambda s_1}\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda ds_i}\lambda\, ds_i \cdot \prod_{i=2}^{n} e^{-\lambda(s_i-s_{i-1}-ds_{i-1})}\cdot e^{-\lambda(t-s_n-ds_n)} \Big/ e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$$

$$= n!\, e^{-\lambda s_1}\lambda^n \prod_{i=1}^{n} ds_i \cdot e^{-\lambda(s_n-s_1)}\cdot e^{-\lambda(t-s_n)} \Big/ e^{-\lambda t}\lambda^n t^n =$$

$$= \frac{n!}{t^n}\, ds_1\cdots ds_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{S'}(s) = \frac{n!}{t^n} 1(s \in R_t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{Y|N_t}(s_1, \dots, s_n | n) = \frac{n!}{t^n} 1(0 < s_1 < \dots < s_n < t)$$

Άσκηση

Δίνεται ΣΔ. $\{K_t\}_{0\le t\le 1}$, $K_t = \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > t\right\}$

όπου $U_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$. Δ.ό. $\mathbb{E}[K_t] = e^t$, $0\le t\le 1$

$$m(t) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[K_t \mid U_1]\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[K_t \mid U_1 = y]\, U(y\mid 0,1)\,dy$$

$$= \int_0^1 \mathbb{E}[K_t \mid U_1 = y]\,dy$$

$$\mathbb{E}[K_t \mid U_1 = y] = 1(y>t) + \left[1 + \mathbb{E}[K_{t-y}]\right] 1(y\le t)$$

$$m(t) = \int_0^1 1(y>t)\,dy + \int_0^1 \{1 + \mathbb{E}[K_{t-y}]\}\, 1(y\le t)\,dy$$

$$= \int_t^1 dy + \int_0^t dy + \int_0^t \mathbb{E}[K_{t-y}]\,dy =$$

$$= 1 + \int_0^t \mathbb{E}[K_{t-y}]\,dy$$

$$m(t) = 1 + \int_0^t m(t-y)\,dy \qquad m = 1 + m * F_U$$

$$m'(t) = m(0)t' + \int_0^t m'(t-y)\,dy \overset{u=t-y}{\Rightarrow}$$

$$m'(t) = m(0) + \int_0^t m'(u)\,du = m(0) + (m(t) - m(0)) = m(t)$$

$$\Rightarrow \quad m(t) = m(0)e^t \quad \underline{\underline{\text{αλλά}}} \quad P\{K_0 = 1\} = 1 \Rightarrow m(0) = 1$$