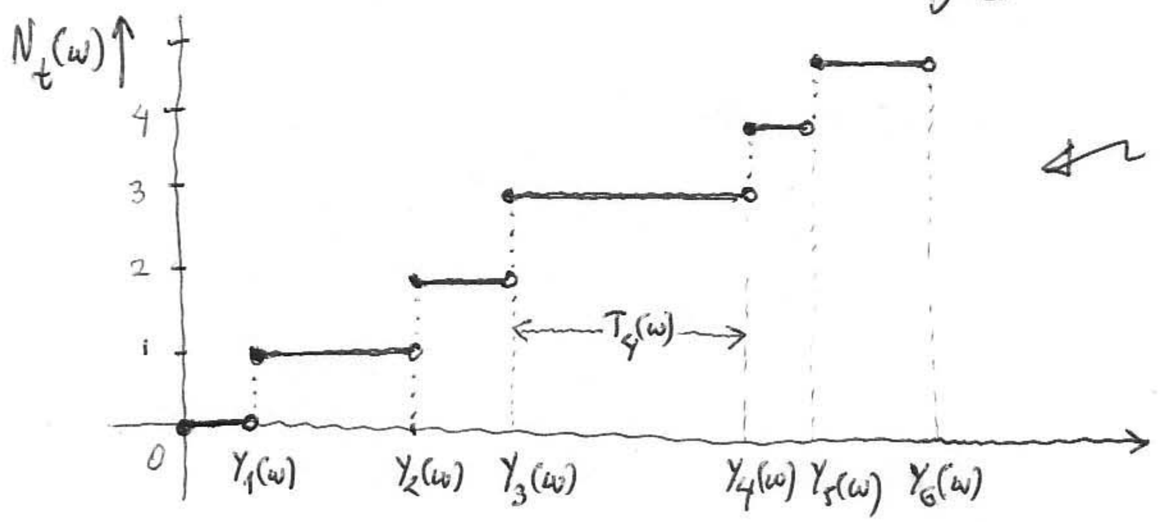
<u>Παράδειγμα</u> Ορίζουμε την <u>σδ</u> $\{N_t\}_{t\ge 0}$ σαν $N_t = \sup\{n \ge 0 : \sum_{i=1}^{n} T_i \le t\}$, όπου $T_i \overset{iid}{\sim} \pi(\cdot)$. Εδώ ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός $S = N_t(\Omega) = \mathbb{N}_0$ κ' ο χρόνος συνεχής $t \in \mathbb{R}_0^+$. Η σδ $\{N_t\}_{t\ge 0}$ είναι μία <u>απαριθμήτρια διαδικασία</u> (μετράει τον αριθμό των αφίξεων τυχαίων ενδεχομένων στο $(0,t]$) στην οποίας οι <u>ενδιάμεσοι χρόνοι</u> αναμονής T_i (ο χρόνος αναμονής για την άφιξη του i-οστού τυχαίου ενδεχομένου) είναι ανεξάρτητες κ' ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Τέτοιες στοχ. διαδικασίες ονομάζονται <u>ανανεωτικές</u>.

Θέτοντας $Y_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ ορίζουμε τον χρόνο αναμονής για n ενδεχόμενα $Y_n = \inf\{t > 0 : N_t = n\}$ που συνδέονται με τους ενδιάμεσους χρόνους αναμονής T_i εφόσων $T_1 = Y_1$ κ' για $i \ge 2$, $T_i = Y_i - Y_{i-1} \Leftrightarrow Y_i = \sum_{j=1}^{i} T_j$



Μια ω-τροχιά ανανεωτικής διαδικασίας

<u>Στην ειδική περίπτωση</u> που οι ενδιάμεσοι χρόνοι T_i έχουν εκθετική κατανομή με μέσο $1/\lambda$ $T_i \overset{iid}{\sim} Exp(\cdot|\lambda)$, η ανανεωτική διαδικασία $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ονομάζεται διαδικασία Poisson.

<u>Ορισμός</u> Μία σδ $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ονομάζεται διαδικασία Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

I. $N_0 = 0$, $t \leq s \Rightarrow N_t \leq N_s$ (δηλ. η N_t είναι μη φθίνουσα ως προς το χρόνο t).

II. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί ένα το πολύ ενδεχόμενο κ' η πιθανότητα να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος

$$P\{N_{t+h} - N_t = k \mid N_t = n\} = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & k=0 \\ \lambda h + o(h) & k=1 \\ o(h) & \text{αλλού.} \end{cases}$$

<u>όπου</u> $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ δηλ. το $o(h)$ είναι μια ποσότητα που τείνει στο 0 πιο γρήγορα από το h.

III. $t < s \Rightarrow N_s - N_t$ ανεξάρτητο του N_t (δηλ. η διαδικασία $\{N_t\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις) κ'

$$N_s - N_t \overset{d}{=} N_{s-t}$$

Άσκηση Να δειχθεί ότι $N_t \sim Po(\cdot|\lambda t)$

$$\{N_t=n\} = \{N_t<n+1\} \setminus \{N_t<n\} = \{Y_{n+1}>t\} \setminus \{Y_n>t\} \Rightarrow$$

$$P\{N_t=n\} = P\{Y_{n+1}>t\} - P\{Y_{n+1}>t, Y_n>t\}$$

$$= P\{Y_{n+1}>t\} - P\{Y_n>t\} = \int_t^\infty Ga(x|n+1,\lambda)dx - \int_t^\infty Ga(x|n,\lambda)dx$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_t^\infty x^n e^{-\lambda x}dx - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_t^\infty x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$= -\frac{\lambda^n}{n!}\left\{[0-t^n e^{-\lambda t}] - n\int_t^\infty \cancel{x^{n-1}e^{-\lambda x}dx}\right\} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_t^\infty \cancel{x^{n-1}e^{-\lambda x}}dx$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = Po(n|\lambda t)$$

$\square$

Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Το βασικό χαρακτηριστικό των Μαρκοβιανών διαδικασιών είναι ότι η μελλοντική τους εξέλιξη εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρίσκονται στο παρόν κ' όχι από το παρελθόν τους

Για παράδειγμα εαν $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι σδ διακριτού χρόνου κ' διακριτού χώρου καταστάσεων S με την Μαρκοβιανή ιδιότητα, θα ισχύει ότι:

$$\forall A \subseteq S, \; P\{X_{n+1}\in A \mid X_n=x, X_{n-1}=x_{n-1}, \dots, X_0=x_0\} =$$

$$= P\{X_{n+1}\in A \mid X_n = x\}, \; \forall x, x_{n-1}, \dots, x_0 \in S \qquad (7.1)$$

$P(n, x, A) \equiv P\{X_{n+1} \in A \mid X_n = x\}$ = Η πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας από το x στο A σε χρόνο n.

Μια σδ με την ιδιότητα (7.1), διακριτού χρόνου κ' διακριτού χώρου καταστάσεων, ονομάζεται <u>αλυσίδα Markov</u>
Η πιθανότητα μετάβασης είναι μια δεσμευμένη μάζα πιθανότητας που εξαρτάται από το x το A κ' τον χρόνο μετάβασης n.

$$P(n, x, \cdot) = \pi_{X_{n+1} \mid X_n}(\cdot \mid x) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

Λέμε ότι η αλυσίδα είναι <u>χρονικά ομογενής</u> όταν

$$P(n, x, \cdot) = P(n-1, x, \cdot) = \dots = P(0, x, \cdot) \equiv P(\cdot \mid x)$$

δηλαδή η τάση μετάβασης είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

<u>Παράδειγμα</u> Ο απλός τυχαίος περίπατος στη (2.1)

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, \quad X_0 = 0, \quad Z_i \overset{iid}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \pi$$

είναι μια χρονικά ομογενής αλυσίδα Markov.

$$P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0\} = P\{Z_{n+1} = y - x\}$$

$$= P\{X_{n+1} = y \mid X_n = x\}$$

Επειδή $Z_i \overset{iid}{\sim} \pi$ έχουμε ότι

$$\underbrace{P\{z_{n+1}=y-x\}}_{P(n,x,y)} = \underbrace{P\{z_n=y-x\}}_{P(n-1,x,y)} = \cdots = \underbrace{P\{z_1=y-x\}}_{P(0,x,y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P(y|x) = P\{z_{n+1}=y-x\} \overset{(3.1)}{=} \begin{cases} q, & y=x-1 \\ p; & y=x+1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα</u> Σε παλαιότερες εποχές η χρήση του τηλεφώνου ήταν ένα ευαίσθητο θέμα. Ας υποθέσουμε ότι το τηλ. είναι ελεύθερο κατά την διάρκεια κάποιας χρονικής περιόδου, ας πούμε το n-οστό λεπτό, τότε με πιθανότητα p, θα είναι κατειλημμένο το επόμενο λεπτό. Εαν το τηλ. είναι κατειλημμένο κατά το n-οστό λεπτό, θα είναι ελεύθερο το επόμενο λεπτό με πιθανότητα q. Υποθέστε ότι το τηλ. είναι ελεύθερο κατά το μηδενικό λεπτό. Θα θέλαμε να απαντήσουμε στις παρακάτω ερωτήσεις

I. Ποία η πιθανότητα x_n ότι το τηλ. θα είναι ελεύθερο κατά το n-οστό λεπτό ?

II. Ποίο το $\lim_{n\to\infty} x_n$ εάν το όριο υπάρχει ?

A_n = το ενδεχόμενο το τηλ. να είναι ελεύθερο κατά το n-οστό λεπτό.

$B_n = \Omega \setminus A_n$ = το ενδεχόμενο το τηλ. να είναι κατειλημμένο κατά το n-οστό λεπτό.

<u>έχουμε ότι</u>: $P(B_{n+1}|A_n) = p$, $P(A_{n+1}|B_n) = q$

$x_n = P(A_n)$, $x_0 = P(A_0) = 1$

$$x_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap (A_n \cup B_n)) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$$

$$= P(A_n)P(A_{n+1} | A_n) + P(B_n)P(A_{n+1} | B_n) = x_n \cdot (1-p) + (1-x_n)q$$

$$= q + (1-p-q)x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = q + (1-p-q)x_n \quad :(10.1)$$

Έστω ότι $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

$$(10.1) \Rightarrow x = q + (1-p-q)x \Leftrightarrow x = \frac{q}{q+p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{q+p} = q + (1-p-q)\frac{q}{q+p} \quad :(10.2)$$

$$(10.1) - (10.2) \Rightarrow x_{n+1} - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)\left(x_n - \frac{q}{q+p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)^n \left(x_0 - \frac{q}{q+p}\right)} \quad :(10.3)$$

$$\overset{x_0=1}{\Longrightarrow} x_n = \frac{q}{q+p} + \frac{p}{q+p}(1-p-q)^n$$

$$0 < p, q < 1 \Rightarrow 0 < p+q < 2 \Leftrightarrow -1 < 1-p-q < 1 \Leftrightarrow |1-p-q| < 1$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (1-p-q)^n = 0$ που δείχνει ότι $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{q}{p+q}$. $\square$

<u>Παρατήρηση I</u>: Θέτοντας $y_n = P(B_n) \Rightarrow y_{n+1} = P(B_{n+1}) =$

$$= P(B_{n+1} \cap (A_n \cup B_n)) = P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n) =$$

$$= P(A_n)P(B_{n+1} | A_n) + P(B_n)P(B_{n+1} | B_n) = p x_n + (1-q)y_n$$

$$= p(1-y_n) + (1-q)y_n = p + (1-p-q)y_n \quad :(10.4)$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{pmatrix} \right\}$$

Ζητώντας $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ η (10.4) δίνει $y = p + (1-p-q)y$

$\Leftrightarrow y = \frac{p}{q+p} \Leftrightarrow \frac{p}{q+p} = p + (1-p-q)\frac{p}{q+p}$: (11.1)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (10.4) κ' (11.1) παίρνουμε

$$y_{n+1} - \frac{p}{q+p} = (1-p-q)\left(y_n - \frac{p}{q+p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n = \frac{p}{q+p} + (1-p-q)^n\left(y_0 - \frac{p}{q+p}\right)} : (11.2)$$

$$\overset{y_0=0}{\Rightarrow} \quad y_n = \frac{p}{q+p} - \frac{p}{q+p}(1-p-q)^n$$

Παρατήρηση II : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε χρόνο $n+1$ εξαρτάται μόνο από το τι συμβαίνει σε χρόνο n κ' όχι από το παρελθόν. Δηλαδή το μοντέλο που περιγράψαμε στο παραδ. στη σελ. 9 είναι αλυσίδα Markov.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι πράγματι το μοντέλο στο παραδ. της σελ. 9 είναι αλυσίδα Markov 2 καταστάσεων.

Θέτουμε: $S = \{0, 1\}$ $\begin{cases} 0 \leftrightarrow \text{το τηλ. είναι ελεύθερο} \\ 1 \leftrightarrow \text{το τηλ. είναι κατειλημμένο.} \end{cases}$

και $\Omega = \{\omega = \omega_0\omega_1\cdots\omega_n\cdots : \omega_i \in S, i \geq 0\}$

Έστω μ_0 μέτρο πιθανότητας στο S^1. Για παράδειγμα θα μπορούσε να είναι $\mu_0\{s_0\} = \begin{cases} 1, & s_0 = 0 \\ 0, & s_0 = 1 \end{cases}$ που αντιστοιχεί στην περίπτωση το τηλ. να είναι ελεύθερο αρχικά.

Το μέτρο πιθανότητας P πάνω στο Ω ορίζεται επαγωγικά:

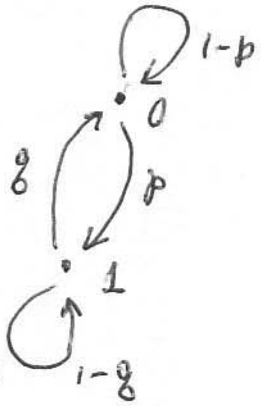
$$P\{\omega \in \Omega : \omega_0 = s_0\} = \mu_0\{s_0\},$$

$$P\{\omega \in \Omega : \omega_0 = s_0, \omega_1 = s_1, \dots \omega_n = s_n, \omega_{n+1} = s_{n+1}\} =$$

$$p(s_{n+1}|s_n)\, P\{\omega \in \Omega : \omega_0 = s_0, \omega_1 = s_1, \dots, \omega_n = s_n\} \quad : (12.1)$$

όπου $p(s_{n+1}|s_n)$ είναι στοιχείο του πίνακα

$$(12.2): \begin{bmatrix} p(0|0) & p(0|1) \\ p(1|0) & p(1|1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$



Προσανατολισμένο γράφημα

$$(12.1) \Rightarrow P\{\omega \in \Omega : \omega_0 = s_0, \dots, \omega_{n+1} = s_{n+1}\} = p(s_{n+1}|s_n)\, p(s_n|s_{n-1}) \cdots$$
$$\cdots p(s_1|s_0)\, \mu_0\{s_0\}$$

Η διαδικασία $\{X_n\}_{n \geq 0}$ κ' $X_n(\Omega) = S^1$ ορίζεται σαν

$$X_n(\omega) = \omega_n, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Θα δείξουμε ότι $P\{X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n\} = p(s_{n+1}|s_n)$ κ'

ότι $P\{X_{n+1} = s_{n+1} | X_0 = s_0, \dots, X_n = s_n\} = P\{X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n\}$

$$P\{X_0=s_0,\dots,X_n=s_n,X_{n+1}=s_{n+1}\} = P\{\omega\in\Omega : X_0(\omega)=s_0,\dots,X_{n+1}(\omega)=s_{n+1}\}$$

$$= P\{\omega\in\Omega: \omega_0=s_0,\dots,\omega_{n+1}=s_{n+1}\} = p(s_{n+1}|s_n)P\{\omega\in\Omega:\omega_0=s_0,\dots,\omega_n=s_n\}$$

$$= p(s_{n+1}|s_n)\,P\{X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P\{X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\}\cdot P\{X_{n+1}=s_{n+1}|X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\} =$$

$$= p(s_{n+1}|s_n)\,P\{X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\}$$

$$\Leftrightarrow \quad P\{X_{n+1}=s_{n+1}\,|\,X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\} = p(s_{n+1}|s_n) \quad :(13.1)$$

$$P\{X_{n+1}=s_{n+1}\,|\,X_n=s_n\} = \frac{P\{X_{n+1}=s_{n+1},X_n=s_n\}}{P\{X_n=s_n\}} \quad :(13.2)$$

$$P\{X_{n+1}=s_{n+1},X_n=s_n\} = P\{\omega\in\Omega: \omega_{n+1}=s_{n+1},\ \omega_n=s_n\} =$$

$$= \sum_{s_0,\dots,s_{n-1}\in S} P\{\omega\in\Omega: \omega_0=s_0,\dots,\omega_{n-1}=s_{n-1},\omega_n=s_n,\ \omega_{n+1}=s_{n+1}\}$$

$$= p(s_{n+1}|s_n)\sum_{s_0,\dots,s_{n-1}\in S} P\{\omega\in\Omega:\omega_0=s_0,\dots,\omega_{n-1}=s_{n-1},\omega_n=s_n\}$$

$$= p(s_{n+1}|s_n)\,P\{\omega\in\Omega: \omega_n=s_n\} = p(s_{n+1}|s_n)\,P\{X_n=s_n\} \quad :(13.3)$$

$$(13.2)(13.3) \Rightarrow \quad P\{X_{n+1}=s_{n+1}\,|\,X_n=s_n\} = p(s_{n+1}|s_n) \quad \xRightarrow{(13.1)}$$

$$\Rightarrow \quad P\{X_{n+1}=s_{n+1}\,|\,X_0=s_0,\dots,X_n=s_n\} = P\{X_{n+1}=s_{n+1}\,|\,X_n=s_n\}$$

$\blacksquare$